Corso di Laurea in Fisica - A.A. 2006-2007

Secondo Parziale di Analisi Matematica C

12 Dicembre 2006

Esercizio 1

Trovare i punti di massimo e di minimo relativo e assoluto della funzione

$$f(x,y) = x + 2y$$

nel dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1,\ |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$.

Esercizio 2

Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x,y,z) = \frac{2xz^2}{x^2+y^2}dx + \frac{2yz^2}{x^2+y^2}dy + 2z\log(x^2+y^2)dz$$

(2a) Trovare il dominio di definizione di ω e stabilire se risulta semplicemente connesso.

(2b) Dire se ω è una forma differenziale esatta nel dominio trovato precedentemente e in tal caso calcolare una primitiva per ω.

(2c) Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ è la curva di $\mathbb{R}^3$ che partendo dal punto $(1,0,0)$ arriva al punto $(1,0,10^{23})$ con un segmento, esegue 23 rotazioni complete di raggio 1 in senso antiorario sul piano $z = 10^{23}$, poi prosegue fino al punto $(0,-1,10^{23})$ e discende lungo un segmento verticale fino al punto $(0,-1,0)$.

Esercizio 3

Dato il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (x,y,z),$$

calcolare il flusso di $F(x,y,z)$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 - z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1\}$$

e la circuitazione di $F(x,y,z)$ sulla curva $\partial^+\Sigma$.

Esercizio 4

Calcolare l'area della porzione di cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$ compresa tra i piani $z = 0$ e $z = y$.

Esercizio 5

Determinare la massa di una lamina piana avente la forma uguale a $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$ e densità in ogni punto pari a y/x.