

GEOMETRIA A - ESERCIZI (12^a SETTIMANA)

1. Nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 si consideri, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la seguente forma quadratica

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4hx_2x_3$$

- (a) Determinare, se esistono, valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali la $q(x_1, x_2, x_3)$ è non degenere.
 (b) Per $h = 2$,
 b1) ridurre q a una forma canonica
 b2) determinare la segnatura di q .

2. Nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la seguente forma quadratica

$$q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2kx_1x_3 + kx_3^2$$

- (a) Determinare, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la $q(x_1, x_2, x_3)$ è non degenere.
 (b) Dire se esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $q(x_1, x_2, x_2)$ è definita positiva.
 (c) Per $k = 1$, ridurre q a una forma canonica.

3. Nello spazio \mathbb{R}^3 , riferito alla sua base canonica, si consideri la seguente forma quadratica

$$q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3.$$

- (a) Sia A la matrice associata a q nella base canonica. Determinare gli autovalori di A e una base \mathcal{B} ortonormale diagonalizzante.
 (b) Scrivere q nella base \mathcal{B} .
 (c) Determinare il rango e la segnatura di q .

4. Nello spazio \mathbb{R}^3 si consideri la forma quadratica q così definita

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + 2kx_1x_2 + 2x_2x_3 + x_3^2.$$

- (a) Determinare il rango di q al variare di $k \in \mathbb{R}$.
 (b) Trovare una forma canonica di q e il cambio di coordinate rispetto al quale la q assume la forma canonica trovata.
 (c) Determinare la segnatura di q .
 (d) Dire se esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la forma bilineare associata a q definisce un prodotto scalare.

5. Nello spazio \mathbb{R}^4 con base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, si consideri la forma bilineare simmetrica

$$b(X, Y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_2 - x_4y_2 + 2x_2y_3 - x_2y_4 - x_4y_4,$$

con $X = (x_1, x_2, x_3, x_4), Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$.

- (a) Scrivere la matrice A associata a $b(X, Y)$ nella base canonica.

- (b) Verificare che b è non degenera.
 - (c) Diagonalizzare b con l'algoritmo di Lagrange.
6. Nello spazio \mathbb{R}^3 , riferito alla sua base canonica, si consideri la seguente forma quadratica
- $$q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$
- (a) Sia A la matrice associata a Q nella base canonica. Determinare gli autovalori di A e una base \mathcal{B} ortonormale diagonalizzante.
 - (b) Scrivere Q nella base \mathcal{B} .
 - (c) Determinare il rango e la segnatura di q .
7. Nello spazio \mathbb{R}^3 riferito alla sua base canonica si consideri la forma quadratica q così definita $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$.
- (a) Determinare un cambio di variabili che diagonalizzi la forma quadratica q .