I VERIFICA DI GEOMETRIA A
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - CORSO DI LAUREA IN FISICA
3 NOVEMBRE 2016

ESERCIZIO 1. Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x + hy + hz = h \\ -hx + y + hz = h \\ hx - hz = 1 \end{cases}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare, se esistono, valori del parametro $h \in \mathbb{R}$, per i quali il sistema è compatibile e in caso di sistema compatibile trovare la(e) soluzione(i) del sistema.
(b) Per i valori di h per i quali il sistema è compatibile stabilire se l'insieme S delle soluzioni è un sottospazio vettoriale.

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti sottospazi:

$$U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_2 - x_3 = x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0\},$$

$$W :=< v_1, v_2, v_3 >$$

dove $v_1 = (1, 1, -1, -1)$, $v_2 = (1, -1, 3, 2)$, $v_3 = (0, 0, 2, 1)$.

(a) Determinare una base per i sottospazi $U,\ W,\ U \cap W,\ U + W$.
(b) Scrivere le equazioni parametriche del sottospazio U.
(c) Estendere la base di U trovata a una base di $\mathbb{R}^4$.

ESERCIZIO 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino la retta $r : x - y - 1 = z = 0$ e il piano $\pi : x + 2y - z - 2 = 0$.

(a) Determinarela posizione della retta r rispetto al piano π.
(b) Determinare le equazioni cartesiane della retta r' proiezione ortogonale di r sul piano π.
(c) Determinare l'angolo convesso che la retta r forma con la retta r'.
(d) Determinare le equazioni parametriche della retta s che si ottiene per riflessione della retta r rispetto al piano π.

I VERIFICA DI GEOMETRIA A
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - CORSO DI LAUREA IN FISICA
11 NOVEMBRE 2015

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti sottospazi:

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 - x_2 + x_3 = 0\},$$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 = t,\ x_2 = 2s,\ x_3 = t + s,\ x_4 = -2t - s,\ t, s \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Determinare una base per i sottospazi $U,\ W,\ U \cap W,\ U + W$.
(b) Estendere la base di U trovata a una base di $\mathbb{R}^4$ e trovare le coordinate del vettore $v = (1, 1, 1, 1)$ in tale base.
(c) Scrivere le equazioni parametriche del sottospazio U.

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino le rette

$$r_1 : x + z - 1 = y - z = 0;\ \ r_2 : 3x + y - 2z - 2 = x - 3y + 2 = 0.$$

(a) Dire, giustificando la risposta, se le rette date sono complanari o meno.
(b) Determinare il punto di r_1 più vicino a r_2.
(c) Determinare l'angolo che la retta r_1 forma con il piano $\pi :\ x + y - z + 2 = 0$.
(d) Determinare la retta s parallela alla retta $x - 5 = y - z - 4 = 0$ e incidente sia la retta r_1 che la retta r_2.

ESERCIZIO 3. Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 2x + hy - z = 1 \\ hx - y + hz = h \\ x - hy + z = k \end{cases}$$

al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare, se esistono, valori dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$, per i quali il sistema è compatibile e in caso di sistema compatibile trovare le soluzioni del sistema.
(b) Per i valori di $h,\ k$ per i quali il sistema è compatibile stabilire se l'insieme S delle soluzioni è un sottospazio vettoriale.
(c) Descrivere l'insieme S da un punto di vista geometrico.

I VERIFICA DI GEOMETRIA A

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - CORSO DI LAUREA IN FISICA

12 NOVEMBRE 2014

ESERCIZIO 1. Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari omogeneo

$$\begin{cases} x + hy + hz = 0 \\ 2hx + y - hz = 0 \\ hy + hz = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare, al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, lo spazio delle soluzioni del sistema dato.

(b) Dire se esiste qualche valore di h per il quale la terna $(0, 1, -1)$ appartiene allo spazio delle soluzioni.

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti sottospazi:

$$U := \{(h, h+k, h-k, k) \in \mathbb{R}^4 |\, h, k \in \mathbb{R}\}$$

$$W := \{(a, b, a+c, c) \in \mathbb{R}^4 |\, a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

(a) Trovare una base di U e W, rispettivamente.

(b) Trovare una base di $U \cap W$ e scrivere equazioni parametriche e cartesiane di $U \cap W$.

(c) Determinare $\dim(U + W)$.

(d) Trovare un sottospazio supplementare a W.

ESERCIZIO 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si consideri la retta r passante per $P = (3, -1, 2)$ e con direzione quella individuata dal vettore $\vec{r} = (1, 1, 0)$ e la retta s di equazioni cartesiane $s : y = -2x + 5, z = x + 2$.

(a) Trovare la minima distanza tra la retta r e la retta s.

(b) Trovare i punti R e S sulle due rette tra loro più vicini.

(c) Dati i vettori $v = (1, 2, 3)$ e $w = (4, -1, 1)$, esprimere il vettore v nella forma $v = v_1 + v_2$ con v_1 parallelo a w e v_2 ortogonale a w

I VERIFICA DI GEOMETRIA A
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - CORSO DI LAUREA IN FISICA
13 NOVEMBRE 2013

ESERCIZIO 1. Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x + ky + z = h - 1 \\ -kx + z = 1 \\ x + ky + kz = h \end{cases}$$

(a) Determinare, se esistono, valori dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema è compatibile.
(b) Per i valori di h e k ottenuti al punto (a), determinare la(e) soluzione(i) del sistema.

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^5$ si considerino i seguenti vettori $v_1 = (1, -1, 1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 1, 0, 1)$, $v_3 = (1, 0, 0, 0, 1), v_4 = (0, 0, 1, 1, 1)$ e siano U e W i seguenti sottospazi:

$$U = \{(x_1, \cdots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_2 + x_5 = 0\},$$
$$W = < v_1, v_2, v_3, v_4 >, \text{ il sottospazio generato da } v_1, \cdots, v_4.$$

(a) Trovare una base per U e W.
(b) Trovare una base per $U + W$ e $U \cap W$, rispettivamente.
(c) Dire, giustificando la risposta, se U e W sono sottospazi supplementari.

ESERCIZIO 3. Siano $A = (0, 2, 1), B = (2, 3, 0), C = (2, 0, -1), D = (4, 1, -2) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Dopo aver verificato che i punti A, B, C, D appartengono allo stesso piano, scrivere le equazioni parametriche e cartesiane del piano α contenente i punti A, B, C, D.
(b) Scrivere le equazioni parametriche della retta r passante per il punto $P = (5, 1, 1)$ e perpendicolare al piano α.
(c) Determinare il punto della retta r più vicino all'origine.
(d) Determinare l'area del triangolo ABC