CdL in Fisica - A.A. 2006-2007
Primo parziale di Analisi Matematica C
3 Novembre 2006

Esercizio 1

Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità in $\mathbb{R}^2$ della seguente funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} |x-y| \sin\left(\dfrac{x^2}{x-y}\right) & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

Esercizio 2

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = x^3 + x^2 + (y - \log(1+x^2))^6$$

Determinare gli eventuali punti di sella, massimo e minimo relativi. La funzione ha massimi e minimi assoluti?

Esercizio 3

Dimostrare che l'equazione

$$f(x,y) = (x^2+1)y - e^{-x-y} = 0$$

definisce una ed una sola funzione $y = g(x)$ su tutto l'asse reale. Verificare inoltre che:

a) $g(x) > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$;

b) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

c) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{g(x)}{x} = -1$

e) $x = -1$ è un punto stazionario per $g(x)$ e stabilirne la natura.

Si tracci un grafico qualitativo di $y = g(x)$.

Esercizio 4

Siano $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Dimostrare che

a) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\nabla f \cdot \nabla g$.

b) se $\Delta f = 0$ allora $\Delta(f^2) \geq 0$.