PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA A - 2 SETTEMBRE 2015

ESERCIZIO 1. Nello spazio $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti vettori

$$u_1 = (1, 0, 0, 1), \quad u_2 = (1, -1, 1, -1), \quad u_3 = (1, 1, -1, 3)$$

e sia U il sottospazio generato da essi.

(a) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane di U.
(b) Determinare la dimensione di U.
(c) Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x - y + z + t = 0$. Determinare una base per il sottospazio $U \cap W$.

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino i punti $A = (0, 1, 1)$, $B = (1, -1, 2)$, $C = (2, 0, 1)$.

(a) Dopo aver verificato che i punti non sono allineati, scrivere un'equazione cartesiana del piano π che li contiene.
(b) Determinare l'area del triangolo individuato dai punti A, B, C.
(c) Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ che contiene i vettori $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ e stabilire se essa è ortonormale, in caso contrario ortonormalizzarla.

ESERCIZIO 3. Nel piano euclideo $\mathbb{R}^2$ si consideri la conica $\mathcal{C}$ di di equazione

$$x^2 - 2y^2 + 4xy + 4x + 2y = 0$$

(a) Dire se la conica è a centro oppure no,
(b) Nel caso la conica sia a centro determinare le coordinate del centro.
(c) Determinare una forma canonica di $\mathcal{C}$.
(d) Determinare un'isometria che trasformi $\mathcal{C}$ in forma canonica.

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare gli autovalori della matrice matrice A e i relativi autospazi.
(b) Dire se la matrice A è diagonalizzabile, in caso di risposta negativa trovare una sua forma canonica di Jordan.

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA A - 7 LUGLIO 2015

ESERCIZIO 1. Nello spazio delle matrici reali $M_3(\mathbb{R})$ si consideri l'insieme

$$U := \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid B \cdot A = 0\}$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Verificare che U è un sottospazio di $M_3(\mathbb{R})$.
(b) Determinare la dimensione di U.
(c) Dire, giustificando la risposta, se il sottospazio U e il sottospazio delle matrici simmetriche di $M_3(\mathbb{R})$ sono supplementari.

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$

(a) scrivere le equazioni parametriche e cartesiane del piano π passante per $A = (1, -1, 0)$ e perpendicolare alla retta r di equazioni $2x-3y+z = 0, x-2y+2z = 0$;
(b) determinare la proiezione ortogonale della retta s passante per $P = (1, 1, 1)$ e avente come direzione quella individuata dal vettore $\vec{s} = (1, 0, 1)$ sul piano π individuato al punto (a);
(c) determinare l'angolo che la retta s forma col piano π.

ESERCIZIO 3. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita

$$F(x, y, z) = (2x + 3y - 3z,\ 2x + y - 2z,\ x - y + 2z)$$

(a) Scrivere la matrice associata a F nella base $v_1 = (-1, 2, 1)$, $v_2 = (3, 2, 1)$, $v_3 = (0, 1, 2)$.
(b) Dire, giustificando la risposta, se F è iniettiva e/o suriettiva.
(c) Trovare gli autovalori di F e i relativi autospazi.

ESERCIZIO 4. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la seguente forma quadratica

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2kx_1x_3 + kx_3^2$$

(a) Determinare, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la $Q(x_1, x_2, x_3)$ è non degenere.
(b) Dire se esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $Q(x_1, x_2, x_2)$ è definita positiva.
(c) Per $k = 1$, ridurre Q a una forma canonica.

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA A - 24 SETTEMBRE 2014
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - CORSO DI LAUREA IN FISICA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti sottospazi

$$U := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z = 0\},$$

$$W := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 2s_1 + 3s_2, y = s_1, z = s_2, t = -s_1 + 2s_2, \text{con } s_1, s_2 \in \mathbb{R}\}$$

(a) Determinare una base per i sottospazi U e W, rispettivamente.
(b) Scrivere equazioni parametriche di $U \cap W$.
(c) Determinare una base per $U + W$.
(d) Dire, giustificando la risposta se $U + W$ è una somma diretta.

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino i punti $A = (1, 0, -1)$, $B = (2, 3, 1)$ e $C = (3, 0, 2)$.

(a) Stabilire se i punti A, B, C individuano un triangolo. In caso di risposta positiva determinare l'area del triangolo e dire se esso è un triangolo rettangolo.
(b) Determinare la retta r passante per il punto C e perpendicolare al piano π passante per i punti A, B, C.
(c) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane del piano π.

ESERCIZIO 3. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l' applicazione lineare la cui matrice nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la matrice associata a F nella base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, dove $v_1 = (1, -1, 3)$, $v_2 = (1, 2, 1)$, $v_3 = (1, -1, 1)$.
(b) Trovare gli autovalori di F e una base per i relativi autospazi.
(c) Dire se A è diagonalizzabile. In caso di risposta positiva scrivere la matrice associata a F in una base di autovettori.

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA A - 2 LUGLIO 2014

ESERCIZIO 1. Nello spazio $M_2(\mathbb{R})$ si considerino i seguenti sottospazi

$$U =< \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} >$$

e

$$W := \{A \in M_2(\mathbb{R}) | \text{ le righe di } A \text{ hanno la stessa somma}\}$$

(a) Determinare la dimensione e una base di $U, W, U + W$ e $U \cap W$, rispettivamente.
(b) Completare la base di U trovata in (a) a una base per $M_2(\mathbb{R})$.

ESERCIZIO 2. Si consideri lo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$.

(a) Scrivere un'equazione cartesiana della retta r passante per il punto $A = (1, 1, 0)$ e perpendicolare al piano π di equazione $x + y + z - 3 = 0$.
(b) Determinare una base ortonormale della giacitura di π e completarla a una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.
(c) Determinare l'area del triangolo individuato dai punti $L = (1, 1, 2), M = (0, 1, -1)$, $N = (2, 3, 5)$.

ESERCIZIO 3. Si consideri lo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'affinità così definita:

$$f((x, y, z)) = (x + 1, \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z, \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z + 1)$$

(a) Dire, giustificando la risposta, se f è un'isometria.
(b) Siano $A = (1, -1, 0), B = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Trovare la distanza $d(f(A), f(B))$.
(c) Dire, giustificando la risposta, se f ha punti fissi e in caso di risposta positiva trovarli.

ESERCIZIO 4. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$F((1, 1, 1)) = (-4, 6, 4), F((0, 1, 1)) = (-2, 3, 2), F((1, 1, 0)) = (-1, 2, 1).$$

(a) Scrivere le matrici A, B, associate a F rispettivamente nella base canonica e nella base $\mathscr{B} = \{(-1, 1, 1), (-1, 0, 1), (-3, -4, 1)\}$.
(b) Trovare gli autovalori e i relativi autospazi.
(c) Dire se A è diagonalizzabile. In caso di risposta negativa scrivere una forma canonica di Jordan della matrice A.