CdL in Matematica - A.A. 2019-2020

Compito di Analisi Matematica B

19 giugno 2020

Esercizio 1

Data la seguente funzione definita in $\mathbb{R}^2$ da

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin\left(\frac{x}{y-x^2}\right) & \text{se } y \neq x^2 \\ 0 & \text{se } y = x^2, \end{cases}$$

1a) dire se la funzione è continua nei punti (α, α^2), $\alpha \in \mathbb{R}$;

1b) studiare l'esistenza delle derivate parziali nei punti (α, α^2), $\alpha \in \mathbb{R}$;

1c) studiare la differenziabilità nei punti (α, α^2), $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2

Dato il campo vettoriale $F(x,y,z) = (e^{z^2}, y, e^{x^2})$, calcolare il flusso di F attraverso la superficie Σ definita da

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \mid y = x^2 + z^2,\ 0 \leq y \leq 1\right\}.$$

Esercizio 3

Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \left[n^2 \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)(x^2-1)^n\right] dx, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 4

Dato l'insieme

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y^2 - xy + e^{x+2} = 1\}$$

determinare quali sono le condizioni per cui Γ definisce una curva in forma implicita. Mostrare che in un intorno del punto $(-2,0)$ Γ è esplicitabile nella forma $y = g(x)$ e scrivere lo sviluppo di Taylor fino all'ordine due della funzione $g(x)$ centrato in $x = -2$.