I VERIFICA DI GEOMETRIA 1
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - 4 DICEMBRE 2007

ESERCIZIO 1. Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 2x+ky+4z=h \\ 2x-2y+kz=0 \end{cases}$$

(a) Determinare, se esistono, valori dei parametri $h,k \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema è compatibile.
(b) Per i valori di h,k ottenuti al punto (a), determinare la(e) soluzione(i) del sistema.

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}[x]_{\leq 5}$, lo spazio dei polinomi di grado ≤ 5, si consideri l'insieme $U := \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 5} \,|\, p(x) = -p(-x)\}$.
(a) Verificare che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]_{\leq 5}$.
(b) Trovare una base per U e completare la base di U trovata a una base per $\mathbb{R}[x]_{\leq 5}$.
(c) Trovare un sottospazio di $\mathbb{R}[x]_{\leq 5}$ supplementare a U.

ESERCIZIO 3. In ciascuno dei seguenti casi si dica, giustificando la risposta, se l'affermazione è vera o falsa:
(a) Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora $A +{}^tA$ è simmetrica e $A -{}^tA$ non è antisimmetrica.
(b) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ esiste un intero $k \geq 1$ tale che $A^k = 0$.
(c) Ogni matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ può essere espressa come somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica.

ESERCIZIO 4. Nello spazio affine reale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino i piani $\pi_1 : x-y+z=0$, $\pi_2 : 2x+y+z+1=0$, $\pi_3 : x+z+2=0$.
(a) Dire se i piani dati appartengono o meno allo stesso fascio.
(b) Determinare la posizione della retta $r : x = 1+t, y = 2-2t, z = 1-4t$, rispetto al piano π_3.
(c) Scrivere le equazioni cartesiane della retta t passante per il punto $P = (1,-1,1)$ e complanare con la retta r e con la retta s, dove s è l'intersezione dei piani π_1 eπ_2.

I VERIFICA DI GEOMETRIA 1
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - 4 DICEMBRE 2007

ESERCIZIO 1. In ciascuno dei seguenti casi si dica, giustificando la risposta, se l'affermazione è vera o falsa:

(a) Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora $A - {}^tA$ è antisimmetrica e $A + {}^tA$ non è simmetrica.
(b) Ogni matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ può essere espressa come somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica.
(c) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ esiste un intero $k \geq 1$ tale che $A^k = 0$.

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}[x]_{\leq 5}$, lo spazio dei polinomi di grado ≤ 5, si consideri l'insieme $U := \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 5} \,|\, p(x) = p(-x)\}$.

(a) Verificare che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]_{\leq 5}$.
(b) Trovare una base per U e completare la base di U trovata a una base per $\mathbb{R}[x]_{\leq 5}$.
(c) Trovare un sottospazio di $\mathbb{R}[x]_{\leq 5}$ supplementare a U.

ESERCIZIO 3. Nello spazio affine reale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino i piani $\pi_1 : x - y + z = 0$, $\pi_2 : 2x - y + 2z + 2 = 0$, $\pi_3 : x + z + 2 = 0$.

(a) Dire se i piani dati appartengono o meno allo stesso fascio.
(b) Determinare la posizione della retta $r : 2x + y = 4, 4x + z = 5$, rispetto al piano π_3.
(c) Scrivere le equazioni cartesiane della retta t passante per il punto $Q = (0, 1, 2)$ e complanare con la retta r e con la retta s, dove s è l'intersezione dei piani π_1 e π_2.

ESERCIZIO 4. Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} hy + hz = k \\ x + 2y - hz = 1 \\ -x + hy + z = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare, se esistono, valori dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema è compatibile.
(b) Per i valori di h, k ottenuti al punto (a), determinare la(e) soluzione(i) del sistema.

II VERIFICA DI GEOMETRIA 1
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - 15 GENNAIO 2008

ESERCIZIO 1.

(a) Dire, giustificando la risposta, se è possibile trovare un isomorfismo tra i seguenti spazi vettoriali reali $M_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

Sia $F : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ l'applicazione lineare così definita

$$F(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = a + bx + dx^2$$

(b) Determinare il nucleo di F, l'immagine di F e le rispettive dimensioni.
(c) Dire, giustificando la risposta, se F è iniettiva e/o suriettiva.

ESERCIZIO 2. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo la cui immagine è generata dai vettori $(1,1,3), (0,1,1)$ e tale che $F(2e_2 - e_3) = e_1 - e_2 + e_3$, dove $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonca di $\mathbb{R}^3$.

(a) Scrivere la matrice A associata all'endomorfismo F nella base canonica.
(b) Dire, giustificando la risposta, se F è diagonalizzabile. In caso di risposta positiva determinare una matrice diagonale simile alla matrice A.
(c) Dopo aver verificato che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base per $\mathbb{R}^3$, dove $v_1 = (1,1,0), v_2 = (1,2,-1), v_3 = (-1,0,1)$, scrivere la matrice associata a F nella base $\mathcal{B}$.
(d) Dire, giustificando la risposta, se il sottospazio $S \subset \mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ è invariante rispetto a F, ossia se $F(S) = S$.

ESERCIZIO 3. Siano $P_1 = (0,0,0)$, $P_2 = (0,1,1)$, $P_3 = (1,0,1)$, $P_4 = (1,1,0)$, $Q_1 = (1,-1,1), Q_2 = (0,1,0)$, $Q_3 = (1,2,2), Q_4 = (-1,0,1)$ punti dello spazio affine $\mathcal{A}^3(\mathbb{R})$.

(a) Verificare che esiste ed è unica l'affinità $f : \mathcal{A}^3(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}^3(\mathbb{R})$ tale che $f(P_i) = Q_i$, per $i = 1,2,3,4$. Determinare le equazioni di f.
(b) Trovare i punti fissi di f.
(c) Dire se f fissa la retta r di equazioni parametriche: $x = 1 + t, y = t, z = -t$.

I Verifica di Geometria 1
Corso di Laurea in Matematica - 24 novembre 2008

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x+y+z=h \\ -2x+y-2hz=h \\ x-hy+hz=-h \end{cases}$$

(a) Determinare, se esistono, valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema è compatibile.
(b) Per i valori di h ottenuti al punto (a), determinare la(e) soluzione(i) del sistema.

Esercizio 2. Si consideri il seguente insieme

$$U := \{xp(x), p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}\}$$

(a) Provare che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.
(b) Trovare la dimensione di U.
(c) Dopo aver verificato che i polinomi $p_1(x) = x^3 + x$, $p_2(x) = x^3 - x^2$, $p_3(x) = x^3 + x^2 + x$, sono una base per U, trovare le coordinate in tale base del polinomio $q(x) = 2x + 3x^2 - x^3$.

Esercizio 3. Nello spazio affine reale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino le rette di equazioni cartesiane $r: x+y-1=0, y-2z=0,\ \ s: x+2y-z=0, 3y-z+2=0$.

(a) Determinare il piano π passante per r e parallelo alla retta s.
(b) Determinare la retta t passante per $P = (1,1,0)$ e incidente sia la retta r che la retta s.

Esercizio 4. Nell'insieme $M_n(\mathbb{R})$ si consideri la seguente relazione
$A \sim B$ se e solo se esiste una matrice $C \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che $B = C^{-1}AC$.

(a) Provare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
(b) Stabilire se le seguenti matrici sono equivalenti

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

II VERIFICA DI GEOMETRIA 1
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - 19 GENNAIO 2009

ESERCIZIO 1. Sia $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio dei polinomi di grado ≤ 3. Sia $F : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare così definita:

$$F(1-x+x^3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, F(x+x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$F(x^2-x^3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, F(x^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Verificare che una tale F è ben definita.
(b) Fissate le basi canoniche in $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ e $M_2(\mathbb{R})$, scrivere la matrice associata a F rispetto a tali basi.
(c) Trovare il nucleo e l'immagine di F e la dimensione di tali sottospazi.

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^3$ si consideri la base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ e la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, dove $v_1 = (1, -1, 3), v_2 = (-1, 1, 1), v_3 = (0, 1, 1)$. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo così definito

$$F(v_1) = 3e_1 - 2e_2 + 3e_3,\ F(v_2) = e_1 - 2e_2 + e_3,\ F(v_3) = 2e_1 - e_2 + 2e_3$$

(a) Scrivere la matrice A associata all'endomorfismo F nella base canonica.
(b) Trovare autovalori e autovettori di F.
(c) Dire, giustificando la risposta, se F è diagonalizzabile. In caso di risposta negativa trovare una forma canonica di Jordan di A.

ESERCIZIO 3. Siano $P_1 = (1, 2, 0),\ P_2 = (1, 3, 1),\ Q_1 = (2, -1, 1), Q_2 = (3, -1, 0)$, punti dello spazio affine $\mathcal{A}^3(\mathbb{R})$ e sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(a) Determinare le equazioni dell'affinità $f : \mathcal{A}^3(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}^3(\mathbb{R})$ che soddisfa le seguenti proprietà: $f(P_i) = Q_i$, per $i = 1, 2$ e $\varphi(e_1) = e_1 + e_3$, $\varphi(e_2) = e_1 - e_2$, dove $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è l'isomorfismo associato all'affinità f.
(b) Trovare i punti fissi di f.

ESERCIZIO 4. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ riferito alla sua base canonica si consideri la forma quadratica $Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

(a) Scrivere la matrice associata a Q nella base canonica.
(b) Determinare una sua forma canonica e la base rispetto alla quale Q assume la forma canonica trovata.

I VERIFICA DI GEOMETRIA 1
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - 6 DICEMBRE 2010

ESERCIZIO 1. Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari omogeneo

$$\begin{cases} x + y - hz = 0 \\ 2x + hy + hz = 0 \\ x - hy - hz = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare, al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema dato.
(b) Dire se esiste qualche valore di h per il quale la terna $(0, 1, -1)$ appartiene allo spazio delle soluzioni.

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ si considerino i polinomi $p_1(x) = x^3 + x,\ p_2(x) = x^3 - x^2$.
(a) Trovare una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ che contenga i polinomi $p_1(x)$ e $p_2(x)$, ma non contenga polinomi lineari.
(b) Scrivere il vettore $1 - x + 3x^2 + x^3$ nella base trovata.
(c) Sia $U := \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \,|\, p(0) = p(2) = 0\}$. Dopo aver verificato che U è un sottospazio di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$, trovare la dimensione di U.

ESERCIZIO 3. Nello spazio affine reale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si consideri la retta r passante per il punto $P = (-1, 3, 1)$ e con direzione quella individuata dal vettore $\vec{r} = (0, 2, 5)$.
(a) Dire, giustificando la risposta, se il piano $\pi : x - y + z = 1$ appartiene al fascio di piani individuato dalla retta r.
(b) Sia s la retta di equazioni $s : x - y + z - 4 = x + z = 0$. Determinare la posizione della retta s rispetto al piano π e rispetto alla retta r.

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio U generato dai vettori $u_1 = (1, 0, -3, 1)$, $u_2 = (4, 0, -5, 2), u_3 = (3, 0, -2, 1)$ e il sottospazio W generato dai vettori $w_1 = (-2, 0, -1, 0)$, $w_2 = (1, 0, 1, 2), w_3 = (1, 1, 1, 1)$.
(a) Dire se i vettori u_1, u_2, u_3 sono una base per U.
(b) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane per U e W, rispettivamente.
(c) Determinare una base per $U \cap W$.

II VERIFICA DI GEOMETRIA 1
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - 27 GENNAIO 2011

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^3$ si consideri la base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo così definito $F(e_1) = 2e_1 + 5e_2$ e $F(\mathbb{R}^3) = < u_1, u_2 >$, dove $< u_1, u_2 >$ denota lo spazio generato dai vettori, $(u_1) = (1, 2, -1)$ e $u_2 = (0, 1, 2)$.

(a) Scrivere la matrice A associata all'endomorfismo F nella base canonica.
(b) Scrivere la matrice associata all'endomorfismo F nella base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, dove $v_1 = (1, -1, 3), v_2 = (1, -2, -1), v_3 = (0, 1, 1)$.
(c) Trovare una base per il nucleo di F.
(d) Dire, giustificando la risposta, se F è diagonalizzabile. In caso di risposta positiva trovare una base diagonalizzante.

ESERCIZIO 2. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino le seguenti quaterne di punti $P_0 = (0, 0, 0), P_1 = (1, 2, -1), P_2 = (1, -1, 1), P_3 = (4, 0, 0), Q_0 = (1, -1, -1), Q_1 = (3, 0, -3), Q_2 = (0, 0, 2), Q_3 = (1, 3, 3)$.

(a) Verificare che esiste un'unica affinità $f : \mathcal{A}^3(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}^3(\mathbb{R})$ tale che $f(P_i) = Q_i$, per $i = 0, 1, 2, 3$.
(b) Determinare le equazioni dell'affinità f.
(c) Trovare i punti fissi di f.
(d) Determinare l'immagine, tramite f, della retta r avente per direzione quella individuata dal vettore $\vec{r} = (1, -1, -1)$ e passante per l'origine.

ESERCIZIO 3. Determinare la forma canonica di Jordan della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & -1 \\ -6 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

I VERIFICA GEOMETRIA I

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - 28 NOVEMBRE 2011

ESERCIZIO 1. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$, $X_1 = (1, -1, 2), X_2 = (0, 1, 1)$, $X_3 = (1, 1, 1)$ e la seguente matrice in $M_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Dire, giustificando la risposta, se $\{X_1, X_2, X_3\}$ è una base per $\mathbb{R}^3$.

(b) Dire se $\{AX_1,\ AX_2,\ AX_3\}$ è una base per $\mathbb{R}^3$. In caso di risposta negativa completarli a una base per $\mathbb{R}^3$.

(c) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane per il sottospazio U generato dai vettori $AX_1,\ AX_2,\ AX_3$.

(d) Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $w_1 = (1, -1, -1), w_2 = (1, 2, 1)$. Trovare una base per i sottospazi $U \cap W$ e $U + W$.

ESERCIZIO 2. Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari omogeneo

$$\begin{cases} x + ay + bz = 0 \\ -ax + y + cz = 0 \\ -bx - cy + z = 0 \end{cases}$$

Determinare, al variare dei parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$, lo spazio delle soluzioni del sistema dato.

ESERCIZIO 3. Nello spazio affine reale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si consideri la retta r di equazioni

$$r : x + y - z - 4 = x + z = 0.$$

(a) Determinare un vettore direttore di r.

(b) Determinare equazioni parametriche e cartesiane del piano π contenente la retta r e passante per il punto $A = (1, 2, 0)$.

(c) Sia s la retta di equazioni $s : 2x + y - 4 = z = 0$. Determinare la posizione della retta s rispetto al piano π e rispetto alla retta r.

II VERIFICA DI GEOMETRIA I
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - 23 GENNAIO 2012

ESERCIZIO 1. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avente come nucleo il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (1,1,1)$ e $v_2 = (0,1,1)$ e tale che $F(v_3) = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, dove $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $v_3 = (1,0,-1)$.

(a) Scrivere la matrice A associata all'endomorfismo F nella base canonica.
(b) Trovare una base per l'immagine di F.
(c) Dire, giustificando la risposta, se F è diagonalizzabile. In caso di risposta positiva trovare una matrice C tale che $C^{-1}AC$ sia una matrice diagonale.
(d) Dopo aver stabilito che i vettori $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono una base per $\mathbb{R}^3$, scrivere la matrice del cambio di coordinate dalla base canonica alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

ESERCIZIO 2. Sia $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ lo spazio affine 3-dimensionale e sia $f : \mathcal{A}^3(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}^3(\mathbb{R})$ un'affinità.

(a) Siano r, s due rette in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Provare che se r e s sono parallele allora anche $f(r)$ e $f(s)$ sono parallele.
(b) In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si consideri il piano $\pi : x + y + z - 1 = 0$. Determinare l'equazione di ogni affinità $f : \mathcal{A}^3(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}^3(\mathbb{R})$ che fissa i punti di π.
(c) Dire se tra le affinità f determinate al punto (b) esistono delle traslazioni.
(d) Dire se tra le affinità f determinate al punto (b) esistono quelle che mandano il punto $A = (1,1,0)$ nel punto $B = (1,1,1)$.

ESERCIZIO 3. Determinare la forma canonica di Jordan della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$