# II Verifica di Geometria A
## Corso di Laurea in Matematica - Corso di Laurea in Fisica
## 14 dicembre 2016

Esercizio 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori $w_1 = (1, -1, 1)$, $w_2 = (-1, 1, 0), w_3 = (1, 0, 1)$.

(a) Dire se l'insieme $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, in caso contrario ortonormalizzala.

(b) Sia $U$ il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $u_1 = (1, 2, -1), u_2 = (0, 1, 5)$. Trovare il complemento ortogonale di $U$.

(c) Determinare il vettore di $U$ più vicino a $v = (5, -2, 1)$.

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & h \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare la dimensione del nucleo di $f$ al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$.

(b) Determinare, se esistono, valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice $A$ è diagonalizzabile.

(c) Per $h = -1$ scrivere la matrice associata a $f$ nella base $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$, dove $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (-1, 0, 1), v_3 = (-1, 1, -2)$.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$x^2 + y^2 - 3xy - x - 4y = 0$$

(a) Determinare il tipo di conica.

(b) Se si tratta di conica a centro, determinare le coordinate del centro.

(c) Ridurre $\mathcal{C}$ a forma canonica metrica.

(d) Determinare l'isometria che trasforma $\mathcal{C}$ nella forma canonica trovata.

II VERIFICA DI GEOMETRIA A
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - CORSO DI LAUREA IN FISICA
16 DICEMBRE 2015

ESERCIZIO 1. Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo che ha come nucleo il sottospazio generato dal vettore $(-1, -1, 1)$ e tale che

$$F(e_1 + e_3) = 5e_1 + 4e_2 + e_3,\ F(-e_2 + e_3) = 2e_1 + e_2 - e_3.$$

(a) Scrivere la matrice associata a $F$ nella base canonica.
(b) Determinare una base per l'immagine di $F$.
(c) Dire, giustificando la risposta, se $F$ è diagonalizzabile. In caso di risposta positiva trovare una matrice invertibile $C$ tale che $C^{-1} \cdot A \cdot C$ sia diagonale.

ESERCIZIO 2. Si considerino i seguenti spazi euclidei:

1. lo spazio $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare standard,
2. lo spazio $M_2(\mathbb{R})$ munito del seguente prodotto scalare $< A, B >:= Tr({}^tB \cdot A)$.

(a) Dire se la seguente base di $\mathbb{R}^3$, $\{v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (-1, -1, 1), v_3 = (0, -1, 1)\}$, è ortonormale. In caso contrario ortonormalizzarla.
(b) Sia $U$ il sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ generato da $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ o & 1 \end{pmatrix}$ e da $L = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Trovare la matrice di $U$ che meglio approssima la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

ESERCIZIO 3. Sia $\mathcal{C}$ una conica di $\mathbb{R}^2$ di equazione

$$x^2 - y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$$

(a) Dire se la conica è a centro oppure no.
(b) Nel caso in cui la conica è a centro, determinare le coordinate del centro.
(c) Ridurre $\mathcal{C}$ a forma canonica metrica.
(d) Determinare l'isometria che trasforma $\mathcal{C}$ nella forma canonica trovata.

II Verifica di Geometria A
Corso di Laurea in Matematica - Corso di Laurea in Fisica
18 dicembre 2014

Esercizio 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$x^2 - 2y^2 + 4xy - 2x + 1 = 0$$

(a) Determinare il tipo di conica.
(b) Se si tratta di conica a centro, determinare le coordinate del centro.
(c) Ridurre $\mathcal{C}$ a forma canonica metrica.
(d) Determinare l'isometria che trasforma $\mathcal{C}$ nella forma canonica trovata.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio $U$ generato dalle colonne della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base ortonormale di $U$.
(b) Scrivere equazioni cartesiane di $U^\perp$.
(c) Scrivere il vettore $u = (1, 1, 1, 1)) \in \mathbb{R}^4$ come somma di un vettore di $U$ e di un vettore di $U^\perp$.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita: $F(v_1) = e_1, F(v_2) = 2e_1 + 6e_2 - 2e_3, F(v_3) = 6e_2 - 2e_3$, dove $v_1 = (1, -1, 1), v_2 = (2, 1, 1), v_3 = (0, 1, 1)$.

(a) Scrivere la matrice $A$ associata a $F$ nella base canonica.
(b) Dire, giustificando la risposta, se $F$ è diagonalizzabile.
(c) Se $F$ è diagonalizzabile, determinare la matrice diagonalizzante.

II VERIFICA DI GEOMETRIA A
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - CORSO DI LAUREA IN FISICA
18 DICEMBRE 2013

ESERCIZIO 1. Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo così definito

$$F(e_1 + e_2) = e_1 - e_3,\ F(e_2 + e_3) = e_1 + e_2 - 3e_3,\ F(e_3) = e_1 - e_3$$

(a) Scrivere la matrice associata a $F$ nella base canonica.
(b) Determinare una base per il nucleo di $F$ e per l'immagine di $F$.
(c) Dire, giustificando la risposta, se $F$ è diagonalizzabile. In caso di risposta positiva trovare una matrice diagonalizzante.

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti vettori $v_1 = (1, -1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 1, 1)$.

(a) Dire se essi sono una base ortonormale per $\mathbb{R}^4$. In caso di risposta negativa, ortonormalizzare tale base.
(b) Scrivere equazioni cartesiane per il complemento ortogonale di $v = (-1, 1, 1, 1)$.
(c) Determinare la proiezione ortogonale di $w = (1, 2, 0, 1)$ sul sottospazio $U$ generato dai vettori $u_1 = (1, 1, 0, 0), u_2 = (1, -1, 1, -1)$.

ESERCIZIO 3. Sia $\mathcal{C}$ una conica di $\mathbb{R}^2$ di equazione

$$x^2 + y^2 - xy - 4x - 3 = 0$$

(a) Dire se la conica è a centro oppure no,
(b) Nel caso la conica sia a centro determinare le coordinate del centro.
(c) Ridurre $\mathcal{C}$ a forma canonica metrica.
(d) Determinare l'isometria che trasforma $\mathcal{C}$ nella forma canonica trovata.