GEOMETRIA A - ESERCIZI (7^a, 8^a SETTIMANA)

1. Sia $\mathcal{A} := \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A = -{}^t\!A\}$ lo spazio vettoriale delle matrici 3×3 antisimmetriche. Sia $F : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathcal{A}$ l'applicazione lineare così definita
$$F(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} 0 & a+b-c & a+c \\ -a-b+c & 0 & 2a-b+4c \\ -a-c & -2a+b-4c & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) Scrivere la matrice associata a F nelle basi canoniche di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ e $\mathcal{A}$, rispettivamente.
   (b) Determinare una base per il nucleo e per l'immagine di F, rispettivamente.
   (c) Determinare, se esistono, i polinomi di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ la cui immagine tramite F è la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \\ -2 & -7 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Si consideri lo spazio $\mathbb{R}^3$ con la base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$.
   (a) Determinare tutti gli endomorfismi non iniettivi $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avente un autovalore $\lambda = 1$ con relativo autovettore $v = (1, 0, 1)$ e tali che $F(e_1 - e_3) = e_1 + e_2 - e_3$.
   (b) Tra gli endomorfismi trovati in (a) determinare, se esistono, quelli diagonalizzabili.
3. Sia $\mathcal{D} \subset M_3(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 3×3 diagonali. Sia $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ l'applicazione lineare così definita
$$F(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}) = a + b + (b+c)x + (c-a)x^2$$
   (a) Determinare una base per il nucleo e per l'immagine di F, rispettivamente.
   (b) Scrivere la matrice associata a F nelle basi canoniche di $\mathcal{D}$ e $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, rispettivamente.
   (c) Determinare la matrice $M_{\mathbf{v}\leftarrow\mathbf{b}}(F)$, dove $\mathbf{v} = \{1 + x - x^2, -1 + x^2, x + x^2\}$ e $\mathbf{b} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\}$.
4. Sia $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ e sia $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare così definita
$$f(A) = BA$$
   (a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica.
   (b) Sia U il sottospazio generato dalle matrici I_2 e B. Verificare che $f(U) = U$.
   (c) Dopo aver verificato che l'insieme $\{I_2, B\}$ è linearmente indipendente, completarlo a una base per $M_2(\mathbb{R})$.

5. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo la cui matrice rispetto alla base $\mathbf{v}$ è $M_{\mathbf{v}}(F) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ dove $\mathbf{v} = \{v_1 = (1,2,2), v_2 = (2,1,-2), v_3 = (2,-2,1)\}$.
   (a) Scrivere la matrice associata a F nella base canonica.
   (b) Dire, giustificando la risposta, se F è iniettiva e/o suriettiva.
6. Sia $\mathcal{S} \subset M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche 2×2. Sia $F : \mathcal{S} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ l'applicazione lineare così definita
$$F(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}) = a + b + (a + 2b + c)x + (a - c)x^2$$
   (a) Determinare una base per il nucleo e per l'immagine di F, rispettivamente.
   (b) Scrivere la matrice associata a F nelle basi canoniche di $\mathcal{S}$ e $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, rispettivamente.
   (c) Determinare l'insieme $F^{-1}(p(x))$, dove $p(x) = 2 + x - x^2$, ovvero trovare la controimmagine del polinomio $p(x)$.
7. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avente come nucleo il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (1,1,1)$ e $v_2 = (0,1,1)$ e tale che $F(v_3) = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, dove $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $v_3 = (1,0,-1)$.
   (a) Scrivere la matrice A associata all'endomorfismo F nella base canonica.
   (b) Trovare una base per l'immagine di F.
   (c) Dopo aver stabilito che i vettori $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono una base per $\mathbb{R}^3$, scrivere la matrice del cambio di coordinate dalla base canonica alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.
8. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice rispetto alla base canonica è
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & k+1 & 1 \\ -1 & 2 & k \end{pmatrix}$$
   (a) Determinare $N(F)$, $Im(F)$ e una loro base al variare di $k \in \mathbb{R}$.
   (b) Dire se esistono valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per i quali $Im(F)$ sia isomorfo a $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.
9. Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (1,0,1,1)$, $w_2 = (1,0,1,-1)$. Sia $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorfismo tale che $F(e_1) = 2e_1$, $F(e_2) = -e_2$, $N(F) = W$.
   (a) Provare che F è univocamente determinata dalle condizioni date.
   (b) Determinare la matrice associata a F nella base canonica.