GEOMETRIA A - ESERCIZI (11^a E 12^a SETTIMANA)

1. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si consideri, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la seguente forma quadratica
$$q(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4hx_2x_3$$
   (a) Determinare, se esistono, valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali la $q(x_1, x_2, x_3)$ è non degenere.
   (b) Per $h = 2$,
      b1) ridurre q a una forma canonica
      b2) determinare la segnatura di q.
2. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la seguente forma quadratica
$$q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2kx_1x_3 + kx_3^2$$
   (a) Determinare, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la $qQ(x_1, x_2, x_3)$ è non degenere.
   (b) Dire se esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $q(x_1, x_2, x_2)$ è definita positiva.
   (c) Per $k = 1$, ridurre q a una forma canonica.
3. Nello spazio $\mathbb{R}^3$, riferito alla sua base canonica, si consideri la seguente forma quadratica
$$q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3.$$
   (a) Sia A la matrice associata a q nella base canonica. Determinare gli autovalori di A e una base $\mathscr{B}$ ortonormale diagonalizzante.
   (b) Scrivere q nella base $\mathscr{B}$.
   (c) Determinare il rango e la segnatura di q.
4. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ si consideri la forma quadratica q così definita
$$q(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + 2kx_1x_2 + 2x_2x_3 + x_3^2.$$
   (a) Determinare il rango di q al variare di $k \in \mathbb{R}$.
   (b) Trovare una forma canonica di q e il cambio di coordinate rispetto al quale la q assume la forma canonica trovata.
   (c) Determinare la segnatura di q.
   (d) Dire se esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la forma bilineare associata a q definisce un prodotto scalare.
5. Nello spazio $\mathbb{R}^4$ con base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, si consideri la forma bilineare simmetrica
$$b(X, Y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_2 - x_4y_2 + 2x_2y_3 - x_2y_4 - x_4y_4,$$
   con $X = (x_1, x_2, x_3, x_4), Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$.
   (a) Scrivere la matrice A associata a $b(X, Y)$ nella base canonica.

(b) Verificare che b è non degenere.
(c) Diagonalizzare b con l'algoritmo di Lagrange.

6. Nello spazio $\mathbb{R}^3$, riferito alla sua base canonica, si consideri la seguente forma quadratica
$$q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$
   (a) Sia A la matrice associata a Q nella base canonica. Determinare gli autovalori di A e una base $\mathscr{B}$ ortonormale diagonalizzante.
   (b) Scrivere Q nella base $\mathscr{B}$.
   (c) Determinare il rango e la segnatura di q.

7. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ riferito alla sua base canonica si consideri la forma quadratica q così definita $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$.
   (a) Determinare un cambio di variabili che diagonalizzi la forma quadratica q.

8. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
   (a) Trovare gli autovalori della matrice matrice A e i relativi autospazi.
   (b) Dire se la matrice A è diagonalizzabile, in caso di risposta negativa trovare una sua forma canonica di Jordan.

9. Si consideri la seguente matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Dire se A è diagonalizzabile.
   (b) In caso di risposta negativa, scrivere una forma canonica di Jordan di A.
   (c) Trovare una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice A è nella forma canonica di Jordan trovata.

10. Si consideri la seguente matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & 8 & 4 \\ -8 & 7 & -16 & -8 \end{pmatrix}$$
   (a) Verificare che A è nilpotente e trovare l'indice di nilpotenza.
   (b) Scrivere una forma canonica di Jordan di A.
   (c) Trovare una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice A è nella forma canonica di Jordan trovata.

11. Determinare la forma canonica di Jordan della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$