

APPUNTI DEL CORSO DI GEOMETRIA A

MARIA LUCIA FANIA

A.A. 2023-2024

Indice

1 Spazio dei vettori geometrici	7
1.1 Vettori geometrici	7
1.2 Lo spazio dei vettori geometrici	9
1.2.1 Proprietà della somma e del prodotto per uno scalare	10
1.3 Lo spazio vettoriale \mathbb{R}^n	12
1.3.1 Esercizi	12
1.4 Altri esempi di spazi vettoriali reali	13
2 Matrici e Sistemi di equazioni	15
2.1 Matrici	15
2.2 Prodotto tra matrici	18
2.3 Esercizi	19
2.4 Matrici elementari	20
2.5 Algoritmo di Gauss	21
2.5.1 Esercizi	24
2.6 Sistemi di equazioni lineari	25
2.6.1 Esercizi	29
2.7 Sistemi omogenei	30
2.7.1 Esercizi	31
2.8 Algoritmo per il calcolo di A^{-1}	31
2.8.1 Descrizione algoritmo per il calcolo di A^{-1}	33
2.9 Determinanti	34
2.9.1 Determinante del prodotto	39
2.9.2 Significato geometrico del determinante	41
2.9.3 Esercizi	42
3 Spazi Vettoriali e Basi	45
3.1 Sottospazi vettoriali	46
3.2 Basi	48
3.3 Come selezionare da $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base per il sottospazio $L(B)$?	50
3.4 Completamento a una base	51
3.5 Equazioni parametriche e cartesiane	51
3.6 Relazione di Grassmann	53
3.7 Spazio righe (colonne) di una matrice	55

3.8	Esercizi	57
4	Applicazioni lineari	61
4.1	Applicazioni lineari	61
4.1.1	Esempi di trasformazioni geometriche del piano	61
4.1.2	Esempi di applicazioni lineari	62
4.1.3	Alcune proprietà delle applicazioni lineari	65
4.1.4	Esercizi	66
4.2	Matrice di un'applicazione lineare	66
4.3	Cambi di Base	69
4.3.1	Algoritmo per calcolare $M_{\mathbf{b}}^{\mathbf{v}}(id)$	71
4.3.2	Esercizi	72
4.4	Matrice di applicazioni in basi diverse	73
4.4.1	Esercizi	76
4.5	Funzionali lineari	77
4.6	Diagonalizzazione di endomorfismi	79
4.6.1	Esercizi	87
4.7	Forma canonica di Jordan	92
4.7.1	Endomorfismi (o matrici) nilpotenti	93
4.7.2	Forma canonica di Jordan di un endomorfismo nilpotente	94
4.7.3	Forma canonica di Jordan di un endomorfismo qualunque	99
5	Spazi Vettoriali Euclidei	111
5.1	Prodotto scalare standard in \mathbb{R}^n	111
5.1.1	Proprietà del prodotto scalare standard	111
5.2	Gli spazi euclidei $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$	112
5.2.1	Lunghezza di un vettore	112
5.2.2	Ortogonalità di vettori	112
5.2.3	Proiezione di vettori	113
5.2.4	Angolo tra vettori	114
5.3	Prodotto vettoriale	114
5.3.1	Proprietà del prodotto vettoriale	114
5.3.2	Significato geometrico di $\ v \wedge w\ $	116
5.3.3	Prodotto misto e suo significato geometrico	116
5.4	Lo spazio euclideo \mathbb{R}^n	117
5.5	Algoritmo di Gram-Schmidt	121
5.6	Basi ortonormali e matrici ortogonali	123
5.7	Complemento ortogonale	123
5.7.1	Esercizi	125
5.8	Prodotto scalare	126
6	Rette e Piani nello Spazio	129
6.1	Geometria affine	129
6.1.1	Equazione vettoriale, equazioni parametriche e cartesiane di rette nello spazio	129

6.1.2	Equazione vettoriale, equazioni parametriche e cartesiane di piani nello spazio	131
6.1.3	Equazioni cartesiane di piani e rette particolari	133
6.1.4	Condizione di allineamento di 3 punti e di complanarità di 4 punti	135
6.1.5	Condizioni algebriche di parallelismo tra due piani e tra retta e piano	136
6.1.6	Fasci di Piani	137
6.1.7	Esercizi	138
6.2	Geometria Euclidea	140
6.2.1	Condizioni algebriche di ortogonalità tra due rette, tra due piani, tra retta e piano	141
6.2.2	Distanza di un punto da un piano	142
6.2.3	Distanza di un punto da una retta	144
6.2.4	Minima distanza tra due rette sghembe	145
6.2.5	Angolo convesso tra due piani	146
6.2.6	Angolo convesso tra due rette orientate	146
6.2.7	Angolo convesso tra una retta e un piano	147
6.2.8	Esercizi	147
7	Matrici Complesse	149
7.1	Matrici Hermitiane	149
7.2	Prodotto hermitiano standard in \mathbb{C}^n	150
7.2.1	Proprietà del prodotto hermitiano standard	151
7.3	Diagonalizzazione Unitaria	153
7.3.1	Esercizi	153
8	Spazi Affini e Spazi Euclidei	155
8.1	Spazi Affini	155
8.2	Affinità	156
8.2.1	Affinità di $\mathcal{A}^n(\mathbb{K})$	157
8.2.2	Altri esempi di affinità	158
8.2.3	Alcune proprietà delle affinità	159
8.2.4	Esercizi	161
8.3	Spazi Euclidei	161
8.3.1	Isometrie del piano	163
9	Coniche	165
9.1	Equazione generale di una conica in \mathbb{R}^2	166
9.1.1	Classificazione affine e metrica di una conica	166
9.1.2	Alcune proprietà metriche e affini delle coniche	168
9.1.3	Complementi: Piano affine ampliato	169
9.1.4	Forme canoniche affini di coniche reali	170
9.1.5	Forme canoniche metriche di coniche reali	172
9.1.6	Invarianti ortogonali di una conica non degenera	174
9.1.7	Conica come luogo geometrico: eccentricità	182

9.2	Equazioni di coniche con date condizioni	183
9.2.1	Coniche con date condizioni col metodo del fascio	184
9.3	Coniche nel piano proiettivo	185
9.3.1	Polarità definita da una conica	185
10	Forme bilineari e quadratiche	191
10.1	Forme bilineari	191
10.2	Forme quadratiche	194
10.3	Diagonalizzazione forme quadratiche	194
10.3.1	Diagonalizzazione di una forma quadratica col metodo di Lagrange	195
10.3.2	Esercizi	202
10.4	Classificazione proiettiva delle coniche	203
10.5	Quadriche in \mathbb{R}^3	205
10.6	Equazione generale di una quadrica in \mathbb{R}^3	205
10.6.1	Forma canonica metrica di quadriche non degeneri	208
10.6.2	Alcune considerazioni	211
10.6.3	Forma canonica metrica di quadriche semplicemente degeneri	216
10.6.4	Quadriche doppiamente degeneri	220
10.6.5	Quadriche triplamente degeneri	221
10.6.6	Schema per la classificazione delle quadriche	221
11	Appendice	223
11.1	Campi	223
11.1.1	I numeri complessi	224
11.1.2	Rappresentazione geometrica dei numeri complessi	225
11.1.3	Esercizi	228
11.2	Applicazioni e Relazioni	228
11.2.1	Esercizi	233
11.3	Induzione Matematica	235
11.3.1	Assioma del Buon Ordinamento :	235
11.3.2	Esercizi	237
11.4	Gruppo delle permutazioni	238
	Bibliografia	241
	Indice analitico	243

Capitolo 1

Spazio dei vettori geometrici e

\mathbb{R}^n

In matematica si incontrano spesso oggetti matematici che possono essere sommati tra loro o moltiplicati per uno scalare, ossia numero reale (complesso, o di un qualunque altro campo \mathbb{K}). Se queste operazioni di somma e di prodotto per uno scalare soddisfano certi assiomi allora diciamo che l'insieme di tali oggetti matematici ha una struttura di spazio vettoriale.

1.1 Vettori geometrici

Sappiamo che esistono quantità che sono completamente individuate da un numero, ad esempio *la massa, la pressione, la temperatura, ecc.* Tali quantità sono dette *scalari*. Esistono anche quantità fisiche (e.s. *forza, velocità, ecc.*) che per essere individuate non basta solo uno scalare, ma serve anche un verso e una direzione. Tali quantità sono dette *vettoriali*. La nozione di vettore è sorta proprio dall'esigenza di rappresentare quantità fisiche che hanno intensità, verso, direzione.

Siano A, B punti distinti del piano (o dello spazio). Il segmento orientato con punto iniziale A e punto finale B è detto *vettore applicato*. Dato un segmento orientato \overline{AB} , con A distinto da B , ad esso restano associati, uno scalare che è dato dalla lunghezza (o modulo) del segmento, un verso, e una direzione che è quella della retta individuata dai punti A e B . La lunghezza (o modulo) del segmento orientato \overline{AB} viene denotata con $|\overline{AB}|$.

Indichiamo con \mathcal{S} l'insieme di tutti i vettori applicati del piano o dello spazio. In tale insieme definiamo una relazione, in simboli \sim , detta *relazione di equipollenza*, che dice quando due segmenti orientati sono in relazione tra loro.

Definizione 1.1.1 Siano \overline{AB} e $\overline{CD} \in \mathcal{S}$ due segmenti orientati. Diciamo che \overline{AB} è *equipollente* a \overline{CD} , in notazione $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, se essi hanno la stessa lunghezza, lo stesso verso e la stessa direzione.



Figura 1.1: vettori equipollenti e non

Osservazione 1.1.2 Sia \mathcal{S} l'insieme di tutti i possibili vettori applicati del piano o dello spazio. La relazione di equipollenza in \mathcal{S} , in un certo qualsenso, divide l'insieme \mathcal{S} di tutti i possibili vettori applicati del piano o dello spazio in tanti cassettei, in ognuno dei quali ci sono vettori applicati equipollenti tra loro. Se consideriamo i vettori applicati in Figura 1.2 vediamo che \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{DE} vanno tutti nello stesso cassetto, il quale verrà denotato con il simbolo \overrightarrow{OA} ; il vettore applicato \overrightarrow{OM} va in un altro cassetto denotato con il simbolo \overrightarrow{OM} ; e \overrightarrow{ON} in un altro cassetto diverso dai due precedenti.

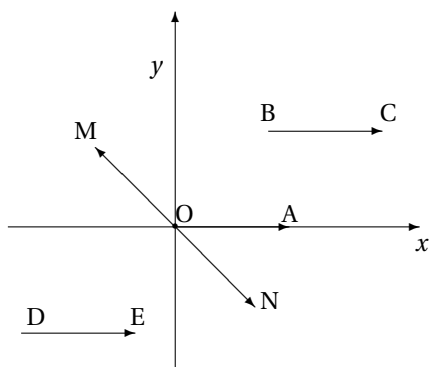


Figura 1.2: vettori applicati del piano

Osservazione 1.1.3 La relazione di equipollenza, \sim , è una relazione di equivalenza (vedi 1.1.2).

Definizione 1.1.4 Dato il segmento orientato \overrightarrow{AB} , la classe di equipollenza, $[\overrightarrow{AB}]$, individuata da \overrightarrow{AB} è indicata col simbolo \overrightarrow{AB} e viene detta *vettore geometrico* (o semplicemente *vettore*).

Dunque \overrightarrow{AB} è l'insieme di tutti i segmenti orientati equipollenti a \overrightarrow{AB} . Osserviamo che come rappresentante per ogni classe di equipollenza possiamo prendere i vettori applicati aventi tutti lo stesso punto di applicazione, sia esso O, l'origine del riferimento cartesiano. Per esempio in Figura 1.2. i vettori applicati \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{BC} , $\overrightarrow{DE} \in [\overrightarrow{OA}] = \overrightarrow{OA}$.

Il vettore la cui classe di equipollenza è $[\overrightarrow{AA}] = [\overrightarrow{OO}]$ viene detto *vettore nullo* e viene indicato con $\vec{0}$. Ovviamente il vettore nullo ha modulo uguale a zero e il verso e la direzione non sono determinati.

1.2 Lo spazio dei vettori geometrici

Indichiamo con V l'insieme di tutti i vettori geometrici (del piano o dello spazio), ossia $V := \mathcal{S}/\sim$. In V definiamo due operazioni: quella di *somma* e quella di *prodotto per uno scalare*.

Definiamo la *somma* di due vettori. Siano $\vec{OA}, \vec{OB} \in V$.

- Se i due vettori sono non paralleli allora la somma la facciamo secondo la regola del parallelogramma

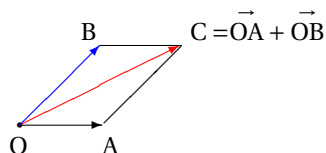


Figura 1.3: somma di due vettori non paralleli \vec{OA} e \vec{OB}

Osservazione 1.2.1 Notiamo che il vettore $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$, somma di due vettori non paralleli può essere ottenuto anche nel modo seguente: posizioniamo il vettore \vec{OB} in modo tale che esso abbia A come punto di applicazione e sia equipollente a \vec{OB} . Sia quindi $\vec{AC} \sim \vec{OB}$, ossia \vec{AC} è un altro rappresentante per \vec{OB} , vedi (2) in Figura 1.4. Allora il vettore \vec{OC} in (3), Figura 1.4, è il vettore somma $\vec{OA} + \vec{OB}$.

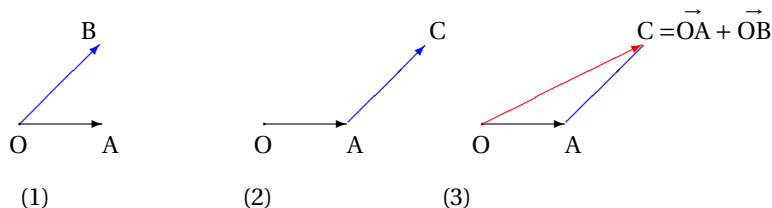


Figura 1.4: modo equivalente per sommare i due vettori non paralleli \vec{OA} e \vec{OB}

- Se i vettori sono paralleli, ossia stanno sulla stessa retta, è chiaro che essi non individuano un parallelogramma, ma quanto detto nell'osservazione 1.2.1 va bene anche in questo caso, ovvero la somma dei vettori paralleli \vec{OA} e \vec{OB} si ottiene posizionando il vettore \vec{OB} in modo tale che esso abbia A come punto di applicazione e sia equipollente a \vec{OB} . Sia quindi $\vec{AC} \sim \vec{OB}$, (\vec{AC} è un altro rappresentante per \vec{OB}), vedi (1) in Figura 1.5. Pertanto il vettore \vec{OC} è il vettore somma $\vec{OA} + \vec{OB}$.

Dato uno scalare $k \in \mathbb{R}$ e un vettore \vec{OA} definiamo il *prodotto per uno scalare* $k \vec{OA}$ come il vettore con punto di applicazione O avente: la stessa direzione di \vec{OA} , la

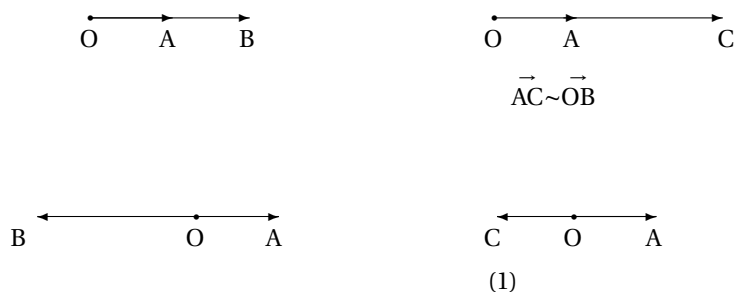


Figura 1.5: \vec{OC} =somma dei due vettori paralleli \vec{OA}, \vec{OB}

lunghezza è uguale alla lunghezza di \vec{OA} moltiplicato per $|k|$ e il verso coincide con quello di \vec{OA} se $k > 0$ è opposto a quello di \vec{OA} se $k < 0$

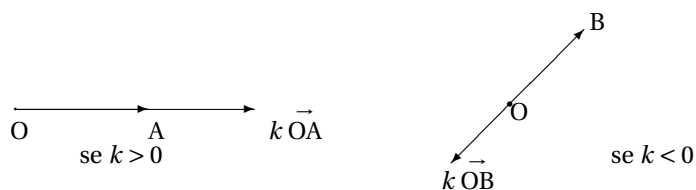


Figura 1.6: prodotto di \vec{OA} per uno scalare k

1.2.1 Proprietà della somma e del prodotto per uno scalare

L'operazione di somma gode delle seguenti proprietà:

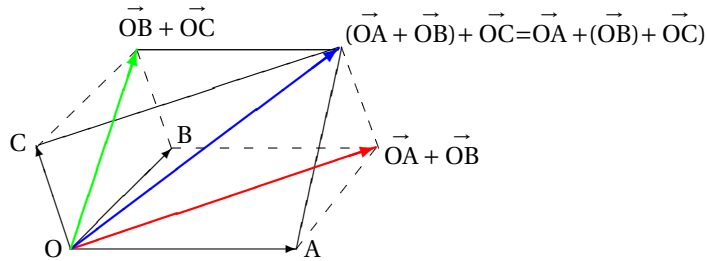
(V1) (*commutativa*) $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OB} + \vec{OA}$, per ogni $\vec{OA}, \vec{OB} \in V$

(V2) (*associativa*) $(\vec{OA} + \vec{OB}) + \vec{OC} = \vec{OA} + (\vec{OB} + \vec{OC})$, per ogni $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC} \in V$

(V3) (*esistenza del vettore nullo*) $\vec{OA} + \vec{0} = \vec{OA}$, per ogni $\vec{OA} \in V$,

(V4) (*esistenza dell'opposto*) $\vec{OA} + (-\vec{OA}) = \vec{0}$, per ogni $\vec{OA} \in V$.

Vediamo graficamente la proprietà associativa della somma di vettori.



L'operazione di *prodotto per uno scalare* gode delle seguenti proprietà:

- (V5) (*distributiva rispetto alla somma di vettori*) $k(\vec{OA} + \vec{OB}) = k\vec{OA} + k\vec{OB}$, per ogni $\vec{OA}, \vec{OB} \in V$ e per ogni $k \in \mathbb{R}$.
- (V6) (*distributiva rispetto alla somma di scalari*) $(k + h)\vec{OA} = k\vec{OA} + h\vec{OA}$, per ogni $\vec{OA} \in V$ e per ogni $k, h \in \mathbb{R}$.
- (V7) $(kh)\vec{OA} = k(h\vec{OA})$, per ogni $\vec{OA} \in V$ e per ogni $k, h \in \mathbb{R}$.
- (V8) $1\vec{OA} = \vec{OA}$, per ogni $\vec{OA} \in V$.

Vediamo graficamente la proprietà distributiva rispetto alla somma di vettori. Se per esempio $k = 2$, allora $2(\vec{OA} + \vec{OB}) = 2\vec{OA} + 2\vec{OB}$.

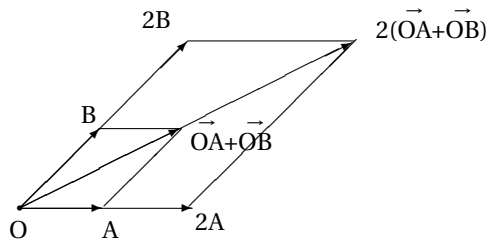
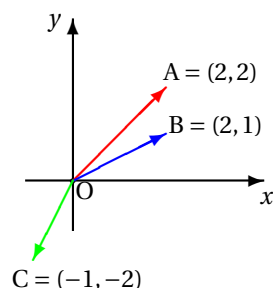


Figura 1.7: proprietà distributiva rispetto alla somma di vettori

La terna $(V, +, \cdot)$ è detta *spazio vettoriale* sul campo \mathbb{R} , o anche *spazio vettoriale reale*, questo per indicare che gli scalari col quale moltiplichiamo i vettori sono numeri reali.

Osservazione 1.2.2 Fissato un riferimento cartesiano nel piano e nello spazio noi possiamo dare un vettore \vec{OA} dando le coordinate del punto finale A. Se consideriamo i seguenti punti del piano $A = (2, 2), B = (2, 1), C = (-1, -2)$, i vettori $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ sono rappresentati in figura



Esiste quindi una corrispondenza 1 a 1 tra l'insieme V_2 dei vettori del piano con punto di applicazione l'origine e le coppie di numeri reali, ossia $V_2 \xleftrightarrow{1-1} \mathbb{R}^2$.

Similmente esiste una corrispondenza 1 a 1 tra l'insieme V_3 dei vettori dello spazio con punto di applicazione l'origine e le terne di numeri reali, ossia $V_3 \xleftrightarrow{1-1} \mathbb{R}^3$.

1.3 Lo spazio vettoriale \mathbb{R}^n

Esempio 1.3.1 Sia \mathbb{R} il campo dei numeri reali. La terna $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, con le usuali operazioni di somma e prodotto è uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{R} .

Esempio 1.3.2 Consideriamo il prodotto cartesiano di \mathbb{R} con se stesso n -volte, ossia l'insieme delle n -uple ordinate $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$. Definiamo in \mathbb{R}^n un'operazione di somma

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \rightarrow (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) := (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

e un'operazione di prodotto per uno scalare $k \in \mathbb{R}$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(k, (a_1, \dots, a_n)) \rightarrow k(a_1, \dots, a_n) := (ka_1, \dots, ka_n)$$

Si verifica facilmente che le proprietà (V1) – (V8) sono soddisfatte e quindi la terna $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{R} .

1.3.1 Esercizi

1. Siano $A = (2, 1), B = (1, 3)$ punti di \mathbb{R}^2 e sia $C = xA + yB$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Disegnare il vettore geometrico C (con punto di applicazione l'origine) per $x = 2, y = -3$.
2. Descrivere l'insieme dei punti C al variare di $x, y \in \mathbb{R}$ con $x + y = 1$.
3. Descrivere l'insieme dei punti C al variare di $x, y \in \mathbb{R}$ quando $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$.

1.4 Altri esempi di spazi vettoriali reali

Diamo ora altri due esempi di spazi vettoriali reali.

Esempio 1.4.1 Sia $\mathbb{R}[x]$ l'insieme dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti in \mathbb{R} . Un polinomio $p(x)$ è un'espressione del tipo

$$p(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

In $\mathbb{R}[x]$ definiamo l'operazione di somma e di prodotto per uno scalare. Dati due polinomi $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $q(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j \in \mathbb{R}[x]$ e dato uno scalare $k \in \mathbb{R}$ definiamo

$$p(x) + q(x) := \sum_{t=0}^M (a_t + b_t) x^t,$$

dove $M = \max(n, m)$ e $a_t = 0$ se $n < t \leq M$ e $b_t = 0$ se $m < t \leq M$

$$kp(x) := \sum_{i=0}^n (ka_i) x^i.$$

Si verifica facilmente che le proprietà (V1) – (V8) sono soddisfatte e quindi la terna $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{R} .

Esempio 1.4.2 Sia $V := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ l'insieme delle funzioni di \mathbb{R} in \mathbb{R} . Date due funzioni $f, g \in V$ e dato uno scalare $k \in \mathbb{R}$ definiamo le funzioni

$$f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad kf : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

nel modo seguente

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x); \quad (kf)(x) := kf(x)$$

Si verifica facilmente che le proprietà (V1) – (V8) sono soddisfatte e quindi la terna $(V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{R} .

Capitolo 2

Matrici e Sistemi di equazioni lineari

In matematica e nelle sue applicazioni spesso i numeri appaiono sotto forma di tabella rettangolare o quadrata. Ad esempio fissato un riferimento cartesiano nel piano o nello spazio ordinario un punto viene identificato con una coppia ordinata di numeri reali (se il punto sta nel piano) o una terna ordinata di numeri reali (se il punto sta nello spazio ordinario). Nel caso di un punto del piano aventi coordinate (x, y) la tabella è costituita da una sola riga

$$(x \quad y)$$

oppure una sola colonna

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Anche i dati statistici spesso vengono visualizzati con l'uso di tabelle. Tali tabelle di numeri sono dette *matrici*. Le matrici, per esempio, compaiono anche se vogliamo stabilire come cambiano le coordinate di un punto se si cambia riferimento. Come pure c'è un modo di cifrare un messaggio utilizzando matrici, Ovviamente in entrambi questi due casi uno ha bisogno di sapere come si recuperano i dati iniziali e quindi non tutte le matrici vanno bene per questo scopo, ma solo quelle che ammettono una inversa (cf. (2.8)).

2.1 Matrici

Una matrice è una tabella rettangolare o quadrata di numeri che vengono detti entrate della matrice. Le matrici vengono solitamente denotate con le lettere maiuscole. Per esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sono matrici con 3 righe e 3 colonne la prima e 2 righe e 4 colonne la seconda.

In generale una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$$

è detta matrice di tipo $m \times n$. La matrice A può anche essere scritta come $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. Se con A_i indichiamo la i -esima riga di A e con A^j indichiamo la j -esima colonna di A allora la matrice A può essere anche scritta come

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1p} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_m \end{pmatrix}$$

se vogliamo evidenziare le righe di A e come

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1p} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mp} \end{pmatrix} = (A^1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad A^n)$$

se vogliamo evidenziare le colonne di A .

L'insieme di tutte le matrici di tipo $m \times n$ a entrate in un campo \mathbb{K} è denotato con $M_{m,n}(\mathbb{K})$.

Nell'insieme $M_{m,n}(\mathbb{K})$ definiamo un'operazione di somma e un'operazione di prodotto per uno scalare.

Date $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$,

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

Dato $k \in \mathbb{K}$ e data $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$,

$$kA = k(a_{ij}) := (ka_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

E' facile verificare che $(M_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} .

Osservazione 2.1.1 Se in una matrice il numero di righe m è uguale al numero di colonne n la matrice è detta matrice quadrata e l'insieme delle matrici quadrate di tipo n viene denotato con $M_n(\mathbb{K})$.

Definizione 2.1.2 Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. La matrice ottenuta da A scambiando le righe con le colonne si dice trasposta di A e si denota con tA . Dunque se $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ allora ${}^tA = (a_{ji}) \in M_{n,m}(\mathbb{K})$.

Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ allora } {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Definizione 2.1.3 Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. A si dice *simmetrica* (rispettivamente *antisimmetrica*) se $A = {}^tA$ (rispettivamente $A = -{}^tA$).

Delle seguenti matrici, la prima è simmetrica, la seconda è antisimmetrica.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Definizione 2.1.4 Sia $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$. A si dice *triangolare superiore* (rispettivamente *triangolare inferiore*) se $a_{ij} = 0$ per $i \geq j$ (rispettivamente, se $a_{ij} = 0$ per $j \geq i$). A si dice *diagonale* se $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$. Se $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$ e $a_{ii} = 1$ per $i = 1 \dots n$ A si dice *matrice identità* e viene denotata con I_n .

Definizione 2.1.5 Sia $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$. A si dice *unitriangolare superiore* (rispettivamente *unitriangolare inferiore*) se è triangolare superiore (rispettivamente triangolare inferiore) e inoltre ha tutti gli elementi della diagonale principale uguali a 1.

Definizione 2.1.6 Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. A si dice *a scala per righe* se A è della forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2j_1} & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ 0 & \dots & \cdot & 0 & \dots & 0 & a_{3j_2} & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ 0 & \dots & \cdot & \cdot & \dots & 0 & 0 & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & 0 & \dots & 0 & a_{sj_r} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{sn} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

con $s \leq m$,

o più in generale se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2j_2} & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ 0 & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & 0 & \dots & 0 & a_{3j_3} & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ 0 & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & 0 & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & 0 & a_{sj_s} & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{sn} \\ 0 & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & 0 & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con $s \leq m$.

2.2 Prodotto tra matrici

Vogliamo ora definire il prodotto tra matrici. Cominciamo con il caso semplice, ossia con il prodotto di un vettore riga per un vettore colonna. Per come verrà definito il prodotto occorre che il numero di entrate per questi due vettori sia uguale. Sia quindi A è un vettore riga con n colonne e B è un vettore colonna con n righe, ossia

$$A = (a_1 \dots a_n), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$$

definiamo il prodotto $AB := a_1 b_1 + a_2 b_2 \dots a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k$.

In generale se $A \in M_{m,p}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{p,n}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1p} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_m \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1n} \\ b_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{p1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{pn} \end{pmatrix} = (B^1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad B^n)$$

dove A_i indica la i -esima riga di A e B^j indica la j -esima colonna di B , definiamo il *prodotto righe per colonne*, AB , nel modo seguente:

$$AB := \begin{pmatrix} A_1 B^1 & \cdot & \cdot & \cdot & A_1 B^n \\ A_2 B^1 & \cdot & \cdot & \cdot & A_2 B^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_m B^1 & \cdot & \cdot & \cdot & A_m B^n \end{pmatrix}$$

dove

$$A_i B^j := a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ip} b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

Osserviamo che

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B^1 & \cdot & \cdot & \cdot & A_1 B^n \\ A_2 B^1 & \cdot & \cdot & \cdot & A_2 B^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_m B^1 & \cdot & \cdot & \cdot & A_m B^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_m B \end{pmatrix} = (AB^1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad AB^n)$$

a seconda se evidenziamo le righe o le colonne di AB . Da ciò segue che la i -esima riga di AB , $(AB)_i = A_i B$ e la j -esima colonna di AB , $(AB)^j = AB^j$.

Osservazione 2.2.1 Siano A e B matrici per le quali il prodotto AB è definito. In generale esso non è commutativo sia perché BA potrebbe non essere definito, ma anche qualora lo fosse (per esempio se A e B sono entrambe quadrate dello stesso tipo) la proprietà commutativa potrebbe non valere.

Esempio 2.2.2 Consideriamo le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

si vede che $AB \neq BA$.

Proprietà 2.2.3 (Proprietà del prodotto tra matrici) Siano A, B, C matrici per le quali le operazioni di seguito indicate sono definite. Allora valgono le seguenti proprietà

- $A(BC) = (AB)C$ (*Proprietà associativa*)
- $A(B+C) = AB+AC$ e $(A+B)C = AC+BC$ (*Proprietà distributiva*)

Verifichiamo per esempio la proprietà associativa del prodotto tra matrici. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, sia $B \in M_{n,s}(\mathbb{K})$ e sia $C \in M_{s,t}(\mathbb{K})$. Per provare che $A(BC) = (AB)C$ basta verificare che $(A(BC))_{ij} = ((AB)C)_{ij}$ per ogni i, j , con $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, t$. Ricordiamo che l'elemento (i, j) di una matrice prodotto LM, ovvero $(LM)_{ij} = L_i M^j$ e dunque

$$\begin{aligned} (A(BC))_{ij} &= A_i(BC)^j = A_i(BC^j) = (a_{i1} \dots a_{in}) \begin{pmatrix} B_1 C^j \\ \vdots \\ B_n C^j \end{pmatrix} \\ &= (a_{i1} \dots a_{in}) \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^s b_{1k} c_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^s b_{nk} c_{kj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^s a_{i1} b_{1k} c_{kj} + \dots + \sum_{k=1}^s a_{in} b_{nk} c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^s \left(\sum_{l=1}^n a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} = (AB)_i C^j = ((AB)C)_{ij}. \end{aligned}$$

2.3 Esercizi

1. Calcolare la prima colonna e la terza riga di AB, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Date due matrici A, B per le quali il prodotto AB è definito, provare che ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$.
3. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Provare che $A + {}^t A$ è simmetrica e che $A - {}^t A$ è antisimmetrica.

2.4 Matrici elementari

C'è un algoritmo che permette di ridurre una data matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ in una matrice a scala per righe. Esso va sotto il nome di algoritmo di Gauss. Tale algoritmo usa *operazioni elementari* sulle righe di una matrice e quindi vediamo quali sono queste operazioni. Vi sono tre tipi di operazioni elementari sulle righe di una matrice:

- I) Tipo: Scambio di due righe;
- II) Tipo: Moltiplicare una riga per uno scalare non nullo $k \in \mathbb{K}^*$;
- III) Tipo: Sostituire una riga A_i con $A_i + kA_j$, $k \in \mathbb{K}$.

Esempio 2.4.1 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La seguente matrice A' si ottiene da A con un'operazione elementare del I) Tipo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A'$$

mentre la seguente matrice A'' si ottiene da A con un'operazione elementare del III) Tipo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A''$$

Se le operazioni elementari vengono effettuate sulla matrice identica $I_n \in M_n(\mathbb{K})$ le matrici che ne risultano vengono dette *matrici elementari*. Abbiamo quindi la seguente definizione

Definizione 2.4.2 Una *matrice elementare* $R \in M_n(\mathbb{K})$ è una matrice che si ottiene dalla matrice identità I_n , con operazioni elementari sulle righe di I_n .

La notazione è la seguente

- $R_i(c)$: matrice ottenuta da I_n moltiplicando la i -esima riga di I_n per $c \in \mathbb{K}^*$
- R_{ij} : matrice ottenuta da I_n scambiando la i -esima riga con la j -esima riga di I_n
- $R_{ij}(c)$: matrice ottenuta sommando alla i -esima riga di I_n la j -esima riga moltiplicata per $c \in \mathbb{K}$.

Esempio 2.4.3 Se moltiplichiamo la terza riga di I_3 per 4 la matrice che si ottiene è

$$R_3(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Come pure la matrice ottenuta da I_3 scambiando prima e seconda riga è

$$R_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice ottenuta sommando alla seconda riga di I_3 la terza riga moltiplicata per 2 è

$$R_{23}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Osservazione 2.4.4 Data $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, ogni operazione elementare sulle righe di A si ottiene moltiplicando A a sinistra per la corrispondente matrice elementare.

Esempio 2.4.5 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} R_1 \rightarrow \overline{R_1} + 3R_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$R_{13}(3)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2.5 Algoritmo di Gauss

Daremo ora l' algoritmo di Gauss che permette di ridurre una data matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ in una matrice a scala per righe.

Utilizzando le operazioni elementari sulle righe in modo sistematico è possibile ridurre una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ in una matrice a scala per righe. Descriviamo questo algoritmo dapprima con esempi e poi lo vediamo in generale.

Esempio 2.5.1 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A'$$

La matrice A' è una matrice ridotta a scala per righe.

Esempio 2.5.2 Sia

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} R_2 \rightarrow \overline{R_2} + R_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} R_3 \rightarrow \overline{R_3} - R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B'$$

La matrice B' è una matrice ridotta a scala per righe.

Esempio 2.5.3 Sia

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -9 & 5 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow 9R_3 - 4R_2 \xrightarrow{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -9 & 5 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 8 & -7 \end{pmatrix} = C'$$

La matrice C' è una matrice ridotta a scala per righe.

Algoritmo di Gauss:

Caso 1 Supponiamo, a meno di uno scambio di righe, che l'entrata al posto $(1, 1)$ sia non nulla. Sia dunque $a_{11} \neq 0$.

1° Passo : Fissiamo la 1^a riga e facciamo operazioni elementari rispetto a tale riga fissata in modo tale che tutte le entrate a_{k1} diventino zero per $k \geq 2$. Per fare ciò si sostituisce la riga A_{2+j} con $A_{2+j} - \frac{a_{(2+j)1}}{a_{11}}A_1$, per $j = 0, \dots, m - 2$. Sia A' la matrice così ottenuta

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

Il **1° Passo**, è terminato. L'entrata a_{11} , che è diversa da zero, viene denotata con $p_1 = a_{11}$ ed è detta *pivot* del **1° Passo**.

2° Passo : A meno di uno scambio di righe (qualora la seconda fosse nulla), si determina l'intero j_2 per il quale, a partire dalla 2^a riga in poi, almeno un elemento sulla colonna j_2 sia $\neq 0$ e tutti gli elementi sulle colonne precedenti (da 1 fino a $j_2 - 1$) siano nulli (dalla 2^a riga in poi). Sia quindi $a'_{2j_2} \neq 0$. Si fanno operazioni elementari, rispetto alla seconda riga fino a ottenere la matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ 0 & \cdot & 0 & a'_{2j_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Abbiamo concluso il **2° Passo**. L'entrata a'_{2j_2} , che è diversa da zero, viene denotata con $p_2 = a'_{2j_2}$ ed è detta *pivot* del **2° Passo**.

Si procede in questo modo e al **Passo r – esimo** si ha, se $r < m$, la matrice

$$A_r = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & . & . & \dots & . & . & \dots & . & . & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a'_{2j_2} & \dots & . & . & \dots & . & . & \dots & a'_{2n} \\ 0 & \dots & . & 0 & \dots & 0 & a''_{3j_3} & \dots & . & . & \dots & a''_{3n} \\ 0 & \dots & . & . & \dots & . & 0 & \dots & . & . & \dots & . \\ . & \dots & . & . & \dots & . & . & \dots & . & . & \dots & . \\ . & \dots & . & . & \dots & . & . & \dots & . & . & \dots & . \\ 0 & \dots & . & . & \dots & . & . & \dots & 0 & a'''_{rt} & \dots & a'''_{rn} \\ . & \dots & . & . & \dots & . & . & \dots & . & 0 & \dots & 0 \\ . & \dots & . & . & \dots & . & . & \dots & . & . & \dots & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

in cui le ultime $m - r$ righe sono tutte nulle, se $r = m$ non ci sono righe nulle dopo l' r -esima riga. L'entrata a'''_{rt} , se diversa da zero, viene denotata con $p_r = a'''_{rt}$ ed è detta *pivot* del **Passo r – esimo**.

Le entrate $p_1 = a_{11}, p_2 = a'_{2j_2}, p_3 = a''_{3j_3}, \dots, p_r = a'''_{rt}$ sono dette *pivots* della matrice A.

Caso 2 Supponiamo che tutte le entrate sulla prima colonna di A sono nulle. Si determina l'intero j_1 per il quale almeno un elemento sulla colonna j_1 sia $\neq 0$ e tutti gli elementi sulle colonne precedenti (da 1 fino a $j_1 - 1$) sono nulli.

(1° **Passo**)₁ : Chiamiamo ancora A la matrice ottenuta

$$A = \begin{pmatrix} 0 & . & . & 0 & a_{1j_1} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & . & . & 0 & a_{2j_1} & . & . & . & a_{2n} \\ 0 & . & . & 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & a_{mj_1} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ora si si procede come in 1° **Passo** fino a ottenere la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & . & . & 0 & a_{1j_1} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & . & . & 0 & 0 & a'_{2j_1+1} & . & . & a'_{2n} \\ 0 & . & . & 0 & . & * & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & 0 & * & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Il (1° **Passo**)₁ è terminato.

2° Passo : Si determina l'intero j_2 per il quale, a partire dalla 2^a riga in poi, almeno un elemento sulla colonna j_2 sia $\neq 0$ e tutti gli elementi sulle colonne precedenti (da 1 fino a $j_2 - 1$) sono nulli a partire dalla 2^a riga in poi. Se necessario si ordinano le righe di A' in modo tale che l'entrata a_{2j_2} sia $\neq 0$. Si fanno operazioni elementari,

rispetto alla seconda riga fino a ottenere la matrice A_2

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a'_{2j_2} & \dots & \dots & \dots & a'_{2n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a''_{3j_2+1} & \dots & \dots & a''_{3n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a'''_{mn} \end{pmatrix}$$

Abbiamo concluso il **2° Passo**.

Si procede in questo modo e al **Passo r-esimo** si ha, se $r < m$, la matrice

$$A_r = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a'_{2j_2} & \dots & \dots & \dots & a'_{2n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a''_{3j_3} & \dots & \dots & a''_{3n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a'''_{rt} & \dots & a'''_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

in cui le ultime $m - r$ righe sono tutte nulle, se $r = m$ non si hanno righe nulle dopo l' r -esima riga.

Se volessimo dire in parole semplici cosa facciamo nel **Caso 2**, ossia il caso in cui la matrice ha le prime $j_1 - 1$ colonne tutte nulle, possiamo dire che in questo caso è come se ci dimenticassimo di queste colonne nulle e facessimo la riduzione di Gauss sulla sottomatrice ottenuta da A sopprimendo le prime $j_1 - 1$ colonne.

Definizione 2.5.4 Data una matrice A il *ranko per righe* di A è il numero di righe non nulle di una sua riduzione a scala ed esso viene denotato con $rg(A)$.

2.5.1 Esercizi

Ridurre a scala per righe le seguenti matrici e determinarne il rango

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -2 & 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -4 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & -2 & -2 & 21 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & 5 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.6 Sistemi di equazioni lineari

A volte ci imbattiamo in problemi che da un punto di vista matematico si possono esprimere come sistema di equazioni lineari. Ad esempio se abbiamo tre piani nello spazio e vogliamo sapere se essi hanno o meno punti in comune bisogna sapere se un dato sistema di tre equazioni lineari in tre incognite ammette o meno soluzioni. Un problema in algebra lineare è quello di sviluppare procedure di calcolo per la determinazione delle soluzioni di sistemi di equazioni lineari. Inoltre questi metodi di calcolo devono essere di facile implementazione.

Cominciamo con esempi di carattere geometrico che ci descrivono quando un sistema di equazioni lineari ammette o meno soluzioni. Nel piano consideriamo le seguenti coppie di rette:

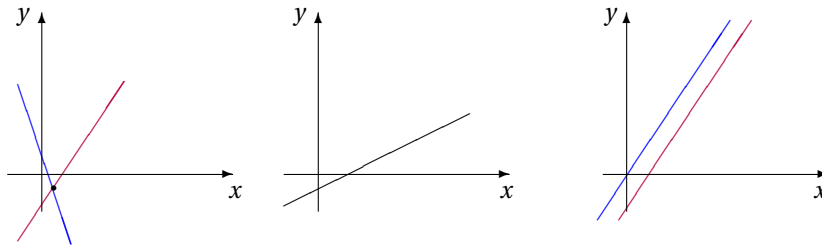


Figura 2.1: rette incidenti (1), rette coincidenti (2), rette parallele (3)

$$(1) 2x + y = 1, x - y = 2; \quad (2) x - 2y = 1, 2x - 4y = 2; \quad (3) 3x - y = 1, x - \frac{1}{3}y = 0$$

I sistemi di 2 equazioni lineari (quelle delle due rette) nelle incognite x, y sono:

$$(1) \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} 3x - y = 1 \\ x - \frac{1}{3}y = 0 \end{cases}$$

Se tali sistemi ammettono soluzioni queste rappresentano i punti comuni a entrambe le rette. Nel caso (1) abbiamo un'unica soluzione (il punto di intersezione delle due rette). Nel caso (2) si hanno infinite soluzioni poiché le due rette sono parallele coincidenti. Nel caso (3) il sistema non ammette alcuna soluzione poiché si tratta di due rette parallele distinte. Dunque dato un sistema di 2 equazioni lineari in 2 incognite si hanno le seguenti possibilità:

- un'unica soluzione
- infinite soluzioni
- nessuna soluzione

Vedremo che queste situazioni si presentano anche per sistemi di m equazioni in n incognite.

Consideriamo dapprima i seguenti tre esempi di sistemi di 3 equazioni nelle 3 incognite x, y, z .

$$\mathbf{Esempio 2.6.1} \quad (1) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = 0 \\ z = 3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x + y - z = 3 \\ -x - y + z = 1 \end{cases}$$

La terna $(x, y, z) = (-5, 3, 3)$ è l'unica soluzione del sistema (1). La terna $(x, y, z) = (2z, -z, z) = z(2, -1, 1)$ per ogni $z \in \mathbb{R}$ è soluzione del sistema (2). Dunque il sistema (2) ammette infinite soluzioni. Il sistema (3) non ammette alcuna soluzione.

Fissato l'ordine delle incognite, a ogni sistema di equazioni lineari possiamo associare due matrici: quella dei coefficienti del sistema di equazioni lineari e quella completa, ossia quella ottenuta dalla matrice dei coefficienti con l'aggiunta della colonna dei termini noti. Per i sistemi di equazioni lineari dati nell'esempio 2.6.1 abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 3 \\ -1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che le prime due matrici hanno una forma particolare, esse sono a scala e quindi abbiamo subito potuto stabilire se il sistema ammette o meno soluzioni.

In generale un sistema di m equazioni lineari nelle incognite x_1, \dots, x_n , sarà della forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Ad esso restano associate le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{K}), \text{ matrice dei coefficienti,}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ matrice colonna delle incognite,}$$

e

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m, \text{ matrice colonna dei termini noti.}$$

Il sistema lo possiamo quindi scrivere anche in forma matriciale come $AX = b$. La matrice $A' = Ab$, ossia la matrice A a cui abbiamo affiancato la colonna dei termini noti b è detta matrice *matrice completa* del sistema.

Definizione 2.6.2 Un sistema di m equazioni lineari nelle n incognite x_1, \dots, x_n , $AX = b$, si dice che è *compatibile* se esiste almeno una soluzione, ossia esiste una n -upla $c = {}^t(c_1 \dots c_n) \in \mathbb{K}^n$ tale che $Ac = b$. Diversamente si dice *incompatibile*.

Dato un sistema di equazioni lineari $AX = b$ osserviamo che le operazioni elementari sulle righe della matrice completa $A' = Ab$ del sistema corrispondono a operazioni sulle equazioni del sistema.

- Scambio di due righe di A' \longleftrightarrow Scambio di due equazioni del sistema;
- Moltiplicare una riga di A' , A'_i per $k \in \mathbb{K}^*$ \longleftrightarrow Moltiplicare la i -esima equazione del sistema per $k \in \mathbb{K}^*$;
- Sostituire A'_i con $A'_i + kA'_j$ \longleftrightarrow Sostituire la i -esima equazione con la i -esima equazione + k (j -esima equazione).

Definizione 2.6.3 Dati due sistemi di m equazioni lineari nelle n incognite x_1, \dots, x_n , essi si dicono *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni.

Osservazione 2.6.4 Sia $AX = b$ un sistema di equazioni lineari. Con operazioni elementari sulle righe della matrice completa A' si può ottenere un sistema $SX = b'$ con S una riduzione a scala per righe della matrice A . Il sistema $SX = b'$ è equivalente al sistema $AX = b$ ovvero i due sistemi ammettono le stesse soluzioni. Ciò segue facilmente dal seguente lemma.

Lemma 2.6.5 *Il sistema*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \end{cases} \quad (2.1)$$

è equivalente al sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ k(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = kb_1 + b_2 \end{cases} \quad (2.2)$$

per ogni $k \in \mathbb{K}$.

Dimostrazione Se la n -upla (c_1, \dots, c_n) è una soluzione del sistema (2.1) essa è chiaramente anche una soluzione del sistema (2.2). Viceversa se (c_1, \dots, c_n) è una soluzione del sistema (2.2) allora essa è soluzione della prima equazione in (2.2) (che è la stessa del sistema (2.1)) ed è soluzione della seconda equazione in (2.2) e quindi $k(a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n) + a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n = kb_1 + b_2$ da cui segue che $a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n = b_2$.

Esempio 2.6.6 Dire se il seguente sistema è compatibile e in caso di risposta positiva trovare le soluzioni.

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ 3x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$$

Scriviamo la matrice completa del sistema e riduciamola a scala per righe

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{R}_2 \rightarrow \text{R}_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} = S'$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ x_3 & x_5 \end{matrix}$

I pivots della matrice dei coefficienti sono al posto $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 4)$ e quindi, nel sistema ridotto a scala, p_1 è il coefficiente nella prima equazione dell'incognita x_1 , p_2 è il coefficiente nella seconda equazione dell'incognita x_2 e p_3 è il coefficiente nella terza equazione dell'incognita x_4 . Le restanti incognite x_3, x_5 sono le *variabili libere* o anche *parametri liberi* del sistema. Pensiamo a esse come a dei termini noti e quindi abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \vdots & 2 - 2x_3 + x_5 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -2x_3 - x_5 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & 1 + x_5 \end{pmatrix}$$

Dall'ultima riga si ricava $x_4 = \frac{1}{3}(1 + x_5)$, questa si sostituisce nella riga precedente e si calcola $x_2 = -2x_3 + x_4 - x_5 = -2x_3 + \frac{1}{3}(1 + x_5) - x_5 = \frac{1}{3} - 2x_3 - \frac{2}{3}x_5$, si sostituiscono le espressioni di x_4, x_2 nella prima riga e si ottiene $x_1 = \frac{7}{3} - 6x_3 - \frac{2}{3}x_5$. La soluzione generica del sistema è:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{7}{3} - 6x_3 - \frac{2}{3}x_5, \frac{1}{3} - 2x_3 - \frac{2}{3}x_5, x_3, \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_5, x_5\right) = \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0\right) + x_3(-6, -2, 1, 0, 0) + x_5\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1\right), \text{ al variare di } x_3, x_5 \in \mathbb{R}.$$

Poiché il numero di parametri liberi è due, si dice che il sistema ammette ∞^2 soluzioni.

2.6.1 Esercizi

Dire se i seguenti sistemi di equazioni lineari sono compatibili e in caso di risposta positiva trovare le soluzioni.

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ 3x_4 - x_5 = 1 \end{cases} \quad (5) \begin{cases} 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

(7) Esprimere, se possibile, una condizione sui numeri $a, b, c \in \mathbb{R}$, in modo tale che il seguente sistema o non ammette soluzioni, o ammette un'unica soluzione o ammette infinite soluzioni.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = a \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = b \\ x_1 - 3x_2 = c \end{cases}$$

(8) Discutere il seguente sistema di equazioni al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + kx_3 = 1 \\ -x_1 + kx_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$$

(9) Si discuta il seguente sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3 , al variare del parametro reale k

$$\begin{cases} x_1 - kx_2 + kx_3 = 1 \\ kx_1 - x_2 + x_3 = k^2 \\ x_1 + kx_2 + 3x_3 = k \end{cases}$$

(10) Al variare del parametro reale h , determinare le soluzioni, se esistono, dei seguenti sistemi di equazioni lineari

$$a) \begin{cases} hx_1 + x_2 + hx_3 = h \\ x_1 + hx_2 + x_3 = -h \\ x_1 + x_2 + hx_3 = 2h \end{cases} \quad b) \begin{cases} hx_1 + x_2 + hx_3 = 1 \\ -x_1 + hx_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + hx_3 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo i vari esercizi, si vede che nel caso di sistemi compatibili il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa. Inoltre nel caso di sistemi lineari compatibili con infinite soluzioni si ha che il numero dei parametri da cui esse dipendono è $n - r$, dove n è il numero delle incognite e $r = rg(A)$, il rango della matrice A dei coefficienti.

Vedremo successivamente che una condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di equazioni lineari sia compatibile è che il rango della matrice dei coefficienti sia uguale al rango della matrice completa.

2.7 Sistemi omogenei

Definizione 2.7.1 Il sistema $AX = b$ si dice omogeneo se $b = 0$.

Osservazione 2.7.2 I sistemi omogenei sono sempre compatibili poiché esiste sempre la soluzione banale. Dunque per sistemi omogenei non ci si pone il problema della compatibilità, ma se esistono soluzioni diverse da quelle banali, dette anche *autosoluzioni*.

Esempio 2.7.3 Determinare le soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Scriviamo la matrice associata al sistema e facciamo operazioni elementari

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \uparrow$
 $x_2 \qquad \qquad x_4 \qquad \qquad x_5$

I pivots sono al posto $(1, 1)$, $(2, 3)$ e dunque le incognite x_2, x_4, x_5 sono parametri liberi. Quindi abbiamo $x_3 = x_4 + 4x_5$, $x_1 = 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 2x_2 - 2x_4 - 3x_5$. La

soluzione generale del sistema è

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= (2x_2 - 2x_4 - 3x_5, x_2, x_4 + 4x_5, x_4, x_5) \\ &= x_2(2, 1, 0, 0, 0) + x_4(-2, 0, 1, 1, 0) + x_5(-3, 0, 4, 0, 1) \end{aligned}$$

Le soluzioni $(2, 1, 0, 0, 0)$, $(-2, 0, 1, 1, 0)$, $(-3, 0, 4, 0, 1)$ sono dette *soluzioni base* del sistema, ossia tutte le soluzioni del sistema sono combinazioni lineari di esse.

Osservazione 2.7.4 Sia $AX = 0$ un sistema omogeneo, dove $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$. Indichiamo con Σ l'insieme delle soluzioni, ossia

$$\Sigma := \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\}$$

È facile verificare che per ogni $X, Y \in \Sigma$ si ha che $X + Y \in \Sigma$ e inoltre per ogni $X \in \Sigma$ e per ogni $k \in \mathbb{R}$ si ha che $kX \in \Sigma$, ossia l'insieme $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ è chiuso rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per uno scalare. Un sottoinsieme di \mathbb{R}^n con tali proprietà si dice sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .

2.7.1 Esercizi

Determinare l'insieme delle soluzioni dei seguenti sistemi di equazioni lineari omogenei

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

2.8 Algoritmo per il calcolo di A^{-1}

Facciamo vedere, con un esempio, l'importanza di lavorare con matrici invertibili. Sappiamo che in situazioni strategiche è importante che l'avversario non sia a conoscenza della nostra posizione geografica. Ovviamente se noi abbiamo bisogno di aiuto dobbiamo poter comunicare ai nostri amici la nostra posizione geografica, senza che gli avversari, in caso di intercettazione del messaggio, sappiano dove ci troviamo. Ecco quindi la necessità di mandare loro non le nostre coordinate piane effettive $X = {}^t(x, y)$, ma, per esempio, quelle ottenute da esse con una moltiplicazione a sinistra con una matrice C quadrata 2×2 , siano esse $X' = {}^t(x', y') = CX$. Quando i nostri amici ricevono i nostri dati, per poter venire in nostro aiuto devono sapere le coordinate effettive e quindi da X' devono poter risalire a X . Questo, però, possono farlo solo se conoscono la matrice inversa di C . Vedremo che non tutte le matrici quadrate ammettono inversa e quindi non tutte le matrici C vanno bene. Diamo quindi la nozione di matrice invertibile.

Definizione 2.8.1 Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. A si dice *invertibile* se esiste $B \in M_n(\mathbb{K})$ tale che $AB = I_n = BA$.

Osservazione 2.8.2 Una tale B , se esiste, è unica. Ossia se esiste un'altra matrice $C \in M_n(\mathbb{K})$ tale che $AC = I_n = CA$ allora $B = C$. Infatti si ha che $B = B \cdot I_n = B(AC) = (BA)C = I_n \cdot C = C$.

La matrice B tale che $AB = I_n = BA$ viene denotata con A^{-1} e si dice matrice *inversa* di A .

Osservazione 2.8.3 Le matrici elementari sono matrici invertibili. Si verifica facilmente che

- $R_i(c)^{-1} = R_i(c^{-1})$ per $c \in \mathbb{K}^*$
- $R_{ij}^{-1} = R_{ij}$
- $R_{ij}(c)^{-1} = R_{ij}(-c)$.

Esempio 2.8.4 Si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

La matrice A è invertibile. Infatti $AB = I_2 = BA$, dunque A è invertibile e la sua inversa è la matrice B . Facciamo ora vedere che essendo A invertibile essa è prodotto di matrici elementari.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{12}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Poiché fare operazioni elementari sulle righe di una matrice equivale e moltiplicare la matrice stessa, a sinistra, per la corrispondente matrice elementare, si ha che $R_{12}(-2)R_2(\frac{1}{3})R_{21}(1)A = I_2$. Poiché l'inversa, se esiste, è unica, si ha quindi che

$$A^{-1} = R_{12}(-2)R_2(\frac{1}{3})R_{21}(1). \tag{2.3}$$

Ma

$$R_{12}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R_2(\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, R_{21}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$A^{-1} = R_{12}(-2)R_2(\frac{1}{3})R_{21}(1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Da $R_{12}(-2)R_2(\frac{1}{3})R_{21}(1)A = I_2$ segue che

$$A = R_{21}(1)^{-1}R_2(\frac{1}{3})^{-1}R_{12}(-2)^{-1} = R_{21}(-1)R_2(3)R_{12}(2)$$

e quindi se A è invertibile si ha che A è un prodotto di matrici elementari.

Daremo ora un algoritmo per il calcolo dell'inversa di una matrice, se l'inversa esiste.

2.8.1 Descrizione algoritmo per il calcolo di A^{-1}

Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Consideriamo la matrice (A, I_n) . Osserviamo che data una matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$, poiché il prodotto di matrici si fa righe per colonne, si ha che

$$B(A, I_n) = (BA, B)$$

Se A è invertibile allora moltiplicando a sinistra, (A, I_n) , per A^{-1} si ha che

$$A^{-1}(A, I_n) = (A^{-1}A, A^{-1}) = (I_n, A^{-1})$$

Ma se A è invertibile allora A^{-1} è prodotto di matrici elementari e dunque partendo da (A, I_n) e facendo operazioni elementari fino a ottenere una matrice della forma (I_n, B) troviamo $A^{-1} (= B)$.

Esempio 2.8.5 Determinare l'inversa della seguente matrice A , se esiste.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Affianchiamo alla matrice A la matrice identica e facciamo operazioni elementari sulle righe, a partire da su fino a ottenere, a sinistra, una matrice triangolare superiore e poi a partire dall'ultima riga fino a ottenere, a sinistra, la matrice identica.

$$\begin{aligned} (A, I_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & \vdots & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \vdots & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = (I_3, A^{-1}) \end{aligned}$$

Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, se la sua inversa esiste, c'è anche un altro modo per calcolarla. Per fare questo serve la nozione di determinante di una matrice.

2.9 Determinanti

Vogliamo vedere come associare a una matrice quadrata a entrate nel campo \mathbb{K} un elemento di \mathbb{K} . Se $A = (a) \in M_1(\mathbb{K})$ allora noi associamo a tale matrice lo scalare a . Indichiamo tale numero con $\det A$ e viene detto **determinante** della matrice A . Se A è una matrice 2×2 , $A \in M_2(\mathbb{K})$,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

definiamo il determinante di A nel seguente modo

$$\det A := ad - bc \in \mathbb{K} \quad (2.4)$$

• PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE DI MATRICI 2×2 DEFINITO IN (2.4)

1) $\det(I_2) = 1$

2)

$$\det \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = cb - ad = -(ad - cb) = -\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

3)

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} ka + ha' & kb + hb' \\ c & d \end{pmatrix} &= (ka + ha')d - (kb + hb')c = k(ad - bc) + h(a'd - b'c) \\ &= k \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + h \det \begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per matrici 3×3 definiamo il determinante utilizzando la definizione di determinante di matrici 2×2 . Sia dunque $A \in M_3(\mathbb{K})$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

allora

$$\det A := a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Questo viene anche detto *sviluppo di Laplace secondo la prima riga*.

Ciò può essere generalizzato al caso di matrici $n \times n$. C'è un modo induttivo di definire il determinante. Prima di vedere il caso generale facciamo la seguente osservazione relativa a matrici 3×3

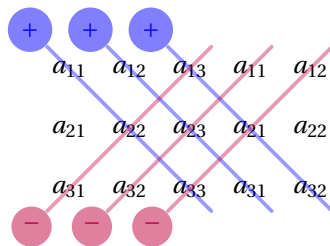
Osservazione 2.9.1 Nel caso di matrici 3×3 (e solo per esse) c'è la REGOLA DI SARRUS che ci permette di calcolare il determinante della matrice in un modo molto semplice:

Si scrive la matrice A si affiancano ad essa, nell'ordine, le prime due colonne di A e si vede che il determinante si ottiene moltiplicando gli elementi delle diagonali principali e sommandoli tra loro e poi sottraendo a questi la somma dei prodotti degli elementi sulle diagonali secondarie.

Ecco un metodo facile per ricordare come si calcola il determinante di una matrice 3×3 . Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

e si affianchino ad essa, nell'ordine, le prime due colonne di A



Allora

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21}) \quad (2.6)$$

Ritorniamo al caso di matrici $n \times n$. Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, supponiamo di saper calcolare il determinante di matrici $(n - 1) \times (n - 1)$ allora sappiamo anche calcolare quello della matrice A , in modo analogo a quanto fatto per matrici 3×3 . Per fare ciò dobbiamo introdurre qualche terminologia.

Osserviamo prima la seguente cosa:

Osservazione 2.9.2 Da (2.6) si vede che il determinante di una matrice 3×3 è somma di sei termini. Il numero di termini in tale sommatoria non è casuale. Esso è precisamente $3!$. Tale numero coincide con la cardinalità di S_3 , il gruppo delle permutazioni su 3 elementi. Se indichiamo con σ gli elementi di S_3 allora

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_3} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \end{aligned}$$

Definizione 2.9.3 Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ e sia A_{ij} la matrice ottenuta da A sopprimendo la i -esima riga e la j -esima colonna. Il numero $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ è detto *cofattore* (i, j) di A , o anche cofattore dell'elemento a_{ij} e viene denotato con C_{ij} , ossia $C_{ij} := (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$.

Data $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ possiamo definire il determinante di A , $\det(A)$, nel modo seguente

$$\det(A) := \sum_{j=1}^n a_{1j} (-1)^{1+j} \det(A_{1j}) = \sum_{j=1}^n a_{1j} C_{1j} \quad (2.7)$$

Esso è detto anche SVILUPPO DI LAPLACE rispetto alla prima riga.

In realtà tale sviluppo può essere fatto rispetto a una qualunque riga (o colonna) di A . Da (2.7) si vede che il determinante di una matrice quadrata si ottiene moltiplicando ogni elemento di una riga con il suo cofattore e sommando tali prodotti.

Osservazione 2.9.4 Se A è una matrice con una riga (o colonna) nulla allora il suo determinante è zero. (Basta fare lo sviluppo di Laplace rispetto a tale riga (o colonna) nulla.)

Osservazione 2.9.5 In generale per matrici $n \times n$ abbiamo che

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Osservazione 2.9.6 Il determinante può essere definito anche in modo assiomatico, ossia il determinante può essere definito come quella funzione su $M_n(\mathbb{K})$ a valori in \mathbb{K} che soddisfa le seguenti proprietà R1, R2, R3.

Definizione 2.9.7 Una funzione $f : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ è detta *determinante* se è tale che

R1: $f(I_n) = 1$;

R2: il valore di f cambia segno se scambiamo due qualunque righe;

R3: f è lineare rispetto alla prima riga, ossia

$$f\left(\begin{pmatrix} kA_1 + hA'_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}\right) = kf\left(\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}\right) + hf\left(\begin{pmatrix} A'_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}\right)$$

- Tale funzione se esiste è unica.

Noi comunque tralascieremo questo aspetto assiomatico.

Vogliamo ora vedere come cambia il determinante di una matrice se si effettuano operazioni elementari sulle righe (o colonne) della matrice data.

Teorema 2.9.8 Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$.

- (1) Se B è una matrice ottenuta da A scambiando due righe (colonne) distinte allora $\det(B) = -\det(A)$;
- (2) Se B è una matrice ottenuta da A moltiplicando una riga (colonna) per uno scalare $k \in \mathbb{K}^*$ allora $\det(B) = k\det(A)$;
- (3) Se B è una matrice ottenuta da A sommando a una riga un'altra riga distinta (dalla precedente) e moltiplicata per uno scalare $k \in \mathbb{K}$ allora $\det(B) = \det(A)$.

Dimostrazione (1) Sia $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$. Sia B la matrice ottenuta da A scambiando la prima riga con la seconda, ossia sia $B = (A_2, A_1, \dots, A_n)$. Andiamo a calcolare il determinante di B facendo lo sviluppo rispetto alla prima riga. Si ha $\det(B) = \sum_{j=1}^n b_{1j}(-1)^{1+j} \det(B_{1j}) = \sum_{j=1}^n a_{2j}(-1)^{1+j} \det(A_{2j}) = -\sum_{j=1}^n a_{2j}(-1)^{2+j} \det(A_{2j}) = -\det(A)$

(2) Sia $A = (A_1, \dots, A_i, \dots, A_n)$. Sia B la matrice ottenuta da A moltiplicando la i -esima riga A_i per $k \in \mathbb{R}^*$, ossia sia $B = (A_1, \dots, kA_i, \dots, A_n)$. Andiamo a calcolare il determinante di B facendo lo sviluppo rispetto alla i -esima riga. Si ha $\det(B) = \sum_{j=1}^n b_{ij}(-1)^{i+j} \det(B_{ij}) = \sum_{j=1}^n k a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij}) = k \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij}) = k\det(A)$.

(3) Sia $A = (A_1, \dots, A_i, \dots, A_t, \dots, A_n)$. Sia B la matrice ottenuta da A sommando alla t -esima riga di A la i -esima riga di A moltiplicata per $k \in \mathbb{R}$, ossia $B = (A_1, \dots, A_i, \dots, A_t + kA_i, \dots, A_n)$. Andiamo a calcolare il determinante di B facendo lo sviluppo rispetto alla t -esima riga. Si ha

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum_{j=1}^n b_{tj}(-1)^{t+j} \det(B_{tj}) = \sum_{j=1}^n (a_{tj} + k a_{ij})(-1)^{t+j} \det(A_{tj}) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{tj}(-1)^{t+j} \det(A_{tj}) + k \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij}) = \det(A), \end{aligned}$$

poiché l'ultima sommatoria è zero (vedi Lemma (2.9.10)). □

Corollario 2.9.9 Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice con due righe (o colonne) uguali. Allora $\det(A) = 0$.

Dimostrazione Sia $A = (A_1, \dots, A_i, \dots, A_t, \dots, A_n)$ e supponiamo che la riga i -esima sia uguale alla riga t -esima e sia B la matrice ottenuta da A scambiando la i -esima riga con la t -esima riga di A , ossia sia $B = (A_1, \dots, A_t, \dots, A_i, \dots, A_n)$. Allora $\det((A_1, \dots, A_t, \dots, A_i, \dots, A_n)) = -\det((A_1, \dots, A_i, \dots, A_t, \dots, A_n))$, ed essendo le due righe uguali si ha $\det(A) = -\det(A)$, ossia $\det(A) = 0$ □

Lemma 2.9.10 Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Allora se $k \neq t$ si ha che

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}(-1)^{t+j} \det(A_{tj}) = 0$$

Dimostrazione Sia $A = (A_1, \dots, A_k, \dots, A_t, \dots, A_n)$. Sia B la matrice ottenuta da A sostituendo la t -esima riga A_t con la riga A_k , ossia sia $B = (A_1, \dots, A_k, \dots, A_k, \dots, A_n)$. Osserviamo che $\det B = 0$ poiché B ha due righe uguali. Inoltre i cofattori (t, j) di B sono uguali a quelli di A e le entrate $b_{tj} = a_{kj}$ per $j = 1, \dots, n$. Se calcoliamo il determinante di B facendo lo sviluppo rispetto alla t -esima riga si ha che $0 = \det(B) = \sum_{j=1}^n b_{tj}(-1)^{t+j} \det(B_{tj}) = \sum_{j=1}^n a_{kj}(-1)^{t+j} \det(A_{tj})$. Abbiamo quindi visto che se si moltiplicano gli elementi di una riga per i cofattori di una diversa riga e si sommano tra loro il risultato è zero. \square

Calcoliamo ora il determinante della seguente matrice A utilizzando il metodo di Eliminazione di Gauss.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_i \rightarrow R_i - R_1, \\ i = 2, \dots, 5}]{\det \text{ non cambia}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2 \rightarrow R_5 \\ \text{1 scambio di riga}}]{\det \text{ non cambia}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_4 \rightarrow R_4 - R_3}]{\det \text{ non cambia}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_5 \rightarrow R_5 + 1/2 R_4}]{\det \text{ non cambia}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = T$$

Dunque $-48 = \det(T) = (-1)\det(A)$ e quindi $\det(A) = 48$.

2.9.1 Determinante del prodotto

Enunciamo, senza darne una dimostrazione, il teorema di Binet

Teorema 2.9.11 (Binet) Siano $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Allora

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Daremo ora alcune applicazioni di tale teorema.

- Siano L e M matrici quadrate di ordine non necessariamente uguale. Allora

$$\det \begin{pmatrix} L & X \\ 0 & M \end{pmatrix} = \det(L)\det(M)$$

Dimostrazione Scriviamo la matrice

$$\begin{pmatrix} L & X \\ 0 & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & X \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

e dal teorema di Binet segue che

$$\det \begin{pmatrix} L & X \\ 0 & M \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} L & X \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det(M)\det(L)$$

Esempio 2.9.12 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

allora

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 4 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = -7$$

- Un'altra possibile applicazione del teorema di Binet è un metodo per verificare l'invertibilità di una matrice.

Teorema 2.9.13 Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. A è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$. Se A è invertibile allora $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Dimostrazione Se A è invertibile allora esiste A^{-1} tale che $AA^{-1} = I$. Quindi $1 = \det(I) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$ da cui segue che $\det(A) \neq 0$. Viceversa supponiamo che $\det(A) \neq 0$. Allora affianchiamo alla matrice A la matrice identica e facciamo operazioni elementari sulle righe di tale matrice, a partire dalla prima riga in giù e poi (essendo $\det(T) \neq 0$) dall'ultima riga in su

$$\left(A \quad : \quad I_n \right) \xrightarrow{\text{E.G.}\downarrow} \left(T \quad : \quad B \right) \xrightarrow{\text{E.G.}\uparrow} \left(I_n \quad : \quad C \right)$$

dove C è l'inversa di A e quindi A è invertibile. □

Definizione 2.9.14 Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. La matrice cofattore è la matrice $\text{cof}(A)$ le cui entrate (i, j) sono $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$, ovvero $\text{cof}(A) := ((-1)^{i+j} \det A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Esempio 2.9.15 Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

la matrice cofattore è

$$\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vogliamo ora far vedere che per ogni matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ vale la seguente relazione

$$A \cdot {}^t \text{cof}(A) = \det(A) \cdot I_n \tag{2.8}$$

dove

$$\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \det A_{11} & \dots & \dots & (-1)^{1+n} \det A_{1n} \\ (-1)^{2+1} \det A_{21} & \dots & \dots & (-1)^{2+n} \det A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n+1} \det A_{n1} & \dots & \dots & (-1)^{n+n} \det A_{nn} \end{pmatrix}$$

è la matrice dei cofattori di A . Il generico elemento (i, j) di $A \cdot {}^t \text{cof}(A)$ è della forma $\sum_{t=1}^n a_{it} (-1)^{j+t} \det A_{jt}$. Se $i = j$ esso rappresenta lo sviluppo del determinante di A secondo la j -esima riga. Se $i \neq j$ esso rappresenta il prodotto di elementi di una riga per i cofattori di una diversa riga e dunque esso è zero (Lemma (2.9.10)). Si ottiene quindi la relazione (2.8).

Osservazione 2.9.16 Se A è invertibile allora la relazione (2.8) dà un altro modo per calcolare l'inversa di una matrice.

Infatti, poiché A è invertibile, da (2.8) segue che $A \cdot \frac{1}{\det(A)} {}^t \text{cof}(A) = I_n$ e pertanto la matrice $\frac{1}{\det(A)} {}^t \text{cof}(A) = A^{-1}$.

Vogliamo ora vedere la REGOLA DI CRAMER per sistemi quadrati la cui matrice dei coefficienti è invertibile.

Corollario 2.9.17 Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ invertibile. Sia $AX = b$ un sistema di n equazioni nelle n incognite x_1, \dots, x_n . Allora l'unica soluzione del sistema $AX = b$ è data da $X = A^{-1}b$.

Dimostrazione Poiché A è invertibile se moltiplichiamo $AX = b$ a sinistra per A^{-1} si ha $X = A^{-1}b$. Quindi il generico $x_k = \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^n b_j (-1)^{k+j} \det A_{jk}$ e quest'ultima espressione non è altro che lo sviluppo secondo la colonna k -esima della matrice ottenuta da A sostituendo la k -esima colonna con il vettore colonna b . \square

2.9.2 Significato geometrico del determinante

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$, indichiamo con A_i , per $i = 1, \dots, n$ le righe di A . Tali righe si possono considerare come elementi di \mathbb{R}^n . Sia

$$P(A) := \left\{ \sum_{i=1}^n t_i A_i \mid 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, \dots, n \right\}$$

è detto *parallelogramma* se $n = 2$ o *parallelepipedo* se $n \geq 3$.

Geometricamente, il determinante di A rappresenta, a meno del segno, il volume (l'area, se $n = 2$) del parallelepipedo (parallelogramma, se $n = 2$) $P(A)$.

Teorema 2.9.18 *Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Il determinante, $\det(A)$ è, a meno del segno, il volume del parallelepipedo $P(A)$, ossia il volume di $P(A)$ è uguale a $|\det(A)|$.*

Dimostrazione Facciamolo vedere solo nel caso $n = 2$. Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

dove A_1, A_2 sono le righe di A . Denotiamo con $Area(A) = Area(A_1, A_2)$, l'area del parallelogramma $P(A)$.

(1) Se

$$A = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

allora $Area(A) = Area(I_2) = 1$ e dunque vale la proprietà R1 nella definizione 2.9.7.

(2) Se scambiamo le due righe di A il parallelogramma resta lo stesso e quindi $Area(A_1, A_2) = Area(A_2, A_1)$. D'altra parte $\det(A_1, A_2) = -\det(A_2, A_1)$ e dunque $\det(A_1, A_2) = \pm Area(A_1, A_2)$.

(3) Per provare l'additività nella prima riga basta verificare le seguenti due cose:

(i) $Area(kA_1, A_2) = kArea(A_1, A_2)$

(ii) $Area(A_1 + A'_1, A_2) = Area(A_1, A_2) + Area(A'_1, A_2)$.

Per quanto riguarda (i) è chiaro che i parallelogrammi individuati dai vettori kA_1 e A_2 e dai vettori A_1 e A_2 , rispettivamente, hanno entrambi la stessa altezza mentre la lunghezza della base kA_1 , $\|kA_1\|$ è eguale a $|k| \|A_1\|$ e pertanto $Area(kA_1, A_2) = kArea(A_1, A_2)$.

Per quanto riguarda (ii) se sostituiamo A_1 con $A_1 + A'_1$ e teniamo fisso A_2 si vede dalla Figura 2.2 che $Area(A_1 + A'_1, A_2) = Area(A_1, A_2) + Area(A'_1, A_2)$.

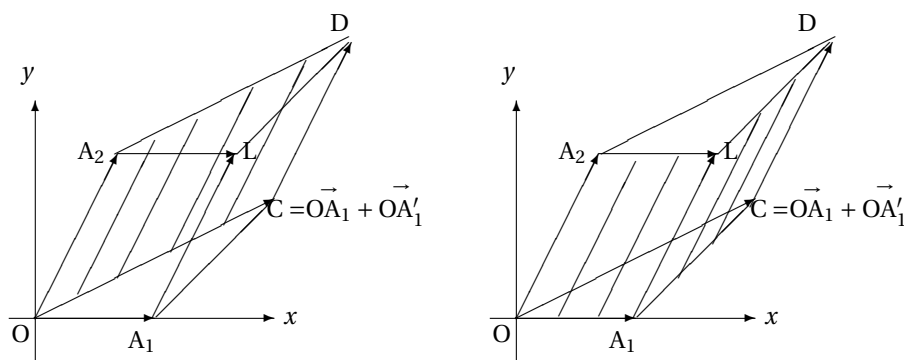


Figura 2.2: $Area(A_1 + A'_1, A_2) = Area(A_1, A_2) + Area(A'_1, A_2)$

Abbiamo quindi visto che la funzione $Area$ su $M_2(\mathbb{R})$ soddisfa le proprietà R1 e R3 della funzione determinante 2.9.7, mentre non soddisfa la proprietà R2. Per l'unicità del determinante si ha che $det(A) = \pm Area(A)$. \square

2.9.3 Esercizi

1. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Provare che $det(kA) = k^n det(A)$.
2. Provare che nessuna matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ soddisfa $A^2 = -I_3$.
3. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice antisimmetrica con n dispari. Provare che $det(A) = 0$. Trovare un esempio di matrice antisimmetrica con n pari avente $det(A) \neq 0$.
4. Calcolare, usando il metodo dei cofattori, l'inversa delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Risolvere il seguente sistema con la regola di Cramer

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 & = 1 \\ 2x_1 + 3x_3 & = 2 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 & = -1 \end{cases}$$

6. Trovare l'area del triangolo i cui vertici sono: $A = (1, 2), B = (0, -3), C = (2, 1)$.
7. Trovare il volume del parallelepipedo individuato dai vettori $\vec{A} = (1, 2, -1), \vec{B} = (0, -3, 1), \vec{C} = (-1, -1, 1)$
8. Dire se esistono valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per i quali la seguente matrice $A_k = \begin{pmatrix} 0 & -k & 1-k \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & k \end{pmatrix}$ sia invertibile.

9. Sia $GL_n(\mathbb{K}) := \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid A \text{ è invertibile}\}$. Provare che $GL_n(\mathbb{K})$ con l'operazione di prodotto tra matrici è un gruppo, detto *gruppo lineare*.

10. Determinare al variare di $t \in \mathbb{R}$ il rango delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} t & t & t-1 \\ -t & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 2 & 1 & t \\ -t & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

11. Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per i quali il $\det A = 0$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & t \\ t & 1 & 0 \\ 1 & t & t-1 \end{pmatrix}$$

12. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Trovare $\det(A)$
- b) Trovare A^{-1} , se esiste.

Capitolo 3

Spazi Vettoriali e Basi

Nel Capitolo 1 abbiamo visto che l'insieme dei vettori geometrici del piano o dello spazio, come pure lo spazio delle n -uple di numeri reali avevano una struttura particolare, quella cosiddetta di spazio vettoriale reale. Vogliamo ora generalizzare la nozione di spazio vettoriale a un qualunque insieme non vuoto.

Definizione 3.0.1 Sia $V \neq \emptyset$ un insieme non vuoto su cui sono definite un'operazione di somma

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

e un'operazione di prodotto per uno scalare

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$$

dove \mathbb{K} è un campo.

Se l'operazione di somma gode delle seguenti proprietà

(V1) (*commutativa*) $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$, per ogni $\vec{v}, \vec{u} \in V$

(V2) (*associativa*) $(\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w})$, per ogni $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in V$

(V3) (*esistenza del vettore nullo*) $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$, per ogni $\vec{v} \in V$,

(V4) (*esistenza dell'opposto*) $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$, per ogni $\vec{v} \in V$.

e se l'operazione di *prodotto per uno scalare* gode delle seguenti proprietà:

(V5) (*distributiva rispetto alla somma di vettori*) $k(\vec{v} + \vec{u}) = k\vec{v} + k\vec{u}$, per ogni $\vec{v}, \vec{u} \in V$ e per ogni $k \in \mathbb{K}$.

(V6) (*distributiva rispetto alla somma di scalari*) $(k + h)\vec{v} = k\vec{v} + h\vec{v}$, per ogni $\vec{v} \in V$ e per ogni $k, h \in \mathbb{K}$.

(V7) $(kh)\vec{v} = k(h\vec{v})$, per ogni $\vec{v} \in V$ e per ogni $k, h \in \mathbb{K}$.

(V8) $1\vec{v} = \vec{v}$, per ogni $\vec{v} \in V$.

allora la terna $(V, +, \cdot)$ è detta *spazio vettoriale* sul campo \mathbb{K} (per esempio $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) o anche \mathbb{K} -*spazio vettoriale*. Gli elementi di V sono detti vettori.

3.1 Sottospazi vettoriali

Dato un \mathbb{K} -spazio vettoriale V tra i sottoinsiemi di V vi sono quelli che hanno la stessa struttura di V , ossia quelli che sono essi stessi spazi vettoriali con le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare definite in V . Tali sottoinsiemi sono detti sottospazi vettoriali. Un modo equivalente per dire che un certo sottoinsieme non vuoto è un sottospazio vettoriale è il seguente (da ora in poi, per semplicità, un vettore \vec{v} lo indicheremo semplicemente con v).

Definizione 3.1.1 Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} . Sia $W \subset V$ un sottoinsieme non vuoto. W si dice sottospazio vettoriale di V se

1. Per ogni $u, w \in W$ si ha che $u + w \in W$
2. Per ogni $u \in W$ e per ogni $k \in \mathbb{K}$ si ha che $ku \in W$,

ossia W è chiuso rispetto alle operazioni di spazio vettoriale.

Osservazione 3.1.2 Osserviamo che ogni sottospazio vettoriale contiene il vettore nullo. Infatti poiché un sottospazio vettoriale è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare, se come scalare prendiamo $k = 0$ allora dato $w \in W$ si ha che $0 \cdot w = \vec{0}$ e dunque $\vec{0} \in W$.

Esempio 3.1.3 Sia V uno spazio vettoriale e sia $W \subset V$ un sottoinsieme non vuoto di V . Se $W = V$, oppure $W = \{\vec{0}\}$ allora W è un sottospazio vettoriale. Tali sottospazi sono detti sottospazi *banali*.

Esempio 3.1.4 Sia $V = \mathbb{R}^2$ e sia $v \in \mathbb{R}^2$ un vettore non nullo. Allora

$$W := \{w \in \mathbb{R}^2 \mid w = tv, t \in \mathbb{R}\}$$

è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^2 . Esso è la retta generata dal vettore v .

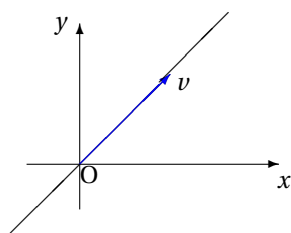


Figura 3.1: retta generata dal vettore v

Esempio 3.1.5 Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia

$$W := \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R}\}$$

W è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 . Esso rappresenta il piano yz .

Esempio 3.1.6 Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia

$$W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$$

W è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 . Esso rappresenta un piano nello spazio.

Esempio 3.1.7 Sia $V = M_n(\mathbb{R})$ e siano

$$\mathcal{S} := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = {}^t A\}; \quad \mathcal{A} := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = -{}^t A\}$$

Gli insiemi \mathcal{S} e \mathcal{A} sono sottospazi vettoriali di $M_n(\mathbb{R})$.

Esempio 3.1.8 Sia $V = \mathbb{R}[x]$ e sia

$$\mathbb{R}[x]_{\leq n} := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p(x) \leq n\}$$

L'insieme $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$.

Lemma 3.1.9 Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} e siano $U, W \subset V$ due sottospazi vettoriali. Allora $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale.

Dimostrazione $U \cap W \neq \emptyset$ poiché contiene il vettore nullo. Inoltre per ogni $u, v \in U \cap W$ si ha che $u + v \in U \cap W$. Infatti $u, v \in U$ ed essendo U un sottospazio vettoriale $u + v \in U$. Come pure $u, v \in W$ ed essendo W un sottospazio vettoriale $u + v \in W$ e pertanto $u + v \in U \cap W$. Similmente si verifica la chiusura rispetto al prodotto per uno scalare. \square

Osservazione 3.1.10 Osserviamo che l'unione di due sottospazi vettoriali, in generale non è un sottospazio vettoriale. Infatti se $V = \mathbb{R}^2$ e come sottospazi prendiamo $U =$ asse delle x e $W =$ asse delle y allora $U \cup W$ non è un sottospazio vettoriale. Infatti se $u = (1, 0)$ e $w = (0, 1)$ allora $u, w \in U \cup W$ mentre $u + w = (1, 1) \notin U \cup W$.

Dato un qualunque spazio vettoriale V , faremo vedere che c'è un modo per costruire sottospazi vettoriali.

Siano v_1, \dots, v_n vettori di V . L'espressione

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, \quad a_i \in \mathbb{K}$$

è detta *combinazione lineare* dei vettori v_1, \dots, v_n . I coefficienti a_i sono detti *pesi* della combinazione lineare.

Sia

$$L(\{v_1, \dots, v_n\}) := \{a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, \quad a_i \in \mathbb{K}\}$$

l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari dei vettori v_1, \dots, v_n .

Lemma 3.1.11 L'insieme $L(\{v_1, \dots, v_n\})$ è un sottospazio vettoriale di V . Esso è detto *sottospazio generato dai vettori* v_1, \dots, v_n .

Dimostrazione L'insieme $L(\{v_1, \dots, v_n\})$ è non vuoto poiché i vettori v_i appartengono a tale insieme. Inoltre esso è chiuso rispetto all'operazione di somma e di prodotto per uno scalare. Infatti per ogni $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, $w = \sum_{i=1}^n b_i v_i \in L(\{v_1, \dots, v_n\})$ si ha che $v + w = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) v_i \in L(\{v_1, \dots, v_n\})$. Similmente, per ogni scalare $k \in \mathbb{K}$ e per ogni $v \in L(\{v_1, \dots, v_n\})$ si ha che $kv = \sum_{i=1}^n (ka_i) v_i \in L(\{v_1, \dots, v_n\})$. \square

Esempio 3.1.12 Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} e siano $U, W \subset V$ due sottospazi vettoriali. Definiamo

$$U + W := \{u + w \mid u \in U \text{ e } w \in W\}$$

L'insieme $U + W$ è un sottospazio vettoriale di V , detto *sottospazio somma* di U e W . La dimostrazione è lasciata come esercizio.

Osservazione 3.1.13 Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} e siano $U, W \subset V$ due sottospazi vettoriali. Se $U \cap W = \{\vec{0}\}$ allora la somma $U + W$ è detta *somma diretta* e viene denotata con $U \oplus W$. Se inoltre $V = U \oplus W$ allora i sottospazi U e W sono detti *supplementari*.

3.2 Basi

Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} . Consideriamo l'insieme di vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V . Si dice che essi sono *linearmente dipendenti* se esiste una combinazione lineare

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \vec{0}$$

con gli scalari $a_i \in \mathbb{K}$ non tutti nulli. Diversamente essi dicono *linearmente indipendenti*. Quindi i vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono *linearmente indipendenti* se

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \vec{0} \text{ implica che } a_i = 0 \text{ per ogni } i = 1, \dots, n.$$

Poichè se $a_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$ allora banalmente $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \vec{0}$ possiamo quindi dire che i vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono *linearmente indipendenti* se l'**unica** combinazione lineare $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \vec{0}$ è quella con $a_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Definizione 3.2.1 Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme di vettori di V . Si dice che essi sono una *base finita* o semplicemente una *base* dello spazio vettoriale V se

1. $L(\{v_1, \dots, v_n\}) = V$
2. v_1, \dots, v_n sono linearmente indipendenti

Esempio 3.2.2 Sia $V = \mathbb{R}^2$ allora i vettori $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ sono una base per \mathbb{R}^2 . Più in generale se $V = \mathbb{R}^n$ allora i vettori $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, \dots, 1)$ sono una base per lo spazio \mathbb{R}^n . Infatti essi sono linearmente indipendenti e sono anche un sistema di generatori poiché ogni $(x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. L'insieme $\{e_1, e_2\}$ ($\{e_1, \dots, e_n\}$ rispettivamente) è detto *base canonica* di \mathbb{R}^2 (\mathbb{R}^n , rispettivamente).

Esempio 3.2.3 Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n} := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p(x) \leq n\}$. L'insieme $\{1, x, \dots, x^n\}$ è una base per $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ detta base canonica.

Esempio 3.2.4 Sia $V = M_n(\mathbb{R})$. Sia $E_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice con tutte le entrate nulle tranne quella al posto (i, j) che è uguale a 1. L'insieme $\{E_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$ è una base per $M_n(\mathbb{R})$ detta base canonica.

Osservazione 3.2.5 Fissata una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di un \mathbb{K} -spazio vettoriale V ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico nella base fissata, ossia se $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ e $v = \sum_{i=1}^n y_i v_i$ allora $x_i = y_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Infatti da $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i = \sum_{i=1}^n y_i v_i$ segue che $\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) v_i = \vec{0}$ e poiché l'insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ è linearmente indipendente si ha che $x_i = y_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Gli scalari x_i per $i = 1, \dots, k$ sono detti *coordinate* del vettore v nella base $\{v_1, \dots, v_k\}$.

Teorema 3.2.6 Siano $\{v_1, \dots, v_n\}, \{w_1, \dots, w_m\}$ due basi di V . Allora $n = m$.

Dimostrazione Per dimostrare che $n = m$ faremo vedere che $n < m$ dà luogo a una contraddizione e che lo stesso vale se $m < n$. Supponiamo quindi che $n < m$. Poiché $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base per V si ha che

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n \\ w_2 &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ w_m &= a_{1m}v_1 + a_{2m}v_2 + \dots + a_{nm}v_n \end{aligned} \tag{3.1}$$

D'altra parte $\{w_1, \dots, w_m\}$ sono linearmente indipendenti essendo una base per V e quindi l'equazione

$$x_1 w_1 + \dots + x_m w_m = \vec{0} \tag{3.2}$$

ammette la sola soluzione banale. Se sostituiamo 3.1 nell'equazione 3.2 si ha che

$$\begin{aligned} &x_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n) + \\ &x_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n) + \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &x_m(a_{1m}v_1 + a_{2m}v_2 + \dots + a_{nm}v_n) = \vec{0} \end{aligned}$$

ossia

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m)v_1 + \dots + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m)v_n = \vec{0}$$

Poiché i vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono linearmente indipendenti si ha che tutti i pesi della combinazione lineare devono essere nulli e quindi si ottiene il seguente sistema

Consideriamo la matrice M i cui vettori colonna sono i vettori v_1, \dots, v_n . Riduciamo M a scala per righe e sia S la matrice così ottenuta; siano inoltre j_1, \dots, j_r le colonne di S che contengono i pivots non nulli della matrice. Faremo vedere che vettori v_{j_1}, \dots, v_{j_r} sono una base per $L(B)$.

Per semplicità chiamiamo j_1, \dots, j_r , con $1, \dots, r$ e sia M_0 la sottomatrice di M i cui vettori colonna sono v_1, \dots, v_r e sia S_0 la sottomatrice di S i cui vettori colonna sono quelli che contengono i pivots. L'equazione

$$\sum_{i=1}^r x_i v_i = \vec{0}$$

ammette la sola soluzione banale. Infatti tale equazione corrisponde al sistema omogeneo $M_0 X = 0$ con $X = {}^t(x_1, \dots, x_r)$ e tale sistema ammette la sola soluzione banale perché $rg(M_0) = r$. Dunque i vettori v_1, \dots, v_r sono linearmente indipendenti.

3.4 Come completare a una base un insieme indipendente di vettori

Vogliamo ora far vedere che dato un insieme finito di vettori linearmente indipendenti è sempre possibile completare tale insieme a una base per V .

Proposizione 3.4.1 *Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} di dimensione finita. Sia $\{v_1, \dots, v_m\}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti. Allora esso è sottoinsieme di una qualche base di V .*

Dimostrazione Se $L(\{v_1, \dots, v_m\}) = V$ allora l'insieme $\{v_1, \dots, v_m\}$ è una base per V .

Se $L(\{v_1, \dots, v_m\}) \neq V$ allora esiste un vettore $u \in V - L(\{v_1, \dots, v_m\})$. Osserviamo che l'insieme $\{v_1, \dots, v_m, u\}$ è linearmente indipendente. Facciamo vedere che l'unica soluzione dell'equazione

$$\sum_{i=1}^m a_i v_i + bu = \vec{0}$$

è quella banale. Infatti se $b = 0$ allora $\sum_{i=1}^m a_i v_i + bu = \vec{0}$ ed essendo $\{v_1, \dots, v_m\}$ linearmente indipendenti ne segue che $a_i = 0$ per $i = 1, \dots, m$. Se $b \neq 0$ allora $u = -\sum_{i=1}^m b^{-1} a_i v_i$ e quindi $u \in L(\{v_1, \dots, v_m\})$, contrariamente alle ipotesi. Ora se $L(\{v_1, \dots, v_m, u\}) = V$ allora esso è una base. Diversamente aggiungiamo all'insieme $L(\{v_1, \dots, v_m, u\})$ un vettore $w \in V - L(\{v_1, \dots, v_m, u\})$. Si va avanti in questo modo fino a ottenere una base per V . Osserviamo che questo processo termina dopo un numero finito ($= \dim V - m$) di passi. \square

3.5 Equazioni parametriche e cartesiane di sottospazi

Una volta fissata una base in un \mathbb{K} -spazio vettoriale V di dimensione finita è possibile, dato un suo sottospazio W , scrivere le **equazioni parametriche e cartesiane** per W .

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base per V e sia $\{w_1, \dots, w_m\}$ una base per W . Allora $W = L(\{w_1, \dots, w_m\})$ e quindi

$$W := \{v \in V \mid v = t_1 w_1 + \dots + t_m w_m, \text{ con } t_i \in \mathbb{K}\}$$

Indichiamo con (x_1, \dots, x_n) le coordinate di un qualunque vettore $v \in V$ nella base $\{v_1, \dots, v_n\}$, similmente denotiamo con (w_i^1, \dots, w_i^n) le coordinate di w_i rispetto alla fissata base di V , per $i = 1, \dots, m$. Dunque se $v \in V$ appartiene anche a W allora in termini di coordinate rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$ si ha che $(x_1, \dots, x_n) = t_1(w_1^1, \dots, w_1^n) + \dots + t_m(w_m^1, \dots, w_m^n)$, ovvero

$$\begin{cases} x_1 = t_1 w_1^1 + \dots + t_m w_m^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n = t_1 w_1^n + \dots + t_m w_m^n \end{cases} \quad (3.4)$$

Le equazioni (3.4) sono dette *equazioni parametriche* per il sottospazio W .

Vogliamo ora determinare *equazioni cartesiane* per W . Abbiamo visto che un vettore $X = (x_1, \dots, x_n) \in V$ appartiene anche a W se esistono scalari $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{K}$ tali che $X = (x_1, \dots, x_n) = t_1(w_1^1, \dots, w_1^n) + \dots + t_m(w_m^1, \dots, w_m^n)$, ovvero se il sistema $AT = X$ ammette soluzioni, dove A è la matrice dei coefficienti del sistema (3.4), ossia la matrice i cui vettori colonna sono i vettori w_1, \dots, w_m , $T = {}^t(t_1, \dots, t_m)$ è la colonna delle incognite e $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ è la colonna dei termini noti. Il sistema $AT = X$ ammette soluzioni se e solo se $rg(A) = rg(AX)$. Ma $rg(A) = m < n$ dunque il nostro sistema sarà equivalente a un sistema in cui le ultime $n - m$ righe sono della forma $0 = f_k(x_1, \dots, x_n)$, per $k = 1, \dots, n - m$ con f_k funzioni lineari di x_1, \dots, x_n . Le equazioni

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_{n-m}(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

sono dette *equazioni cartesiane* per W .

Esempio 3.5.1 Sia $V = \mathbb{R}^5$ e sia $W = L(\{w_1, w_2\})$ dove $w_1 = (1, 1, 0, 0, 1)$, $w_2 = (1, 2, 1, 1, 0)$. Determinare equazioni parametriche e cartesiane per W .

Osserviamo che i vettori w_1, w_2 sono una base per W . Sia $X = (x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5$. Se $X \in W$ allora $(x_1, \dots, x_5) = t_1 w_1 + t_2 w_2 = t_1(1, 1, 0, 0, 1) + t_2(1, 2, 1, 1, 0)$. Dunque le equazioni parametriche per W sono

$$\begin{cases} x_1 = t_1 + t_2 \\ x_2 = t_1 + 2t_2 \\ x_3 = t_2 \\ x_4 = t_2 \\ x_5 = t_1 \end{cases}$$

Per determinare le equazioni cartesiane dobbiamo risolvere il precedente sistema di 5 equazioni nelle incognite t_1, t_2 . Dunque $x_1 = x_3 + x_5, x_2 = x_5 + 2x_3, x_3 = x_4$.

Esempio 3.5.2 Sia $V = \mathbb{R}^4$ e sia $W = L(\{w_1, w_2, w_3\})$ dove $w_1 = (1, 1, 1, 1)$, $w_2 = (0, -1, 1, 0)$, $w_3 = (0, -1, 0, 1)$. Determinare equazioni parametriche e cartesiane per W .

Osserviamo che i vettori w_1, w_2, w_3 sono una base per W . Sia $X = (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Se $X \in W$ allora $(x_1, \dots, x_4) = t_1 w_1 + t_2 w_2 + t_3 w_3 = t_1(1, 1, 1, 1) + t_2(0, -1, 1, 0) + t_3(0, -1, 0, 1)$. Dunque le equazioni parametriche per W sono

$$\begin{cases} x_1 = t_1 \\ x_2 = t_1 - t_2 - t_3 \\ x_3 = t_1 + t_2 \\ x_4 = t_1 + t_3 \end{cases}$$

Per determinare le equazioni cartesiane dobbiamo risolvere il precedente sistema di 4 equazioni nelle incognite t_1, t_2, t_3 . Con l'eliminazione di Gauss

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 1 & -1 & -1 & x_2 \\ 1 & 1 & 0 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & x_4 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & -1 & x_2 + x_3 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & -1 & x_2 + x_3 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 + x_3 + x_4 - 3x_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dunque l'equazione cartesiana per W è: $x_2 + x_3 + x_4 - 3x_1 = 0$.

3.6 Relazione di Grassmann

Dati due sottospazi vettoriali U, W di dimensione finita di un \mathbb{K} - spazio vettoriale V , vogliamo vedere la relazione che intercorre tra le dimensioni dei sottospazi $U, W, U+W, U \cap W$. Tale relazione va sotto il nome di relazione di Grassmann.

Proposizione 3.6.1 (*Relazione di Grassmann*) Siano $U, W \subset V$ sottospazi di dimensione finita di uno spazio vettoriale V . Allora i sottospazi $U \cap W$ e $U + W$ hanno dimensione finita e inoltre vale la seguente relazione

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Dimostrazione Sia $\dim U = h$ e sia $\dim W = k$. Notiamo che essendo $U \cap W \subset U$ anch'esso ha dimensione finita, sia $\dim U \cap W = s$ e sia $\{u_1, \dots, u_s\}$ una base per $U \cap W$. Estendiamo tale base a una base per U e a una base per W e siano esse $\{u_1, \dots, u_s, u_{s+1}, \dots, u_h\}$ e $\{u_1, \dots, u_s, w_1, \dots, w_{k-s}\}$, rispettivamente. Se facciamo vedere che l'insieme dei vettori $\{u_1, \dots, u_s, u_{s+1}, \dots, u_h, w_1, \dots, w_{k-s}\}$ sono linearmente indipendenti e generano $U + W$ allora abbiamo dimostrato la proposizione.

Cominciamo col dimostrare che i vettori $\{u_1, \dots, u_s, u_{s+1}, \dots, u_h, w_1, \dots, w_{k-s}\}$ sono linearmente indipendenti. Occorre provare che l'equazione

$$\sum_{i=1}^h a_i u_i + \sum_{j=1}^{k-s} b_j w_j = \vec{0} \quad (3.5)$$

ammette la sola soluzione banale. Da (3.5) segue che $\sum_{i=1}^h a_i u_i = -\sum_{j=1}^{k-s} b_j w_j$ e quindi il vettore $-\sum_{j=1}^{k-s} b_j w_j \in U \cap W$, pertanto $-\sum_{j=1}^{k-s} b_j w_j = \sum_{j=1}^s c_j u_j$. Da qui segue che

$$\sum_{j=1}^{k-s} b_j w_j + \sum_{j=1}^s c_j u_j = \vec{0}$$

ed essendo tali vettori linearmente indipendenti (perché base per W) ne segue che $c_j = 0$ per $j = 1, \dots, s$ e $b_j = 0$ per $j = 1, \dots, k-s$. Sostituendo tali valori nell'equazione (3.5) ne segue che $\sum_{i=1}^h a_i u_i = \vec{0}$ e quindi $a_i = 0$ per $i = 1, \dots, h$, essendo $\{u_1, \dots, u_s, u_{s+1}, \dots, u_h\}$ una base per U . Da qui segue la indipendenza lineare dei vettori $\{u_1, \dots, u_s, u_{s+1}, \dots, u_h, w_1, \dots, w_{k-s}\}$.

Si vede facilmente che i vettori $\{u_1, \dots, u_s, u_{s+1}, \dots, u_h, w_1, \dots, w_{k-s}\}$ sono un sistema di generatori per $U + W$. Infatti

$$u + w = \sum_{i=1}^h a_i u_i + \sum_{i=1}^s b_i u_i + \sum_{j=1}^{k-s} c_j w_j \in \langle u_1, \dots, u_s, u_{s+1}, \dots, u_h, w_1, \dots, w_{k-s} \rangle$$

Dunque $\dim(U + W) = h + k - s = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$. □

Esercizio 3.6.2 Si considerino i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^4 :

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0\}, W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y, z = t\}.$$

Provare che

- 1) U, W sono sottospazi di \mathbb{R}^4
- 2) Determinare una base per U e W .
- 3) Determinare una base per $U \cap W$ e $U + W$.

Per il punto 1) basta verificare che U e W sono non vuoti e chiusi rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per uno scalare. Verifichiamolo solo per U . Osserviamo che $(1, 1, 2, 0) \in U$ e dunque esso è non vuoto. Siano ora $(x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2) \in U$ allora $x_1 + y_1 - z_1 = 0$ e $x_2 + y_2 - z_2 = 0$ da cui segue che $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = 0$ e pertanto $(x_1, y_1, z_1, t_1) + (x_2, y_2, z_2, t_2) \in U$. Si ha inoltre che $k(x, y, z, t) \in U$ per ogni $k \in \mathbb{R}$ e per ogni $(x, y, z, t) \in U$ essendo $kx + ky - kz = 0$.

Per il punto 2) osserviamo che $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = z - y\} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid (x, y, z, t) = (z - y, y, z, t)\} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid (x, y, z, t) = z(1, 0, 1, 0) + y(-1, 1, 0, 0) + t(0, 0, 0, 1)\}$. Dunque i vettori $u_1 = (1, 0, 1, 0), u_2 = (-1, 1, 0, 0), u_3 = (0, 0, 0, 1)$ sono una base per U . In modo analogo si vede che i vettori $w_1 = (1, 1, 0, 0), w_2 = (0, 0, 1, 1)$ sono una base per W .

Per il punto 3) osserviamo che se $(x, y, z, t) \in U \cap W$ allora $(x, y, z, t) = (z - y, y, z, t)$ in quanto vettore in U e $(x, y, z, t) = (x, x, z, z)$ in quanto vettore in W . Dunque $z = t, x = y, y = z/2$ ovvero, $z = t, y = t/2, x = t/2$ e quindi il vettore generico dell'intersezione è della forma $(x, y, z, t) = (t/2, t/2, t, t) = t(1/2, 1/2, 1, 1)$. Dunque il vettore $(1/2, 1/2, 1, 1)$ è una base per $U \cap W$. Per determinare una base per $U + W$ osserviamo che i vettori $\{u_1, u_2, u_3, w_1, w_2\}$ sono un sistema di generatori per $U + W$. Basta quindi vedere quali di questi sono linearmente indipendenti. Si ha che i vettori $\{u_1, u_2, u_3, w_1\}$, oppure i vettori $\{u_1, u_2, u_3, w_2\}$ sono linearmente indipendenti e dunque come base per $U + W$ possiamo prendere o il primo insieme di vettori o il secondo.

3.7 Spazio delle righe (colonne) di una matrice

Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ una matrice $m \times n$ a entrate reali,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_m \end{pmatrix} = (A^1 \ \dots \ A^n)$$

Sia

- $row(A) := L(\{A_1, \dots, A_m\}) \subset \mathbb{R}^n$ lo spazio generato dalle righe di A
- $col(A) := L(\{A^1, \dots, A^n\}) \subset \mathbb{R}^m$ lo spazio generato dalle colonne di A .

Facciamo vedere che tali sottospazi restano invariati quando facciamo operazioni elementari sulle righe(o colonne) di A .

Lemma 3.7.1 Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

- 1) Se B è la matrice ottenuta da A con operazioni elementari sulle righe di A allora $row(B) = row(A)$.
- 2) Se B è la matrice ottenuta da A con operazioni elementari sulle colonne di A allora $col(B) = col(A)$.

Dimostrazione La 1) è ovvia se facciamo operazioni elementari sulle righe di A del I e II tipo. Dimostriamo che lo stesso vale se facciamo operazioni elementari del III tipo. Sia B la matrice ottenuta da A sostituendo la j -esima riga A_j di A con $A_j + kA_i$, $i \neq j$ e quindi $B_t = A_t$ per $t \neq j$ e $B_j = A_j + kA_i$.

Sia $L \in row(B)$, quindi $L = x_1B_1 + \dots + x_iB_i + \dots + x_jB_j + \dots + x_mB_m = x_1A_1 + \dots + x_iA_i + \dots + x_j(A_j + kA_i) + \dots + x_mB_m \in row(A)$.

Similmente dato $M \in row(A)$, $M = y_1A_1 + \dots + y_iA_i + \dots + y_jA_j + \dots + y_mA_m = y_1B_1 + \dots + y_iB_i + \dots + y_j(B_j - kA_i) + \dots + y_mB_m = y_1B_1 + \dots + y_iB_i + \dots + y_j(B_j - kB_i) + \dots + y_mB_m \in row(B)$.

In modo analogo si procede sulle colonne. □

In particolare, se $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e S è una sua riduzione a scala allora $\text{row}(A) = \text{row}(S) := L(\{S_1, \dots, S_r\})$, con S_1, \dots, S_r le righe non nulle di S (che sono linearmente indipendenti). Dunque $\dim \text{row}(A) = r$, dove $r = \text{rango per righe}$ di A .

Definizione 3.7.2 Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, si definisce *rango per colonne* della matrice A , la dimensione del sottospazio $\text{col}(A)$.

Vedremo ora che data una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ i sottospazi $\text{row}(A) \subset \mathbb{R}^n$ e $\text{col}(A) \subset \mathbb{R}^m$ hanno la stessa dimensione. Da ciò segue che il *rango per righe* di A coincide con il *rango per colonne* di A e tale numero viene detto *rango* della matrice A e viene denotato con $\text{rg}(A)$.

Teorema 3.7.3 (*Teorema del rango*) Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ una matrice $m \times n$. Allora

$$\dim \text{row}(A) = \dim \text{col}(A) = \text{rg}(A)$$

Dimostrazione Sia S una riduzione a scala per righe della matrice A e siano j_1, \dots, j_r le colonne di S che contengono i pivots non nulli. Allora le colonne A^{j_1}, \dots, A^{j_r} sono una base per il sottospazio $\text{col}(A)$. Infatti abbiamo già visto in 3.3 che i vettori colonna A^{j_1}, \dots, A^{j_r} sono linearmente indipendenti. Per provare che essi sono una base per lo spazio $\text{col}(A)$ occorre far vedere che comunque prendiamo una colonna A^k con k diverso da j_1, \dots, j_r si ha che l'insieme $\{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}, A^k\}$ è un insieme linearmente dipendente. Consideriamo l'equazione

$$x_{j_1} A^{j_1} + \dots + x_{j_r} A^{j_r} + x A^k = \vec{0} \tag{3.6}$$

Tale equazione dà luogo a un sistema di m equazioni in $r + 1$ incognite con matrice dei coefficienti la matrice $A' = (A^{j_1} \dots A^{j_r} A^k)$. Tale sistema è equivalente al sistema la cui matrice dei coefficienti è la matrice $S' = (S^{j_1} \dots S^{j_r} S^k)$, S' è una riduzione a scala per righe della matrice A' . Poiché S' ha r righe non nulle ne segue che l'equazione (3.6) non ammette la sola soluzione banale e perciò l'insieme $\{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}, A^k\}$ è un insieme linearmente dipendente. Dunque $\{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}\}$ è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti nell'insieme $\{A^1, \dots, A^n\}$ e pertanto esso è una base per lo spazio $\text{col}(A)$ e da ciò segue che $\dim \text{col}(A) = r = \dim \text{row}(A)$. Denotiamo r con $\text{rg}(A)$. \square

Esempio 3.7.4 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Trovare una base per $\text{row}(A)$ e una base per $\text{col}(A)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & 9 & -6 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -12 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

L'insieme $\{(1, 2, -4, 3, 5), (0, 2, -6, 2, 4), (0, 0, -12, 1, 2)\}$ è una base per $\text{row}(A)$ e l'insieme $\{(1, 1, 3), (2, 0, -1), (-4, 2, 1)\}$ è una base per $\text{col}(A)$.

Teorema 3.7.5 (Rouché-Capelli) Sia $AX = b$ un sistema di m equazioni lineari nelle n incognite x_1, \dots, x_n . Esso è compatibile se e solo se $rg(A) = rg(Ab)$, dove Ab indica la matrice completa del sistema.

Dimostrazione Supponiamo che il sistema sia compatibile, ovvero che esista una n -upla c_1, \dots, c_n con $AC = b$, dove $C = {}^t(c_1, \dots, c_n)$. Osserviamo che AC può essere scritto come $AC = c_1A^1 + \dots + c_nA^n$ e quindi il vettore $b = AC \in col(A) = \langle A^1, \dots, A^n \rangle$ e pertanto $rg(A) = rg(Ab)$. Viceversa se $rg(A) = rg(Ab)$ allora la colonna b è dipendente con le colonne A^1, \dots, A^n e dunque esistono scalari c_1, \dots, c_n tali che $b = c_1A^1 + \dots + c_nA^n$. Da cui segue che la n -upla c_1, \dots, c_n è una soluzione del sistema $AX = b$. \square

3.8 Esercizi

1. Si considerino i seguenti sottospazi di $M_n(\mathbb{K})$

$$\mathcal{S} := \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid A = {}^tA\}$$

$$\mathcal{A} := \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid A = -{}^tA\}$$

- (a) Trovare la dimensione dei sottospazi \mathcal{S} e \mathcal{A} .
 (b) Verificare che \mathcal{S} e \mathcal{A} sono supplementari, ovvero $M_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

2. In $M_3(\mathbb{R})$ si considerino i seguenti sottoinsiemi:

$$U := \{X \in M_3(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}, \quad W := \{Z \in M_3(\mathbb{R}) \mid AZ = -ZA\}, \quad \text{dove}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Provare che U e W sono sottospazi vettoriali di $M_3(\mathbb{R})$.
 (b) Determinare una base per U e W .
 (c) Dire, giustificando la risposta, se $U + W$ coincide con tutto $M_3(\mathbb{R})$.

3. Sia U l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

- (a) Provare che U è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 .
 (b) Determinare una base per U .
 (c) Completare la base di U trovata a una base per \mathbb{R}^4 .

4. In \mathbb{R}^4 si considerino i seguenti sottospazi:

$$U = L(\{u_1, u_2, u_3\}), \quad \text{dove } u_1 = (0, 1, -1, 0), \quad u_2 = (1, -1, 0, 0), \quad u_3 = (1, 1, -2, 0)$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = t - u + 2v, x_2 = t, x_3 = u, x_4 = v, t, u, v \in \mathbb{R}\}.$$

- (a) Determinare una base per $U \cap V$ e $U + V$, rispettivamente.
 (b) Dire se la somma $U + V$ è somma diretta.

5. In \mathbb{R}^4 si considerino i sottospazi:

$$W = L(\{w_1, w_2, w_3\}), \text{ dove } w_1 = (1, -1, 0, 0), w_2 = (0, 1, 1, 0), w_3 = (0, 3, 0, 1)$$

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\}.$$

Determinare una base per $U \cap W$ e $U + W$, rispettivamente.

6. Sia $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 . Sia $V \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ il sottospazio dei polinomi che si annullano in $x = 0$. Trovare una base per V .
7. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Supponiamo che $A^3 = 0$ e $A^2 \neq 0$. Provare che l'insieme $\{I, A, A^2\} \subset M_n(\mathbb{R})$ è un insieme linearmente indipendente.
8. In \mathbb{R}^4 si consideri il sottospazio V di equazioni

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0,$$

e il sottospazio U generato dai vettori $u_1 = (1, 0, 1, 0)$, $u_2 = (1, -1, 0, 1)$, $u_3 = (-1, 3, 2, -3)$.

- (a) Determinare una base per $U \cap V$ e una base per $U + V$.
 (b) Determinare equazioni parametriche e cartesiane per $U \cap V$ e $U + V$.
9. Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^3 si considerino i vettori $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (1, 2, 0)$ e sia $U = L(\{u_1, u_2\})$. Si consideri il sottospazio $W_t := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - ty + z = 0\}$, per ogni $t \in \mathbb{R}$.
- (a) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, la dimensione dei sottospazi $U + W_t$ e $U \cap W_t$.
 (b) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, equazioni cartesiane per $U \cap W_t$.
10. Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^4 si considerino i vettori $u_1 = (1, 2, 1, -1)$, $u_2 = (0, -1, 0, 0)$, $u_3 = (t, t, -1, t)$, $u_4 = (-1, 0, t, 1)$.
- (a) Determinare la dimensione del sottospazio $U = L(\{u_1, u_2, u_3, u_4\})$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.
 (b) Per i valori di t per i quali la dimensione non è massima determinare equazioni cartesiane per U e una sua base.
 (c) Sia $V = L(\{u_1, u_2\})$. Determinare un sottospazio W di \mathbb{R}^4 in modo tale che \mathbb{R}^4 risulti somma diretta di W e V .
11. In \mathbb{R}^3 si considerino i seguenti sottoinsiemi:
 $U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 4z = 0\}$, $W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5y - 3z = 0\}$.
- (a) Dire se la somma $U + W$ è diretta.

- (b) Trovare una base di U .
- (c) Estendere la base di U trovata a una base di \mathbb{R}^3 .

12. In \mathbb{R}^3 si considerino i seguenti sottospazi

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + ky - z = 0\},$$
$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y = 0, kx - z = 0\}$$

dove $k \in \mathbb{R}$.

- (a) Determinare $U \cap W$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.
 - (b) Determinare una base per U , W , $U \cap W$ e $U + W$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.
 - (c) Dire se esistono valori del parametro k per i quali $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.
13. In $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$, lo spazio dei polinomi di grado ≤ 3 , si consideri il sottoinsieme

$$U := \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \mid p(0) = p(1) = 0\}$$

- (a) Provare che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.
 - (b) Determinare una base per U .
 - (c) Completare la base di U trovata a una base per $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.
14. Siano A, B due matrici non nulle in $M_n(\mathbb{R})$ tali che A è simmetrica e B è antisimmetrica. Provare che l'insieme $\{A, B\}$ è un insieme linearmente indipendente.

Capitolo 4

Applicazioni lineari

Dati due \mathbb{K} -spazi vettoriali V e W e data un'applicazione $F : V \rightarrow W$ noi siamo interessati a quelle applicazioni che conservano la struttura di spazio vettoriale. Tali applicazioni sono dette *applicazioni lineari*. Vedremo che se gli spazi vettoriali sono di dimensione finita tali applicazioni lineari non sono altro che *trasformazioni matriciali*. Tali applicazioni lineari trasformano un segmento in un segmento (una retta in una retta) e perciò esse vengono utilizzate nella grafica al computer.

4.1 Applicazioni lineari

Prima di dare la definizione di applicazione lineare in generale, presentiamo alcuni esempi di trasformazioni geometriche del piano.

4.1.1 Esempi di trasformazioni geometriche del piano

Esempio 4.1.1 Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proiezione sull'asse delle x .

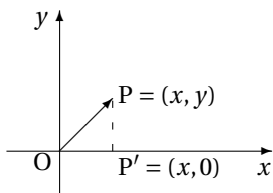


Figura 4.1: Proiezione sull'asse delle x

Dunque $P' = F(P) = F((x, y)) = (x, 0)$. Osserviamo che

$$F((x, y)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

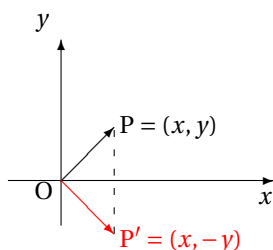


Figura 4.2: Riflessione intorno all'asse delle x

Esempio 4.1.2 Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la riflessione intorno all'asse delle x .

Dunque $F((x, y)) = (x, -y)$ e quindi $F((x, y)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Esempio 4.1.3 Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotazione antioraria di $\frac{\pi}{2}$ intorno all'origine.

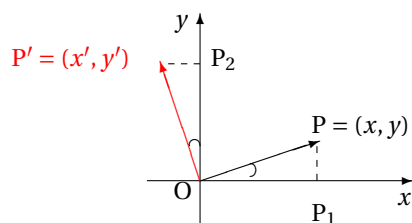


Figura 4.3: Rotazione antioraria di $\frac{\pi}{2}$ intorno all'origine

Sia P un generico punto del piano e sia $P' = F(P)$. I triangoli OPP_1 $OP'P_2$ sono congruenti e dunque $\|OP_1\| = \|OP_2\|$, ossia $x = y'$ e $\|PP_1\| = \|P'P_2\|$, ossia $y = -x'$ e pertanto $F((x, y)) = (-y, x)$. Osserviamo che

$$F((x, y)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Gli esempi dati mostrano che le matrici 2×2 possono essere viste in modo naturale come trasformazioni geometriche del piano.

4.1.2 Esempi di applicazioni lineari

Diamo ora la definizione di applicazione lineare e presentiamo degli esempi.

Definizione 4.1.4 Siano V e W due spazi vettoriali su un campo \mathbb{K} e sia $F : V \rightarrow W$ un'applicazione. F si dice lineare se

1. Per ogni $v_1, v_2 \in V$ si ha che $F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2)$
2. Per ogni $k \in \mathbb{K}$ e per ogni $v \in V$ si ha che $F(kv) = kF(v)$

Definizione 4.1.5 Un'applicazione lineare di uno spazio vettoriale in sé stesso è detta *endomorfismo*.

Esempio 4.1.6 Diamo ora ulteriori esempi di applicazioni lineari

- 1) $F: V \rightarrow W$, con F applicazione nulla
- 2) $F: V \rightarrow V$, con F applicazione identica
- 3) $F: V \rightarrow V$, con $F(v) = kv$ con $k \in \mathbb{K}$. Tale F è detta *omotetia*. Se $k = -1$ F è la simmetria di V rispetto all'origine.
- 4) Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, A induce un'applicazione lineare $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, così definita $F(X) = AX$ per ogni $X \in \mathbb{R}^n$.
- 5) $F: M_{m,n}(\mathbb{K}) \rightarrow M_{n,m}(\mathbb{K})$, con $F(A) = {}^tA$
- 6) $F: M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, con $F(A) = \text{Tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$
- 7) Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale, siano $U, W \subset V$ sottospazi vettoriali tali che $V = U \oplus W$ e dunque ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$. Sia $F: V \rightarrow W$, con $F(u + w) := w$. F è detta *proiezione* di V su W .
Se V è lo spazio ordinario \mathbb{R}^3 e se $\mathbb{R}^3 = \langle \vec{u} \rangle \oplus \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle = \langle \vec{u} \rangle \oplus W$ allora F è detta proiezione di V su W lungo la direzione \vec{u} .

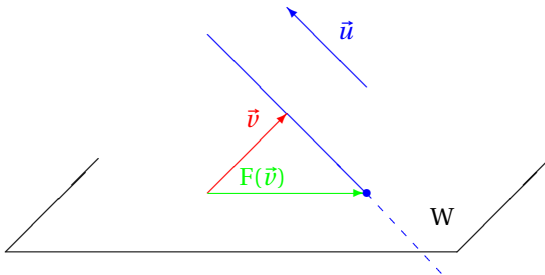


Figura 4.4: Proiezione di V su W lungo la direzione \vec{u} .

Osservazione 4.1.7 Sia $F: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare, allora $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Infatti $F(\vec{0}) = F(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot F(\vec{0}) = \vec{0}$.

Definizione 4.1.8 Siano V e W due spazi vettoriali su un campo \mathbb{K} e sia $F: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. L'insieme

$$N(F) := \{v \in V | F(v) = \vec{0}\}$$

è detto *nucleo* di F .

Proposizione 4.1.9 Siano V e W due \mathbb{K} -spazi vettoriali e sia $F: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare.

1) Il nucleo di F , $N(F) \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale di V .

2) L'immagine di F , $Im(F) \subseteq W$ è un sottospazio vettoriale di W .

Dimostrazione Verificare che per ogni $u, v \in N(F)$ e per ogni $k \in \mathbb{K}$ si ha che $u + v \in N(F)$ e $kv \in N(F)$. Infatti $F(u + v) = F(u) + F(v) = \vec{0}$, similmente $F(ku) = k \cdot F(u) = k \cdot \vec{0} = \vec{0}$. In modo analogo si dimostra anche il punto 2). \square

Definizione 4.1.10 Sia $F : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare tra \mathbb{K} -spazi vettoriali. Se $N(F)$ e $Im(F)$ hanno dimensione finita allora $dim N(F)$ è detta *nullità* di F e $dim Im(F)$ è detto *rango* di F .

Osservazione 4.1.11 Sia $F : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare tra \mathbb{K} -spazi vettoriali. Se e_1, \dots, e_n è una base per V allora

$$Im(F) = L(\{F(e_1), \dots, F(e_n)\}).$$

Infatti

$$\begin{aligned} Im(F) &:= \{w \in W \mid w = F(v) \text{ per qualche } v \in V\} = \{w \in W \mid w = F(\sum_{i=1}^n x_i e_i), x_i \in \mathbb{K}\} \\ &= L(\{F(e_1), \dots, F(e_n)\}). \end{aligned}$$

Esercizio 4.1.12 Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita

$$F((x, y, z)) := (x, x, x).$$

Determinare il nucleo di F , l'immagine di F e le loro dimensioni.

$N(F) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, x, x) = (0, 0, 0)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ e quindi $dim N(F) = 2$.

$$Im(F) := \{(x', y', z') \in \mathbb{R}^3 \mid (x', y', z') = (x, x, x)\} = \{(x', y', z') \in \mathbb{R}^3 \mid x' = z', y' = z'\}$$

e quindi $dim Im(F) = 1$.

Proposizione 4.1.13 (*Caratterizzazione di applicazioni lineari iniettive*) Sia $F : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare tra \mathbb{K} -spazi vettoriali. F è iniettiva se e solo se $N(F) = \{\vec{0}\}$.

Dimostrazione Sia F iniettiva. Supponiamo per assurdo che $N(F) \neq \{\vec{0}\}$ e sia $v \in N(F)$ con $v \neq \vec{0}$. Allora $F(v) = \vec{0}$ e $F(\vec{0}) = \vec{0}$ e per l'iniettività di F ne segue che $v = \vec{0}$. Viceversa supponiamo che $N(F) = \{\vec{0}\}$ e facciamo vedere che F è iniettiva. Se $F(v) = F(u)$ allora $F(v - u) = \vec{0}$ e dunque $v - u \in N(F)$ e quindi $v = u$. \square

Teorema 4.1.14 (*Teorema della nullità più il rango*) Sia $F : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare tra \mathbb{K} -spazi vettoriali con $dim V = n$. Allora $N(F)$ e $Im(F)$ hanno dimensione finita e inoltre

$$dim V = dim N(F) + dim Im(F).$$

Dimostrazione Se $N(F) = V$ l'asserto è ovvio. Supponiamo che $N(F) \subset V$ e sia $\{v_1, \dots, v_s\}$ una base per $N(F)$. Estendiamo tale base a una base per V e sia essa $\{v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n\}$. Basta provare che i vettori $F(v_{s+1}), \dots, F(v_n)$ sono una base per $Im(F)$. Da (4.1.11) segue che

$$Im(F) = L(\{F(v_1), \dots, F(v_s), F(v_{s+1}), \dots, F(v_n)\}) = L(\{F(v_{s+1}), \dots, F(v_n)\})$$

e pertanto i vettori $F(v_{s+1}), \dots, F(v_n)$ sono un sistema di generatori per $Im(F)$. Vediamo che essi sono anche linearmente indipendenti e cioè che l'equazione

$$\sum_{i=s+1}^n x_i F(v_i) = \vec{0}$$

ammette la sola soluzione banale. Per la linearità di F si ha che $\sum_{i=s+1}^n x_i F(v_i) = F(\sum_{i=s+1}^n x_i v_i) = \vec{0}$ da cui segue che il vettore $\sum_{i=s+1}^n x_i v_i \in N(F)$ e quindi $\sum_{i=s+1}^n x_i v_i = \sum_{i=1}^s x_i v_i$, ossia $\sum_{i=s+1}^n x_i v_i - \sum_{i=1}^s x_i v_i = \vec{0}$. Essendo questa una combinazione lineare di vettori di una base che dà il vettore si ha che tutti i pesi della combinazione lineare sono nulli e pertanto anche x_{s+1}, \dots, x_n e quindi $F(v_{s+1}), \dots, F(v_n)$ sono linearmente indipendenti. \square

4.1.3 Alcune proprietà delle applicazioni lineari

Proposizione 4.1.15 *Sia $F : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare tra \mathbb{K} -spazi vettoriali. Siano $v_1, \dots, v_n \in V$ e siano $w_i = F(v_i)$ per $i = 1, \dots, n$. Se v_1, \dots, v_n sono linearmente dipendenti allora w_1, \dots, w_n sono linearmente dipendenti.*

Dimostrazione Se v_1, \dots, v_n sono linearmente dipendenti allora esiste una combinazione lineare non banale, $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ che dà il vettore nullo, ossia $\sum_{i=1}^n a_i v_i = \vec{0}$ con non tutti gli a_i nulli. Applicando F abbiamo che $F(\sum_{i=1}^n a_i v_i) = F(\vec{0})$ e per la linearità di F si ha che $\sum_{i=1}^n a_i F(v_i) = \vec{0}$, ossia $\sum_{i=1}^n a_i w_i = \vec{0}$, con a_i non tutti nulli. \square

Proposizione 4.1.16 *Siano V e W \mathbb{K} -spazi vettoriali, sia $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ una base di V e siano $w_1, \dots, w_n \in W$ qualsiasi. Esiste un'unica applicazione lineare $F : V \rightarrow W$ tale che $F(v_i) = w_i$ per $i = 1, \dots, n$.*

Dimostrazione Se F esiste essa è unica. Infatti se $v \in V$ allora $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ e quindi $F(v) = F(\sum_{i=1}^n x_i v_i) = \sum_{i=1}^n x_i F(v_i) = \sum_{i=1}^n x_i w_i$ e poiché x_1, \dots, x_n sono unici allora F è unica.

Facciamo vedere che F esiste. Infatti definiamo $F(v) = F(\sum_{i=1}^n x_i v_i) := \sum_{i=1}^n x_i w_i$. Si verifica facilmente che F è lineare. \square

Osservazione 4.1.17 *Siano V e W \mathbb{K} -spazi vettoriali e sia $F : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare biettiva. Allora anche l'applicazione $F^{-1} : W \rightarrow V$ è lineare.*

Per ogni $w_1, w_2 \in W$ siano $v_1 = F^{-1}(w_1), v_2 = F^{-1}(w_2)$. Allora

$$\begin{aligned} F^{-1}(w_1 + w_2) &= F^{-1}(F(v_1) + F(v_2)) = F^{-1}(F(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 \\ &= F^{-1}(w_1) + F^{-1}(w_2). \end{aligned}$$

Inoltre per ogni $k \in \mathbb{K}$ e per ogni $w \in W$ si ha che

$$F^{-1}(kw) = F^{-1}(kF(v)) = F^{-1}(F(kv)) = kv = kF^{-1}(w).$$

Definizione 4.1.18 Siano V e W \mathbb{K} -spazi vettoriali. Essi si dicono *isomorfi* se esiste un'applicazione lineare biiettiva $F: V \rightarrow W$. In tal caso si scrive $V \simeq W$ e l'applicazione F si dice *isomorfismo*.

Osservazione 4.1.19 Nella definizione di spazi vettoriali isomorfi è sufficiente richiedere che esista un'applicazione lineare biiettiva F tra essi. Infatti da (4.1.17) segue che anche F^{-1} è lineare e dunque F è un isomorfismo.

Teorema 4.1.20 Siano V e W \mathbb{K} -spazi vettoriali di dimensione finita. Allora si ha che

$$V \simeq W \text{ se e solo se } \dim V = \dim W.$$

Dimostrazione Supponiamo che $V \simeq W$. Allora esiste un'applicazione lineare biiettiva $F: V \rightarrow W$, ovvero un isomorfismo. Dal teorema della nullità più il rango, (4.1.14), segue che $\dim V = \dim N(F) + \dim \text{Im}(F) = \dim W$ essendo F un isomorfismo.

Viceversa sia $\dim V = \dim W = n$ e sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base per V e sia $\{w_1, \dots, w_n\}$ una base per W . Sia $F: V \rightarrow W$ un'applicazione così definita $F(e_i) = w_i$ per $i = 1, \dots, n$. Da (4.1.16) sappiamo che una tale F è lineare ed è unica. Poiché $\text{Im}(F) = L\{F(e_1), \dots, F(e_n)\} = L\{w_1, \dots, w_n\} = W$ ne segue che F è suriettiva. Inoltre dal teorema (4.1.14) ne segue che F è iniettiva e pertanto essa è un isomorfismo. \square

4.1.4 Esercizi

1. Dire quali delle seguenti applicazioni sono lineari

- (a) $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione così definita $F((x, y, z)) := (x + 1, y)$
- (b) $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione così definita $F(x) := (4x, -x)$
- (c) $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione così definita $F((x, y)) := |x| + |y|$
- (d) $F: M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ l'applicazione così definita $F(A) := \det(A)$.

4.2 Matrice associata a un'applicazione lineare

Sia $F: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare di \mathbb{K} -spazi vettoriali, sia $\dim V = n$ e $\dim W = m$. Vedremo che è possibile associare a F una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Per fare ciò occorre fissare una base per V e una base per W .

Sia dunque $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ una base per V e sia $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ una base per W . Ne segue che

$$F(E_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{m1}e_m$$

$$F(E_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{m2}e_m$$

.

.

.

$$F(E_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{mn}e_m$$

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$$

è detta matrice associata a F nelle basi fissate. Essa viene anche denotata con $M_E^E(F)$.

Osserviamo che se X è un generico vettore di V allora $X = \sum_{i=1}^n x_i E_i$ e quindi X può essere identificato con (x_1, \dots, x_n) , un vettore di \mathbb{K}^n . Calcoliamo $F(X)$, l'immagine di X via F

$$\begin{aligned} F(X) &= F\left(\sum_{i=1}^n x_i E_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i F(E_i) = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} e_j\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_{1i} x_i\right) e_1 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^n a_{mi} x_i\right) e_m \end{aligned} \tag{4.1}$$

Sia $Y = F(X)$, allora $Y = \sum_{j=1}^m y_j e_j$ dove $y_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i$ e dunque da (4.1) si ha che

$$Y = AX.$$

Osservazione 4.2.1 Se il dominio e il codominio di un'applicazione lineare F è lo stesso allora, di solito, si prende la stessa base sia nel dominio che nel codominio.

Esercizio 4.2.2 Sia $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare così definita

$$F((x, y)) = (2x + y, x - y).$$

Scrivere la matrice associata a F nella base canonica.

Sia $\{e_1, e_2\}$ la base canonica di \mathbb{R}^2 . Poiché $F(e_1) = F((1, 0)) = (2, 1)$, $F(e_2) = F((0, 1)) = (1, -1)$, la matrice associata a F nella base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4.2.3 Sia $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita

$$F(e_1) = (3, 2, 1), F(e_2) = (-1, 2, -3), F(e_3) = (2, 4, -2).$$

1. Scrivere la matrice associata a F nella base canonica.
2. Calcolare $F((5, 1, 1))$.

Poiché $F(e_1) = 3e_1 + 2e_2 + e_3$, $F(e_2) = -e_1 + 2e_2 - 3e_3$, $F(e_3) = 2e_1 + 4e_2 - 2e_3$, la matrice associata a F nella base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Inoltre

$$F((5, 1, 1)) = A \cdot {}^t(511) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4.2.4 Sia $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita

$$F(1, 0, 0) = (3, 1, 1), F(1, -1, 1) = (3, -3, 3), F(1, 0, 1) = (4, 2, 4).$$

1. Scrivere la matrice associata a F nella base canonica.
2. Sia $W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Dire, giustificando la risposta, se $F(W) = W$.

Poiché $F(1, 0, 0) = (3, 1, 1)$, $F(1, -1, 1) = (3, -3, 3)$, $F(1, 0, 1) = (4, 2, 4)$ questo equivale a dire che $F(e_1) = 3e_1 + e_2 + e_3$, $F(e_1 - e_2 + e_3) = 3e_1 - 3e_2 + 3e_3$; $F(e_1 + e_3) = 4e_1 + 2e_2 + 4e_3$. Usando la linearità di F si ha che

$$\begin{cases} F(e_1) = 3e_1 + e_2 + e_3 \\ F(e_1) - F(e_2) + F(e_3) = 3e_1 - 3e_2 + 3e_3 \\ F(e_1) + F(e_3) = 4e_1 + 2e_2 + 4e_3 \end{cases} \quad (4.2)$$

Per scrivere la matrice associata a F nella base canonica si può risolvere il sistema (4.2) nelle incognite $F(e_1)$, $F(e_2)$, $F(e_3)$ e si ottiene $F(e_1) = 3e_1 + 2e_2 + e_3$, $F(e_2) = e_1 + 5e_2 + e_3$, $F(e_3) = e_1 + e_2 + 3e_3$ e dunque

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Sappiamo che $F(W) = W$ vuol dire $F(W) \subseteq W$ e $W \subseteq F(W)$. Sia $(x, y, z) \in W$ allora $(x, y, z) = (-y - z, y, z)$ e dunque $F((x, y, z)) = F((-y - z, y, z))$,

$$F((-y - z, y, z)) = A {}^t(-y - z, y, z) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - 2z \\ 4y \\ 2z \end{pmatrix}$$

quest'ultimo vettore, in generale, non appartiene a W , basta per esempio prendere quello che si ottiene per $z = 0$.

Siano $F: V \rightarrow W$ e $G: W \rightarrow U$ applicazioni lineari, siano $\{v_1, \dots, v_n\}$, $\{w_1, \dots, w_m\}$, $\{u_1, \dots, u_s\}$ basi di V, W, U rispettivamente e siano $A = M_V^W(F)$, $B = M_W^U(G)$ le matrici associate a F e G rispettivamente nelle basi fissate. Allora la matrice associata alla composizione $G \circ F$, ovvero $M_V^U(G \circ F)$ è la matrice $BA = M_W^U(G) \cdot M_V^W(F)$.

4.3 Cambi di Base

In \mathbb{R}^2 fissiamo la base canonica $\{e_1, e_2\}$ e la base $\{v_1, v_2\}$. Siano $RA(O; e_1, e_2)$ e $RA(O; v_1, v_2)$ i riferimenti affini associati alle due basi e siano (x, y) e (x', y') le coordinate relative ai due riferimenti (vedasi Definizione 8.1.3). Sia $P \in \mathbb{R}^2$, allora il vettore $\vec{OP} = x'v_1 + y'v_2$ nella base $\{v_1, v_2\}$ e $\vec{OP} = xe_1 + ye_2$ nella base $\{e_1, e_2\}$.

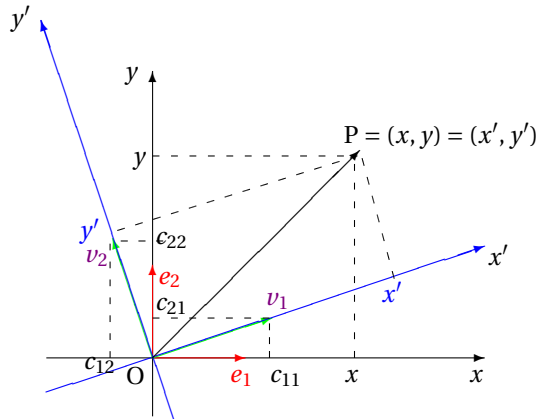


Figura 4.5: Cambi di base

Se esprimiamo la base $\{v_1, v_2\}$ nella base $\{e_1, e_2\}$ otteniamo

$$\begin{cases} v_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 \\ v_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 \end{cases} \quad (4.3)$$

La matrice

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

è detta *matrice del cambio di base*. La matrice C viene anche indicata con $M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{e}}(id)$, dove $\mathbf{e} = \{e_1, e_2\}$, $\mathbf{v} = \{v_1, v_2\}$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{id} & \mathbb{R}^2 \\ \{v_1, v_2\} & M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{e}}(id) & \{e_1, e_2\} \end{array}$$

Tale matrice $M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{e}}(id)$ dice come la base \mathbf{v} si scrive nella base \mathbf{e} . Osserviamo che il vettore

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= x'v_1 + y'v_2 \\ &= x'(c_{11}e_1 + c_{21}e_2) + y'(c_{12}e_1 + c_{22}e_2) \\ &= (c_{11}x' + c_{12}y')e_1 + (c_{21}x' + c_{22}y')e_2 \\ &= xe_1 + ye_2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

e quindi, poiché un vettore si scrive in modo unico in una fissata base, si hanno le seguenti relazioni tra le coordinate (x, y) del vettore \vec{OP} nella base $\{e_1, e_2\}$ e le coordinate (x', y') dello stesso vettore nella base $\{v_1, v_2\}$

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' \end{cases} \quad (4.5)$$

ossia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{e}}(id) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Le relazioni (4.5) sono dette *equazioni del cambio di base*. Poiché la matrice $C = M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{e}}(id)$ è invertibile e $C^{-1} = M_{\mathbf{e}}^{\mathbf{v}}(id)$ si ha pure che

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} con $\dim V = n$, siano $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono due basi per V , siano x_1, \dots, x_n (x'_1, \dots, x'_n , rispettivamente) le componenti di un vettore nella base $\{e_1, \dots, e_n\}$ ($\{v_1, \dots, v_n\}$ rispettivamente) allora si ha che

$$\begin{cases} v_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \dots + c_{n1}e_n \\ v_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \dots + c_{n2}e_n \\ \dots\dots\dots \\ v_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \dots + c_{nn}e_n \end{cases} \quad (4.6)$$

La matrice

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

è la *matrice del cambio di base* che viene anche indicata con $M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{e}}(id)$ dove $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Le relazioni tra le coordinate (x_1, \dots, x_n) del vettore \vec{OP} nella base $\{e_1, \dots, e_n\}$ e le coordinate (x'_1, \dots, x'_n) dello stesso vettore nella base $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + \dots + c_{1n}x'_n \\ x_2 = c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + \dots + c_{2n}x'_n \\ \dots\dots\dots \\ x_n = c_{n1}x'_1 + c_{n2}x'_2 + \dots + c_{nn}x'_n \end{cases} \quad (4.7)$$

ossia

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{e}}(id) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Poiché $C = M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{e}}(id)$ è invertibile e $C^{-1} = M_{\mathbf{e}}^{\mathbf{v}}(id)$ si ha pure che

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = M_{\mathbf{e}}^{\mathbf{v}}(id) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Esempio 4.3.1 In \mathbb{R}^2 si considerino le basi $\mathbf{b} := \{b_1, b_2\}$ e $\mathbf{v} := \{v_1, v_2\}$ dove $b_1 = (2, -1)$, $b_2 = (1, 5)$, e $v_1 = (1, 3)$, $v_2 = (3, 4)$. Determinare la matrice del cambio di coordinate dalla base \mathbf{b} alla base \mathbf{v} . Denotiamo tale matrice con $M_{\mathbf{b}}^{\mathbf{v}}(id)$. Sia

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = M_{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}}(id)$$

e sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{e}}(id)$$

Noi vogliamo la matrice $M_{\mathbf{b}}^{\mathbf{v}}(id)$ che mi dice come la base \mathbf{b} si scrive nella base \mathbf{v} .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{id} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{id} & \mathbb{R}^2 \\ \{b_1, b_2\} & M_{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}}(id) & \{e_1, e_2\} & M_{\mathbf{e}}^{\mathbf{v}}(id) & \{v_1, v_2\} \end{array}$$

$$\text{Dunque } M_{\mathbf{b}}^{\mathbf{v}}(id) = M_{\mathbf{e}}^{\mathbf{v}}(id) \cdot M_{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}}(id) = A^{-1} \cdot B.$$

4.3.1 Algoritmo per calcolare $M_{\mathbf{b}}^{\mathbf{v}}(id)$.

Si considera la matrice $(M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{e}}(id) | M_{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}}(id)) = (A | B)$

$$(A | B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \vdots & 2 & 1 \\ 3 & 4 & \vdots & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ si riduce a scala per righe fino a } (I_2 | M)$$

la matrice $M = A^{-1}B$. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 3 & \vdots & 2 & 1 \\ 3 & 4 & \vdots & -1 & 5 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & \vdots & 2 & 1 \\ 0 & -5 & \vdots & -7 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & \vdots & -11 & 11 \\ 0 & -5 & \vdots & -7 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & -\frac{11}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & \vdots & \frac{7}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esempio 4.3.2 In \mathbb{R}^3 si consideri la base $v_1 = (1, -2, 1)$, $v_2 = (1, -1, 2)$, $v_3 = (1, 1, 1)$. Sia $v \in \mathbb{R}^3$ e siano (x, y, z) le coordinate di v nella base canonica e siano (x', y', z') le coordinate di v nella base v_1, v_2, v_3 . Allora

$$v = x'v_1 + y'v_2 + z'v_3 = x' \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + z' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

e dunque la relazione tra le coordinate (x', y', z') e (x, y, z) è la seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

4.3.2 Esercizi

1. Si consideri la seguente matrice in $M_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Dire se A può essere interpretata come una matrice del cambio di base.
 - In caso di risposta affermativa determinare la relazione tra le coordinate di un vettore di \mathbb{R}^3 nella base canonica e nella nuova base.
2. In \mathbb{R}^3 si considerino le basi $\mathbf{b} := \{b_1, b_2, b_3\}$ e $\mathbf{v} := \{v_1, v_2, v_3\}$, dove $b_1 = (1, 0, 0)$, $b_2 = (1, 1, 0)$, $b_3 = (0, 1, 1)$ e $v_1 = (1, 2, 2)$, $v_2 = (2, 1, -2)$, $v_3 = (2, -2, 1)$. Determinare la matrice del cambio di coordinate dalla base \mathbf{b} alla base \mathbf{v} .
3. In $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ si considerino i seguenti polinomi $p_1(x) = x-1$, $p_2(x) = x+x^2$, $p_3(x) = 2-x^2+x^3$.
- Verificare che essi sono linearmente indipendenti.
 - Estendere l'insieme $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ a una base per $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.
 - Determinare le coordinate di $2-x+x^2-x^3$ nella base trovata al punto (b).
4. Si consideri lo spazio vettoriale \mathbb{R}^3 .
- Dare due basi distinte \mathbf{b} \mathbf{b}' di \mathbb{R}^3 e diverse dalla base canonica.
 - Scrivere la matrice del cambio di coordinate dalla base \mathbf{b} alla base \mathbf{b}' .
 - Trovare le coordinate di $v = (1, 4, 1)$ nella base \mathbf{b} .
5. In \mathbb{R}^3 si considerino le basi $\mathbf{b} = \{b_1 = (1, 1, 0), b_2 = (0, 1, -1), b_3 = (1, 0, 2)\}$, $\mathbf{v} = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 0, 1)\}$.

- (a) Determinare la matrice $M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{b}}(id)$.
- (b) Se le coordinate del vettore u nella base \mathbf{b} sono $(2, -4, 1)$ determinare le sue coordinate nella base \mathbf{v} .
6. Nello spazio affine 3-dimensionale $\mathcal{A}^3(\mathbb{R})$
- (a) verificare che le equazioni
- $$\begin{cases} x' = 2x + 6y + 3z + 2 \\ y' = 6y - 3z \\ z' = 2x - 6y - 3z - 1 \end{cases}$$
- rappresentano un cambio di riferimento affine controverso con quello canonico $RA(O; x, y, z)$.
- (b) trovare nel riferimento affine $RA(O; x, y, z)$ le equazioni per la retta r :
- $$\begin{cases} y' = 0 \\ x' + z' = 0 \end{cases}$$
7. Nello spazio affine $\mathcal{A}^3(\mathbb{R})$ sia fissato un riferimento affine $RA(O; e_1, e_2, e_3)$. Determinare le formule del cambio di coordinate dal riferimento $RA(O; e_1, e_2, e_3)$ al riferimento $RA(O'; v_1, v_2, v_3)$, dove $O' = (1, -1, 0)$, $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (1, 1, 1)$.

4.4 Cambi di base e matrice di un' applicazione lineare

Sia $F: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare di \mathbb{K} -spazi vettoriali, sia $\dim V = n$ e $\dim W = m$. Siano $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$, $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ basi per V e siano $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ basi per W . Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice associata a F nelle basi $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$, $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ossia $A = M_{\mathbf{e}}^{\mathbf{E}}(F)$ e sia B la matrice associata a F nelle basi $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ ossia $B = M_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}(F)$. Siano X (X' rispettivamente) le coordinate di un vettore di V nella base $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ ($\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ rispettivamente) e siano Y (Y' rispettivamente) le coordinate di un vettore di W nella base $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ($\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ rispettivamente). Sia dunque $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ una base per V e sia $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ una base per W . Ne segue che l'applicazione F si scrive come

$$Y = AX \quad (4.8)$$

oppure

$$Y' = BX' \quad (4.9)$$

Sia $C = M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{E}}(id)$ la matrice del cambio di base in V e sia $D = M_{\mathbf{w}}^{\mathbf{e}}(id)$ la matrice del cambio di base in W e pertanto si ha che $X = CX' = M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{E}}(id)X'$ e $Y = DY' = M_{\mathbf{w}}^{\mathbf{e}}(id)Y'$. Sostituendo tali relazioni in (4.8) si ha

$$DY' = A(CX')$$

ovvero

$$Y' = (D^{-1}AC)X'$$

Quest'ultima insieme a (4.9) da che

$$B = D^{-1}AC \tag{4.10}$$

Osservazione 4.4.1 Sia $F : V \rightarrow V$ un endomorfismo e siano $\{E_1, \dots, E_n\}$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ basi per V . Sia C la matrice del cambio di base e siano A e B le matrici associate all'endomorfismo F nelle basi $\{E_1, \dots, E_n\}$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ rispettivamente, ossia $A = M_E(F)$ e $B = M_e(F)$. Allora

$$B = C^{-1}AC.$$

Le matrici A e B sono matrici simili.

Definizione 4.4.2 Siano $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. A e B si dicono *simili* se esiste una matrice invertibile $C \in GL_n(\mathbb{K})$ tale che $B = C^{-1}AC$.

Esempio 4.4.3 Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Trovare la matrice associata a F nella base $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ dove $v_1 = (1, -2, 1)$, $v_2 = (1, -1, 2)$, $v_3 = (1, 1, 1)$.

Abbiamo visto che $B = M_{\mathbf{v}}(F) = C^{-1}AC$, dove

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 5 & 6 \\ \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Possiamo anche calcolare dapprima $C^{-1}A$ e poi moltiplicarla, a destra, con C per ottenere la matrice B . Ricordiamo che se si considera la matrice

$$(C|A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{si riduce a scala per righe fino a}} (I_2|M)$$

la matrice $M = C^{-1}A$. Abbiamo quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & \vdots & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & \vdots & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = (I|C^{-1}A) \end{aligned}$$

Moltiplichiamo ora $C^{-1}A$, a destra, con C e otteniamo la matrice B .

Esempio 4.4.4 Sia $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare la cui matrice rispetto alle basi $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ di \mathbb{R}^3 e \mathbf{E} la base canonica di \mathbb{R}^4 è

$$A = M_{\mathbf{b}}^{\mathbf{E}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

dove $b_1 = (1, 0, 0)$, $b_2 = (0, 1, 1)$, $b_3 = (0, -1, 1)$. Trovare la matrice associata a F rispetto alle basi canoniche per $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{C^{-1}} & \mathbb{R}^3 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^4 \\ e_1, e_2, e_3 & & b_1, b_2, b_3 \quad E_1, \dots, E_4 \end{array}$$

dove $C^{-1} = M_{\mathbf{e}}^{\mathbf{b}}(id)$ e

$$C = M_{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$M_{\mathbf{e}}^{\mathbf{E}}(F) = A \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

In termini di coordinate si ha $Y = A \cdot C^{-1}X$, ovvero

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_3 = x_1 + x_3 \\ y_4 = -x_1 + x_2 \end{cases}$$

4.4.1 Esercizi

1. Sia $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare così definita

$$F((x, y, z)) = (x + y + z, x - z, z, y + z)$$

- (a) Determinare il nucleo e l'immagine di F e le loro dimensioni.
 (b) Dire se F è iniettiva e/o suriettiva.
2. Si consideri la trasformazione lineare $F: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ tale che $F(A) = BA$ per ogni $A \in M_2(\mathbb{R})$, dove B è la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare una base \mathbf{b} di $M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$M_{\mathbf{b}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (b) Determinare il nucleo e l'immagine di F .
3. Sia $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio dei polinomi di grado ≤ 3 . Sia $F: \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare così definita:

$$F(1 + x^2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, F(1 - x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F(x + x^3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, F(x^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Verificare che una tale F è ben definita.
 (b) Fissate le basi canoniche in $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ e $M_2(\mathbb{R})$, scrivere la matrice associata a F rispetto a tali basi.
 (c) Trovare il nucleo e l'immagine di F e la dimensione di tali sottospazi.
4. Sia $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione così definita

$$F((x, y, z)) = \begin{pmatrix} x + z & x - y + 2z \\ 3x + y & x - 2y - z \end{pmatrix}$$

- (a) Verificare che F è lineare.
 (b) Fissate le basi canoniche in \mathbb{R}^3 e $M_2(\mathbb{R})$, scrivere la matrice associata a F rispetto a tali basi.
 (c) Trovare il nucleo e l'immagine di F e una base per tali sottospazi.

(d) Trovare, al variare di $a \in \mathbb{R}$,

$$F^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

5. Sia $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare $N(F^2 - I)$ e $N(F^2 + I)$, dove $F^2 = F \circ F$.

(b) Verificare che $N(F^2 - I) \cap N(F^2 + I) = O$.

6. Sia $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare. Provare che F è iniettiva se e solo se F è suriettiva.

7. Sia $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da:

$$F(x, y, z) = (x, -4x + 4y, -2x + y + 2z).$$

(a) Scrivere la matrice associata a F nella base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, dove $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, -2, -1)$.

(b) Dire se esiste una base di \mathbb{R}^3 rispetto alla quale la matrice associata a F è la seguente matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

8. Sia $F: M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ la trasformazione lineare tale che

$$F(A) = A - {}^tA.$$

Determinare il nucleo e l'immagine di F e le loro dimensioni.

9. Dire, giustificando la risposta, se esistono isomorfismi tra \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^4 .

4.5 Funzionali lineari

Prima di dare la definizione di funzionale lineare vogliamo far vedere che dati due \mathbb{K} -spazi vettoriali V e W , l'insieme di tutte le applicazioni lineari di V in W è esso stesso uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} .

Definizione 4.5.1 Siano V e W sono due spazi vettoriali su un campo \mathbb{K} . Denotiamo con $Hom(V, W) := \{F: V \rightarrow W, F \text{ lineare}\}$.

Nell'insieme $\text{Hom}(V, W)$ definiamo la somma $F+G$ come $(F+G)(v) := F(v)+G(v)$ e il prodotto per uno scalare kF come $(kF)(v) := kF(v)$. L'insieme $\text{Hom}(V, W)$ con le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare è uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} . La verifica è lasciata come esercizio.

Vedremo che se V e W sono \mathbb{K} -spazi vettoriali di dimensione finita n, m rispettivamente allora $\text{Hom}(V, W)$ è isomorfo allo spazio delle matrici $M_{m,n}(\mathbb{K})$. Infatti vale il seguente teorema.

Teorema 4.5.2 *Siano V e W sono \mathbb{K} -spazi vettoriali di dimensione finita n, m , rispettivamente. Siano $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_m\}$ basi per V e W rispettivamente. Sia*

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{w},\mathbf{v}} : \text{Hom}(V, W) &\rightarrow M_{m,n}(\mathbb{K}) \\ F &\rightarrow M_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F) \end{aligned} \tag{4.11}$$

Allora $M_{\mathbf{w},\mathbf{v}}$ è un isomorfismo di \mathbb{K} -spazi vettoriali. In particolare $\dim \text{Hom}(V, W) = m \cdot n$.

Dimostrazione Verifichiamo che $M_{\mathbf{w},\mathbf{v}}$ è lineare. Sia $A = M_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F)$, $B = M_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(G)$ e $C = M_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F+G)$. Allora per ogni $X \in V$ si ha che $(F+G)(X) = CX$. D'altra parte dalla definizione di somma di applicazioni si ha che $(F+G)(X) = F(X) + G(X) = AX + BX = (A+B)X$ e pertanto $C = A+B$. Similmente si prova che se $D = M_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(kF)$ allora $D = kA$.

Per provare che l'applicazione $M_{\mathbf{w},\mathbf{v}}$ è iniettiva basta verificare che il suo nucleo è costituito dalla sola applicazione nulla. Il nucleo dell'applicazione $M_{\mathbf{w},\mathbf{v}}$, $N(M_{\mathbf{w},\mathbf{v}}) := \{F \in \text{Hom}(V, W) \mid M_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F) = 0\} = \{\vec{0}\}$.

Per la suriettività bisogna far vedere che per ogni $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ esiste un'applicazione lineare $F : V \rightarrow W$ tale che $M_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F) = A$. Basta prendere come F l'applicazione lineare definita dalla matrice A . Abbiamo quindi provato che $M_{\mathbf{w},\mathbf{v}}$ è un isomorfismo. Dal Teorema della nullità più il rango, (4.1.14), ne segue che $\dim \text{Hom}(V, W) = \dim N(M_{\mathbf{w},\mathbf{v}}) + \dim \text{Im}(M_{\mathbf{w},\mathbf{v}}) = \dim M_{m,n}(\mathbb{K}) = m \cdot n$. \square

Definizione 4.5.3 Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} . Un'applicazione lineare $F : V \rightarrow \mathbb{K}$ è detta *funzionale lineare*. Lo spazio vettoriale $\text{Hom}(V, \mathbb{K})$ viene denotato con V^\vee e viene detto *spazio vettoriale duale* dello spazio vettoriale V .

Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} di dimensione finita n e sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V . Siano $\eta_1, \dots, \eta_n \in V^\vee$ funzionali lineari così definiti

$$\eta_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \tag{4.12}$$

δ_{ij} viene detto simbolo di Kronecker.

Teorema 4.5.4 *Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} di dimensione finita n e sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V . Siano $\eta_1, \dots, \eta_n \in V^\vee$ i funzionali lineari definiti in (4.12). Allora l'insieme $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ è una base per V^\vee detta base duale.*

Dimostrazione Occorre far vedere che i funzionali η_1, \dots, η_n generano V^\vee e sono linearmente indipendenti. Sia $L \in V^\vee$ e sia $L(e_i) = a_i \in \mathbb{K}$. Affermiamo che $L =$

$\sum_{i=1}^n a_i \eta_i$. Per dimostrare tale uguaglianza bisogna far vedere che per ogni $v \in V$, $L(v) = (\sum_{i=1}^n a_i \eta_i)(v)$. Sia $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, allora $L(v) = L(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i L(e_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. Calcoliamo ora $(\sum_{i=1}^n a_i \eta_i)(v) = (\sum_{i=1}^n a_i \eta_i)(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n a_i \eta_i(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. Verifichiamo che i funzionali η_1, \dots, η_n sono linearmente indipendenti. Sia $\sum_{i=1}^n y_i \eta_i = 0$ facciamo vedere che ciò accade se e solo se tutti gli $y_i = 0$ per $i = 1, \dots, n$. Poiché $\sum_{i=1}^n y_i \eta_i = 0$ allora per ogni vettore $v \in V$ si ha che $(\sum_{i=1}^n y_i \eta_i)(v) = 0$ e in particolare questo vale per i vettori della base e_1, \dots, e_n . Si ha quindi che $0 = (\sum_{i=1}^n y_i \eta_i)(e_j) = y_j$ per ogni $j = 1, \dots, n$. \square

Osservazione 4.5.5 I funzionali η_1, \dots, η_n sono anche detti *funzionali coordinati*. Infatti se $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V$, allora $\eta_j(v) = \eta_j(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \eta_j(e_i) = x_j$.

Osservazione 4.5.6 Se $V = \mathbb{K}^n$ allora ogni funzionale $L: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ è tale che $L((x_1, \dots, x_n)) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ dove $a_i = L(e_i)$ con e_1, \dots, e_n una base di V . Osserviamo che se L è diverso dal funzionale nullo allora l'immagine di L , $Im(L) = \mathbb{K}$ e il nucleo di L ha dimensione, $dim N(L) = n - 1$.

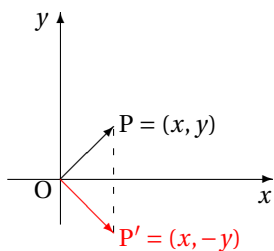
Esempio 4.5.7 In \mathbb{R}^3 si consideri la base $\{v_1, v_2, v_3\}$, dove $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 2)$. Determinare la base duale.

Denotiamo con $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ la base duale. Dall'osservazione (4.5.6) sappiamo che $\phi_1((x_1, x_2, x_3)) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$ per opportuni a_i . Tali scalari li possiamo determinare usando il fatto che $\phi_1(v_1) = 1$ e $\phi_1(v_j) = 0$ se $j \neq 1$. Si ha quindi $1 = \phi_1(v_1) = \phi_1((1, -1, 0)) = a_1 - a_2$, $0 = \phi_1(v_2) = \phi_1((0, 1, 1)) = a_2 + a_3$, $0 = \phi_1(v_3) = \phi_1((1, 0, 2)) = a_1 + 2a_3$. Risolvendo tale sistema di equazioni lineari nelle incognite a_1, a_2, a_3 si ha che $\phi_1 = 2x_1 + x_2 - x_3$. Similmente si ottiene che $\phi_2 = 2x_1 + 2x_2 - x_3$ e $\phi_3 = -x_1 - x_2 + x_3$.

4.6 Diagonalizzazione di endomorfismi

Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione, $dim V = n$. L'insieme di tutti gli endomorfismi di V è denotato con $End(V)$. Daremo dapprima degli esempi di endomorfismi dai quali evince che esistono endomorfismi per i quali i vettori di una data base non cambiano direzione una volta che li abbiamo trasformati con l'endomorfismo stesso e che non tutti gli endomorfismi hanno tale proprietà.

Esempio 4.6.1 Sia $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la riflessione intorno all'asse delle x .



Osserviamo che $F(\vec{i}) = \vec{i}$, $F(\vec{j}) = -\vec{j}$ ossia i vettori della base canonica non cambiano direzione. Come già osservato in (4.1.2) la matrice associata a F rispetto alla base canonica $\mathbf{e} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ è

$$M_{\mathbf{e}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che è una matrice diagonale.

Esempio 4.6.2 Sia $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione che ruota un vettore \vec{OP} di un angolo π intorno all'asse z .

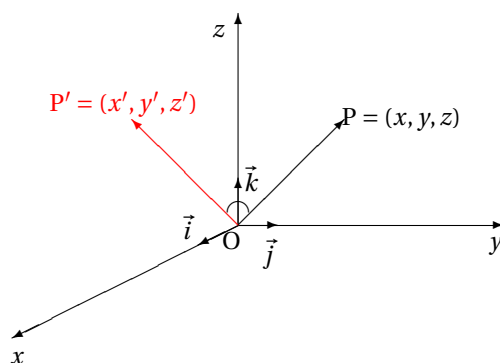


Figura 4.6: Rotazione di un angolo π intorno all'asse z

Osserviamo che $F(\vec{i}) = -\vec{i}$, $F(\vec{j}) = -\vec{j}$, $F(\vec{k}) = \vec{k}$. Dunque i vettori della base canonica non cambiano direzione. I vettori con tale proprietà sono detti *autovettori*. Gli scalari $-1, -1, 1$, sono detti *autovalori* relativi agli autovettori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, rispettivamente. La matrice associata a F nella base canonica $\mathbf{e} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ è

$$M_{\mathbf{e}}(F) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che è una matrice diagonale.

Esempio 4.6.3 Sia $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotazione antioraria di $\frac{\pi}{2}$ intorno all'origine.

Osserviamo che $F(\vec{i}) = \vec{j}$ e $F(\vec{j}) = -\vec{i}$ e quindi nessuno dei vettori della base canonica conserva la direzione una volta trasformato con F . Osserviamo pure che la matrice associata a F nella base canonica $\mathbf{e} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ è

$$M_{\mathbf{e}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo quindi dare la seguente definizione

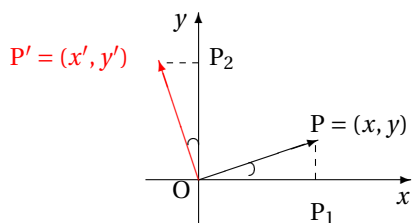


Figura 4.7: Rotazione antioraria di $\frac{\pi}{2}$ intorno all'origine

Definizione 4.6.4 Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione, $\dim V = n$ e sia $F : V \rightarrow V$ un endomorfismo di V . F si dice *diagonalizzabile* se esiste una base \mathcal{B} di V rispetto alla quale la matrice associata $M_{\mathcal{B}}(F)$ è una matrice diagonale, ossia

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{pmatrix}$$

La base \mathcal{B} è detta *base diagonalizzante* per F e la matrice C i cui vettori colonna sono i vettori della base \mathcal{B} è detta *matrice diagonalizzante*.

Osservazione 4.6.5 Se A è la matrice associata a F in una qualunque base e se D è la matrice associata a F nella base diagonalizzante \mathbf{v} allora

$$D = C^{-1}AC$$

dove C è la matrice i cui vettori colonna sono i vettori della base \mathbf{v} . In altre parole un endomorfismo è diagonalizzabile se la matrice associata a F in una sua qualunque base è simile a una matrice diagonale.

Per stabilire se un endomorfismo è diagonalizzabile o meno ci serve la nozione di *autovettore* e di *autovalore*.

Definizione 4.6.6 Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale, $\dim V = n$ e sia $F : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Sia $v \in V$ un vettore non nullo. Il vettore v si dice *autovettore* se esiste un $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $F(v) = \lambda v$. Lo scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ è detto *autovalore* relativo all'autovettore v .

Definizione 4.6.7 Sia $E(\lambda) := \{v \in V | F(v) = \lambda v\}$. Esso è detto *autospatio* relativo all'autovalore λ .

Osservazione 4.6.8 $E(\lambda)$ è l'insieme degli autovettori relativi all'autovalore λ unito il vettore nullo.

Vale il seguente Lemma la cui dimostrazione viene lasciata come esercizio.

Lemma 4.6.9 $E(\lambda)$ è un sottospazio vettoriale di V e inoltre $\dim E(\lambda) \geq 1$.

• **Come si determinano analiticamente gli autovalori**

Definizione 4.6.10 Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale con $\dim V = n$. Sia $F : V \rightarrow V$ un endomorfismo, sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base per V e sia $A = M_e(F)$ la matrice associata a F nella base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Il polinomio

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$$

è detto *polinomio caratteristico*.

Dalla definizione di determinante segue facilmente che $p_A(\lambda)$ è un polinomio a coefficienti in \mathbb{K} nell'indeterminata λ di grado n . Infatti

$$p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A) \lambda^{n-1} + \dots + \det A, \tag{4.13}$$

dove $\operatorname{tr}(A)$ è la traccia della matrice A , ossia, $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Basta osservare che

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (a_{11} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) + \sum_{\sigma \in S_n - id} b_{1\sigma(1)} \dots b_{n\sigma(n)}$$

dove b_{ij} sono le entrate della matrice $B = A - \lambda I$.

Vedremo che gli autovalori sono tutte e sole le radici del polinomio caratteristico.

Proposizione 4.6.11 *Gli autovalori di $A \in M_n(\mathbb{K})$ sono tutte e sole le radici del polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$.*

Dimostrazione Sia $\bar{\lambda}$ un autovalore di A . Allora esiste un $X \in \mathbb{K}^n$, $X \neq 0$ tale che $AX = \bar{\lambda}X$ da cui segue che $(A - \bar{\lambda}I)X = 0$ e dunque X è un'autosoluzione del sistema omogeneo la cui matrice dei coefficienti è $A - \bar{\lambda}I$. Ne segue che $\det(A - \bar{\lambda}I) = 0$ e quindi $\bar{\lambda}$ è una radice del polinomio $p_A(\lambda)$.

Viceversa se $\bar{\lambda}$ è una radice del polinomio $p_A(\lambda)$ allora $\det(A - \bar{\lambda}I) = 0$ e quindi il sistema omogeneo $(A - \bar{\lambda}I)X = 0$ ammette autosoluzioni e una tale autosoluzione è un autovettore relativo all'autovalore $\bar{\lambda}$. \square

Osservazione 4.6.12 Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ allora il polinomio $p_A(\lambda)$ ammette sempre radici in \mathbb{C} essendo \mathbb{C} algebricamente chiuso e dunque riusciamo sempre a trovare gli autovalori. Se invece $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ allora il polinomio $p_A(\lambda)$ non sempre ha radici in \mathbb{R} e quindi non sempre gli autovalori sono contenuti nel campo su cui è definito lo spazio vettoriale.

Esempio 4.6.13 Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Determinare, se esistono, gli autovalori di A e B, rispettivamente. In caso di risposta positiva trovare i relativi autovettori. Poiché

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2$$

e

$$p_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

ne segue che B non ha autovalori in \mathbb{R} poiché il suo polinomio caratteristico non ammette radici reali, mentre gli autovalori di A sono $\lambda = 0$ (radice doppia).

Gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 0$ sono i vettori non nulli $X \in \mathbb{R}^2$ tali che $(A - \lambda I)X = 0$ e quindi essi sono le autosoluzioni del sistema omogeneo la cui matrice dei coefficienti è la matrice A e dunque sono le coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $(x, y) = y(0, 1)$ al variare di $y \in \mathbb{R}$.

Esempio 4.6.14 Determinare autovalori e autovettori della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Poiché gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico di A calcoliamo

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda - 1)^2$$

Dunque gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$ (radice doppia).

Poiché gli autovettori sono i vettori non nulli $X \in \mathbb{R}^3$ tali che $(A - \lambda I_3)X = 0$ allora essi sono le autosoluzioni del sistema omogeneo la cui matrice dei coefficienti è la matrice $A - \lambda I_3$.

Per $\lambda_1 = 2$ dobbiamo risolvere il sistema omogeneo la cui matrice dei coefficienti è

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque le soluzioni sono le terne $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $(x, y, z) = z(-1, 1, 1)$ al variare di $z \in \mathbb{R}$.

Per $\lambda_2 = 1$ dobbiamo risolvere il sistema omogeneo la cui matrice dei coefficienti è

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e dunque le soluzioni sono le terne $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $(x, y, z) = y(1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$ al variare di $y, z \in \mathbb{R}$.

Dunque $v_1 = (-1, 1, 1)$ è un autovettore relativo all'autovalore $\lambda_1 = 2$ e i vettori $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (-1, 0, 1)$ sono autovettori relativi all'autovalore $\lambda_2 = 1$.

Esempio 4.6.15 Determinare autovalori e autovettori della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Poiché gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico di A allora calcoliamo

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda)$$

Dunque gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ e $\lambda_3 = 2$. Poiché gli autovettori sono i vettori non nulli $X \in \mathbb{R}^3$ tali che $(A - \lambda I_3)X = 0$ allora essi sono le autosoluzioni del sistema omogeneo la cui matrice dei coefficienti è la matrice $A - \lambda I_3$.

Per $\lambda_1 = 1$ dobbiamo risolvere il sistema omogeneo la cui matrice dei coefficienti è

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e dunque le soluzioni sono le terne $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $(x, y, z) = y(-\frac{3}{2}, 1, 4)$ al variare di $y \in \mathbb{R}$.

Per $\lambda_2 = 4$ dobbiamo risolvere il sistema omogeneo la cui matrice dei coefficienti è

$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

e dunque le soluzioni sono le terne $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $(x, y, z) = z(0, -2, 1)$ al variare di $z \in \mathbb{R}$.

Per $\lambda_3 = 2$ dobbiamo risolvere il sistema omogeneo la cui matrice dei coefficienti è

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque le soluzioni sono le terne $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $(x, y, z) = z(0, 0, 1)$ al variare di $z \in \mathbb{R}$.

Dunque $v_1 = (-\frac{3}{2}, 1, 4)$ è un autovettore relativo all'autovalore $\lambda_1 = 1$, $v_2 = (0, -2, 1)$, è un autovettore relativo all'autovalore $\lambda_2 = 4$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ è un autovettore relativo all'autovalore $\lambda_3 = 2$.

Osserviamo che gli autovettori $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente indipendenti e dunque essi sono una base per \mathbb{R}^3 . In realtà è un fatto generale che gli autovettori corrispondenti a autovalori distinti sono linearmente indipendenti. Ciò lo vedremo nella seguente Proposizione 4.6.16.

Proposizione 4.6.16 *Sia $F \in \text{End}(V)$ e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalori distinti di F e v_1, \dots, v_k i relativi autovettori. Allora v_1, \dots, v_k sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione La dimostrazione si fa per induzione sul numero k di vettori. Proviamo l'affermazione per $k = 2$. Siano λ_1, λ_2 autovalori distinti e siano v_1, v_2 i relativi autovettori. Verifichiamo che v_1, v_2 sono linearmente indipendenti. Supponiamo per assurdo che $v_1 = kv_2$ per qualche $k \in \mathbb{K}$. Allora $F(v_1) = F(kv_2)$ da cui segue che $\lambda_1 v_1 = k\lambda_2 v_2$ e poichè $v_1 = kv_2$ ne segue che $\lambda_1 kv_2 = k\lambda_2 v_2$ e dunque $k(\lambda_1 - \lambda_2)v_2 = \vec{0}$. Poichè $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ e $v_2 \neq \vec{0}$ ne segue che $k = 0$ e quindi $v_1 = kv_2 = \vec{0}$ e questo contraddice il fatto che v_1 è un autovettore.

Supponiamo ora l'affermazione vera per $k - 1$ e dimostriamola vera per ogni k . Provare che l'equazione

$$\sum_{i=1}^k x_i v_i = \vec{0} \tag{4.14}$$

ammette la sola soluzione banale. Osserviamo che $F(\sum_{i=1}^k x_i v_i) = \vec{0}$. Usando la linearità di F e il fatto che $F(v_i) = \lambda_i v_i$ la (4.14) dà

$$\sum_{i=1}^k x_i \lambda_i v_i = \vec{0} \tag{4.15}$$

Moltiplichiamo (4.14) per λ_k (che possiamo supporre diverso da zero diversamente non c'è niente da provare) e si ottiene che

$$\sum_{i=1}^k \lambda_k x_i v_i = \vec{0}$$

Sottraendo da (4.15) quest'ultima equazione si ottiene

$$\sum_{i=1}^{k-1} x_i (\lambda_i - \lambda_k) v_i = \vec{0} \tag{4.16}$$

Dall'ipotesi induttiva e dal fatto che i λ_i sono tutti distinti ne segue che $x_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, k - 1$. Sostituendo tali valori in (4.14) si ha $x_k v_k = \vec{0}$ da cui segue che $x_k = 0$ essendo $v_k \neq \vec{0}$. \square

Corollario 4.6.17 *Sia $F \in \text{End}(V)$ e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ autovalori distinti. Allora F è diagonalizzabile.*

Dimostrazione Dalla Proposizione 4.6.16 segue che gli autovettori v_1, \dots, v_n relativi agli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono linearmente indipendenti e dunque sono una base diagonalizzante per V . \square

Lemma 4.6.18 *(Invarianti per similitudine) Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione finita, di $\dim V = n$. Sia $F : V \rightarrow V$ un endomorfismo, siano $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ due basi per V e siano $A = M_{\mathbf{e}}(F)$ e $B = M_{\mathbf{v}}(F)$ le matrici associate a F nelle basi $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ e $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$, rispettivamente. Allora*

Teorema 4.6.22 (Caratterizzazione di endomorfismi diagonalizzabili) Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale, $\dim V = n$, sia $F \in \text{End}(V)$. Supponiamo che tutte le radici del polinomio caratteristico nella chiusura algebrica di \mathbb{K} siano contenute nel campo \mathbb{K} e siano quindi $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori distinti di F e $m_1 = m_a(\lambda_1), \dots, m_k = m_a(\lambda_k)$ le corrispondenti molteplicità algebriche. Allora F è diagonalizzabile se e solo se

$$\dim E(\lambda_i) = m_i \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, k \quad (4.17)$$

Dimostrazione Se F è diagonalizzabile allora la 4.17 è immediata. Viceversa, supponiamo che $\dim E(\lambda_i) = m_i$ per ogni $i = 1, \dots, k$. Per ogni autospazio $E(\lambda_i)$ scegliamo una base. Sia dunque $\{v_{11}, \dots, v_{1m_1}\}$ una base per $E(\lambda_1)$, $\{v_{21}, \dots, v_{2m_2}\}$ una base per $E(\lambda_2)$ e così via fino a $\{v_{k1}, \dots, v_{km_k}\}$ una base per $E(\lambda_k)$. L'insieme dei vettori $\{v_{11}, \dots, v_{1m_1}, \dots, v_{k1}, \dots, v_{km_k}\}$ ha cardinalità $n = \sum_{i=1}^k m_i$ e quindi esso sarà una base per V se l'insieme $\{v_{11}, \dots, v_{1m_1}, \dots, v_{k1}, \dots, v_{km_k}\}$ è linearmente indipendente, ossia se l'equazione

$$x_{11}v_{11} + \dots + x_{1m_1}v_{1m_1} + \dots + x_{k1}v_{k1} + \dots + x_{km_k}v_{km_k} = \vec{0} \quad (4.18)$$

ammette la sola soluzione banale.

Sia $w_1 = x_{11}v_{11} + \dots + x_{1m_1}v_{1m_1}, \dots, w_k = x_{k1}v_{k1} + \dots + x_{km_k}v_{km_k}$. Allora l'equazione (4.18) diventa

$$w_1 + \dots + w_k = \vec{0} \quad (4.19)$$

Osserviamo che $w_i \in E(\lambda_i)$ per ogni $i = 1, \dots, k$ e dunque w_i è un autovettore relativo all'autovalore λ_i .

Se $w_i = \vec{0}$ per ogni $i = 1, \dots, k$ allora, essendo i vettori $\{v_{i1}, \dots, v_{im_i}\}$ linearmente indipendenti ne segue che $x_{i1} = \dots = x_{im_i} = 0$ per ogni $i = 1, \dots, k$.

D'altra parte $w_i \neq \vec{0}$ non è possibile. Infatti essendo w_1, \dots, w_k autovettori corrispondenti ad autovalori distinti essi sono linearmente indipendenti e dunque l'equazione (4.19) dà una contraddizione in questo caso.

Allora l'insieme $\{v_{11}, \dots, v_{1m_1}, \dots, v_{k1}, \dots, v_{km_k}\}$ è linearmente indipendente e quindi l'endomorfismo $F \in \text{End}(V)$ è diagonalizzabile poiché V ha una base di autovettori. □

4.6.1 Esercizi

1. Sia $F: \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ la trasformazione lineare così definita

$$F(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_3 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare la matrice A associata a F rispetto alle basi canoniche.
- (b) Calcolare gli autovalori di A e i relativi autospazi.
- (c) Stabilire se A è diagonalizzabile e in caso di risposta positiva determinare la matrice diagonalizzante.

2. Sia $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare così definita $F((1, 1, 0)) = (2, 1, -1)$, $F((0, 1, 1)) = (2, 1, -1)$, $F((0, 0, 1)) = (1, -2, 0)$.
- Calcolare $F((x_1, x_2, x_3))$.
 - Dire se F è diagonalizzabile e in caso di risposta positiva trovare una base di autovettori.
 - Determinare la matrice associata a F nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$ dove $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, 1)$, $v_3 = (1, -1, -3)$.

3. Sia $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ determinare gli autovalori di F .
 - Dire se esistono valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ per i quali F sia diagonalizzabile.
4. Sia $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & t & -1 \\ 0 & 1 & -t \end{pmatrix}$$

- Al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ stabilire se F è iniettiva, suriettiva, biiettiva.
- Dire se esistono valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ per i quali l'insieme

$$C := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid F(X) = (2, 1, 1)\}$$

è non vuoto. In caso di risposta positiva, dire cosa rappresenta geometricamente tale insieme.

- Al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ stabilire se F è diagonalizzabile.

5. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dire se la matrice A è diagonalizzabile. In caso di risposta positiva trovare una base di autovettori.

6. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Provare che:

- se A è tale che $A^2 = A$ e λ è un autovalore di A , allora $\lambda = 0, 1$;
- se A è diagonalizzabile e ogni autovalore di A è 0 o 1, allora $A^2 = A$.

7. Sia $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare tale che $F(e_1) = 3e_1 + 2e_2 + 2e_3$, $F(e_2) = -e_1 - e_3$, $F(e_3) = -2e_1 - 2e_2 - e_3$.
- Provare che F è diagonalizzabile e trovare una base di autovettori.
 - Determinare la matrice associata a F nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$ dove $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (-1, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 1)$.
 - Dire se esiste una base di \mathbb{R}^3 rispetto alla quale F è rappresentata dalla seguente matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Sia $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare tale che $F((1, 0, 1)) = (-2, 0, 1)$, $F((0, 1, 2)) = (-1, 4, 5)$, $F((-1, 0, 1)) = (0, 2, 3)$.
- Verificare che F è ben definita.
 - Scrivere la matrice associata a F nella base canonica.
 - Verificare che F è diagonalizzabile e determinare una base di autovettori.
9. Sia $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo avente tre autovalori distinti. Provare che F è diagonalizzabile.
10. Sia $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare tale che $F((1, -1, 1)) = (0, 1 + t, t - 1)$, $F((1, 1, 1)) = (0, 1 + t, 1 + t)$, $F((0, 0, 1)) = (1, 0, t)$, con $t \in \mathbb{R}$.
- Verificare che F è ben definita.
 - Scrivere la matrice associata a F nella base canonica.
 - Trovare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per i quali F non è suriettiva.
 - Dire se per i valori di t determinati al punto (c) la trasformazione F è diagonalizzabile (giustificare la risposta). In caso di risposta positiva determinare una base di autovettori.
11. Sia $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo avente un autovalore uguale a zero. Provare che F non è un isomorfismo.
12. Sia $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare tale che il vettore $(1, 1, 1)$ è un autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 1$, $F((0, 1, 0)) = (0, 3, 0)$ e $F((1, 2, 1)) = F((1, 1, 2))$.
- Provare che F è diagonalizzabile.
 - Determinare una base di autovettori.
13. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Determinare i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali A è diagonalizzabile.

(b) Per tali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ determinare una base di autovettori.

14. Sia $F : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare così definita

$$F(A) = A - 2 {}^tA$$

(a) Trovare autovalori e autospazi di F .

(b) Dire, giustificando la risposta, se F è diagonalizzabile.

15. Trovare la matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ i cui autovalori sono 1, 5 e i cui relativi autovettori sono $v = (1, 2)$, $w = (3, -2)$.

16. Trovare un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ avente come nucleo il sottospazio $N(F) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0, x + z = 0\}$ e avente un autovalore uguale a 1.

17. Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sia U il sottospazio individuato dall'asse delle x . Trovare la dimensione e le equazioni cartesiane del sottospazio $F^{-1}(F(U))$.

18. Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare tale che $F((1, 1, 0)) = (3, -2)$, $F((1, 0, 1)) = (2, -1)$, $F((0, 1, 1)) = (1, 0)$.

(a) Determinare la matrice associata a F rispetto alle basi canoniche.

(b) Determinare il nucleo e l'immagine di F e una loro base.

19. Sia $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare la cui matrice rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Siano $\mathbf{v} = \{v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (2, -1, 3, 0), v_3 = (4, 1, 0, 0), v_4 = (1, -\frac{1}{2}, 1, 5)\}$, $\mathbf{w} = \{w_1 = (2, -3), w_2 = (-1, 3)\}$ basi per \mathbb{R}^4 e \mathbb{R}^2 rispettivamente. Scrivere la matrice associata a F nelle basi \mathbf{v} , \mathbf{w} .

20. Scrivere una matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ avente come autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ e relativi autovettori $v_1 = (2, -1, 0)$, $v_2 = (-1, 2, -1)$, $v_3 = (0, -1, 2)$.

21. Trovare una base per gli autospazi di

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

22. Sia $F : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare così definita

$$F(a + bx + cx^2) = (a - b, 2a + c)$$

- (a) Scrivere la matrice associata a F nelle basi canoniche di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ e \mathbb{R}^2 , rispettivamente.
- (b) Determinare il nucleo e l'immagine di F e una loro base.
- (c) Determinare $F^{-1}((1, 4))$.
23. Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (1, 0, 1, 1)$, $w_2 = (1, 0, 1, -1)$. Sia $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonica di \mathbb{R}^4 e sia $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ un endomorfismo tale che $F(e_1) = 2e_1$, $F(e_2) = -e_2$, $N(F) = W$.
- (a) Provare che F è univocamente determinata dalle condizioni date.
- (b) Determinare la matrice associata a F nella base canonica.
- (c) Dire se F è diagonalizzabile e in caso affermativo trovare una matrice diagonalizzante.
24. Si consideri la trasformazione lineare $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$F(x, y, z) = (x + y - 2z, x - z, x - z)$$

- (a) Determinare la matrice associata a F nella base canonica.
- (b) Dire, giustificando la risposta, se F è diagonalizzabile.
- (c) Dopo aver verificato che i punti $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (1, 0, 0)$ individuano un triangolo determinarne l'area.
I punti $F(A), F(B), F(C)$ individuano anch'essi un triangolo?
25. Siano $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 2)$, $v_3 = (1, 0, 1)$ vettori di \mathbb{R}^3 , e siano $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 5$ tre numeri reali.
Sia $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che ha il vettore v_i come autovettore relativo all'autovalore λ_i , $i = 1, 2, 3$.
- (a) Verificare che l'applicazione lineare F è ben definita.
- (b) Scrivere la matrice associata ad F nella base di autovettori.
- (c) Scrivere la matrice associata ad F rispetto alla base canonica di V_3 .

26. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare gli autovalori di A ed i relativi autovettori.
- (b) Mostrare che A è diagonalizzabile e scrivere la matrice diagonale D associata ad A .
- (c) Calcolare una base di autovettori per A e determinare una matrice C tale che $D = C^{-1}AC$.

27. Si consideri la seguente matrice a entrate reali

$$A = \begin{pmatrix} h & 0 & 1 \\ 0 & h & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare, al variare del parametro reale h , il rango di A .
- (b) Per i valori di h per i quali il rango non è massimo dire se la matrice è diagonalizzabile.

28. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Dire se ciascuna di esse è diagonalizzabile su \mathbb{R} e in caso di risposta affermativa trovare per ciascuna di esse una matrice diagonalizzante.
- b) Dire se A e B rappresentano lo stesso endomorfismo $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ in basi diverse.

4.7 Forma canonica di Jordan

Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ non sempre A è diagonalizzabile, ovvero simile a una matrice diagonale. Ci si chiede quindi se esiste una classe di matrici quadrate non diagonali, ma abbastanza semplice tale che ogni matrice quadrata sia simile a una di esse. Vedremo che esse sono le matrici in forma canonica di Jordan.

Definizione 4.7.1 Un *blocco di Jordan* J_t di ordine t è una matrice quadrata tale che

$$J_t(\bar{\lambda}) = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \bar{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \bar{\lambda} \end{pmatrix}, \bar{\lambda} \in \mathbb{K}$$

Definizione 4.7.2 Una matrice $J \in M_n(\mathbb{K})$ si dice in *forma canonica di Jordan* se

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\bar{\lambda}_1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\bar{\lambda}_2) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & J_{n_k}(\bar{\lambda}_k) \end{pmatrix}$$

con $J_{n_i}(\bar{\lambda}_i)$ blocco di Jordan di ordine n_i e gli n_i sono interi positivi tali che $n_1 + \dots + n_k = n$.

Esempio 4.7.3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_2(2) & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_2(1) & 0 \\ 0 & J_2(1) \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_3(-1) & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Osservazione 4.7.4 La matrice $J_t(\bar{\lambda})$ non è diagonalizzabile. Infatti il polinomio caratteristico di $J_t(\bar{\lambda})$ è $p_{J_t(\bar{\lambda})}(\lambda) = (\bar{\lambda} - \lambda)^t$ e dunque $\lambda = \bar{\lambda}$ è un autovalore di molteplicità algebrica $m_a(\bar{\lambda}) = t$ mentre la molteplicità geometrica, $m_g(\bar{\lambda}) < t$ poichè $rg(J_t(\bar{\lambda}) - \bar{\lambda}I) = t - 1$.

4.7.1 Endomorfismi (o matrici) nilpotenti

Definizione 4.7.5 Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. A si dice *nilpotente* se esiste un intero $m > 0$ tale che $A^m = 0$. Il più piccolo m per il quale $A^m = 0$ si dice *indice di nilpotenza* di A.

Esempio 4.7.6 La seguente matrice A è nilpotente con indice di nilpotenza 3,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio 4.7.7 Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale con $\dim V = n$. Sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo tale che esista un $v \in V$ con $v \neq \vec{0}$ e tale che i vettori $v, f(v), f^2(v), \dots, f^{n-1}(v)$ sono una base per V e $f^n(v) = \vec{0}$. Sia $\mathcal{B} = \{f^{n-1}(v), f^{n-2}(v), \dots, f(v), v\}$, allora la matrice associata a f in tale base è

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Un tale endomorfismo è detto *endomorfismo ciclico*.

Sia $\vec{e}_1 = f^{n-1}(v)$, $\vec{e}_2 = f^{n-2}(v), \dots, \vec{e}_n = v$. Facciamo ora vedere che l'indice di nilpotenza di f è n . Infatti se $\vec{w} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$ e se $m \leq n$ si ha

$$f^m(\vec{w}) = x_{m+1}\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_{n-m}$$

In particolare $f^n(\vec{w}) = \vec{0}$.

Definizione 4.7.8 Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale con $\dim V = n$. Sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Sia $W \subset V$ un sottospazio vettoriale. W si dice *f -invariante* se per ogni $w \in W$ si ha che $f(w) \in W$.

4.7.2 Forma canonica di Jordan di un endomorfismo nilpotente

Proposizione 4.7.9 Per ogni endomorfismo nilpotente $f : V \rightarrow V$ esiste una decomposizione di $V = E_1 \oplus \dots \oplus E_s$ con E_i sottospazi invarianti, $\dim E_i = n_i$ e $f|_{E_i}$ è un endomorfismo ciclico, ovvero

$$M(f|_{E_i}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Dimostrazione Sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo nilpotente di indice m e sia $W_i = \text{Im } f^i$, $i = 0, \dots, m$. Osserviamo che

- $W_m = \{\vec{0}\}$ poichè f^m è l'endomorfismo nullo.
- $W_{i+1} \subset W_i$. Infatti $f^{i+1}(v) = f^i(f(v)) \in \text{Im } f^i = W_i$ e dunque
- $f(W_i) = W_{i+1}$.
- $W_0 = V$ poichè $f^0 = \text{Id}_V$.

Dunque si ha che

$$\{\vec{0}\} = W_m \subset W_{m-1} \subset W_{m-2} \subset \dots \subset W_1 \subset W_0 = V$$

- $W_{m-1} \subset N(f)$. Infatti se $w \in W_{m-1} = \text{Im } f^{m-1}$ allora $w = f^{m-1}(v)$ e quindi $f(w) = f(f^{m-1}(v)) = f^m(v) = \vec{0}$.

Vogliamo costruire una base per V a partire da una base per W_{m-1} . Sia $\dim W_{m-1} = p_{m-1}$ e sia

$$e_1^{m-1}, \dots, e_{p_{m-1}}^{m-1} \quad (4.20)$$

una base per W_{m-1} .

- $W_{m-1} \subset N(f)$ implica che $f(e_1^{m-1}) = \vec{0}, \dots, f(e_{p_{m-1}}^{m-1}) = \vec{0}$.
- $f(W_{m-2}) = W_{m-1}$ implica che esistono vettori in W_{m-2} le cui immagini sono $e_1^{m-1}, \dots, e_{p_{m-1}}^{m-1}$, rispettivamente. Siano

$$e_1^{m-2}, \dots, e_{p_{m-1}}^{m-2} \in W_{m-2} \quad (4.21)$$

$$\begin{array}{ccc} f \downarrow & & \downarrow f \\ f(e_1^{m-2}) = e_1^{m-1} & , \dots , & e_{p_{m-1}}^{m-1} = f(e_{p_{m-1}}^{m-2}) \end{array} \quad (4.22)$$

Proviamo ora che i vettori

$$\begin{array}{l} e_1^{m-1}, \dots, e_{p_{m-1}}^{m-1} \in W_{m-1} \subset W_{m-2} \\ e_1^{m-2}, \dots, e_{p_{m-1}}^{m-2} \in W_{m-2} \end{array} \quad (4.23)$$

sono linearmente indipendenti. Se

$$a_1 e_1^{m-1} + \dots + a_{p_{m-1}} e_{p_{m-1}}^{m-1} + b_1 e_1^{m-2} + \dots + b_{p_{m-1}} e_{p_{m-1}}^{m-2} = \vec{0} \quad (4.24)$$

applicando la f a tale equazione e usando (4.20) e (4.21) si ha che $f(e_i^{m-1}) = \vec{0}$, $f(e_i^{m-2}) = e_i^{m-1}$ per $i = 1, \dots, p_{m-1}$ e dunque l'equazione (4.24) diventa

$$b_1 e_1^{m-1} + \dots + b_{p_{m-1}} e_{p_{m-1}}^{m-1} = \vec{0}.$$

Poichè tali vettori sono linearmente indipendenti essendo una base di W_{m-1} si ha che $b_1 = \dots = b_{p_{m-1}} = 0$. Sostituendo in (4.24) si ha che

$$a_1 e_1^{m-1} + \dots + a_{p_{m-1}} e_{p_{m-1}}^{m-1} = \vec{0}$$

da cui segue che $a_1 = \dots = a_{p_{m-1}} = 0$ poichè i vettori $e_1^{m-1}, \dots, e_{p_{m-1}}^{m-1}$ sono una base di W_{m-1} . Estendiamo i vettori in (4.23) a una base per W_{m-2} e sia quindi

$$\begin{array}{l} e_1^{m-1}, \dots, e_{p_{m-1}}^{m-1} \\ e_1^{m-2}, \dots, e_{p_{m-1}}^{m-2}, e_{p_{m-1}+1}^{m-2}, \dots, e_{p_{m-2}}^{m-2} \end{array} \quad (4.25)$$

una base per W_{m-2} . Osserviamo che $\dim W_{m-2} = p_{m-1} + p_{m-2}$ e dunque $p_{m-2} = \dim W_{m-2} - \dim W_{m-1} = r g(f^{m-2}) - r g(f^{m-1})$.

Inoltre i vettori $e_{p_{m-1}+1}^{m-2}, \dots, e_{p_{m-2}}^{m-2}$ possono essere presi in $N(f)$. Infatti poichè $f(W_{m-2}) = W_{m-1}$ allora $f(e_{p_{m-1}+i}^{m-2}) = x_{1i}e_1^{m-1} + \dots + x_{p_{m-1}i}e_{p_{m-1}}^{m-1}$ e quindi al posto di $e_{p_{m-1}+i}^{m-2}$ possiamo prendere $e_{p_{m-1}+i}^{m-2} - \sum_{j=1}^{p_{m-1}} x_{ji}e_j^{m-2}$ e questi vettori sono tali che

$$\begin{aligned} f\left(e_{p_{m-1}+i}^{m-2} - \sum_{j=1}^{p_{m-1}} x_{ji}e_j^{m-2}\right) &= f\left(e_{p_{m-1}+i}^{m-2}\right) - \sum_{j=1}^{p_{m-1}} x_{ji}f\left(e_j^{m-2}\right) \\ &= f\left(e_{p_{m-1}+i}^{m-2}\right) - \sum_{j=1}^{p_{m-1}} x_{ji}e_j^{m-1} = \vec{0} \end{aligned}$$

Poichè $f(W_{m-3}) = W_{m-2}$ allora esistono in W_{m-3} vettori le cui immagini sono i vettori $e_1^{m-2}, \dots, e_{p_{m-2}}^{m-2}$. Siano

$$e_1^{m-3}, \dots, e_{p_{m-2}}^{m-3} \in W_{m-3} \tag{4.26}$$

$$\begin{array}{ccc} f \downarrow & & \downarrow f \\ f(e_1^{m-3}) = e_1^{m-2}, & \dots, & e_{p_{m-2}}^{m-2} = f(e_{p_{m-1}}^{m-3}) \end{array} \tag{4.27}$$

Analogamente a quanto visto per la famiglia di vettori in (4.23), si può provare che i vettori

$$\begin{array}{ccccccc} e_1^{m-1}, & \dots, & e_{p_{m-1}}^{m-1} & & & & \\ e_1^{m-2}, & \dots, & e_{p_{m-1}}^{m-2}, & e_{p_{m-1}+1}^{m-2}, & \dots, & e_{p_{m-2}}^{m-2} & \\ e_1^{m-3}, & \dots, & e_{p_{m-1}}^{m-3}, & e_{p_{m-1}+1}^{m-3}, & \dots, & e_{p_{m-2}}^{m-3} & \end{array} \tag{4.28}$$

sono vettori di W_{m-3} linearmente indipendenti e quindi si possono estendere a una base per W_{m-3}

$$\begin{array}{ccccccc} e_1^{m-1}, & \dots, & e_{p_{m-1}}^{m-1} & & & & \\ e_1^{m-2}, & \dots, & e_{p_{m-1}}^{m-2}, & e_{p_{m-1}+1}^{m-2}, & \dots, & e_{p_{m-2}}^{m-2} & \\ e_1^{m-3}, & \dots, & e_{p_{m-1}}^{m-3}, & e_{p_{m-1}+1}^{m-3}, & \dots, & e_{p_{m-2}}^{m-3}, & e_{p_{m-2}+1}^{m-3}, \dots, e_{p_{m-3}}^{m-3} \end{array} \tag{4.29}$$

Si può provare che i vettori $e_{p_{m-2}+1}^{m-3}, \dots, e_{p_{m-3}}^{m-3}$ possono essere presi in $N(f)$. Si va avanti in questo modo fino a costruire una base per $W_0 = V$

$$\begin{array}{ccccccccccc} e_1^{m-1} & \dots & e_{p_{m-1}}^{m-1} & & & & & & & & \\ e_1^{m-2} & \dots & e_{p_{m-1}}^{m-2} & e_{p_{m-1}+1}^{m-2} & \dots & e_{p_{m-2}}^{m-2} & & & & & \\ e_1^{m-3} & \dots & e_{p_{m-1}}^{m-3} & e_{p_{m-1}+1}^{m-3} & \dots & e_{p_{m-2}}^{m-3} & e_{p_{m-2}+1}^{m-3} & \dots & e_{p_{m-3}}^{m-3} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ e_1^0 & \dots & e_{p_{m-1}}^0 & e_{p_{m-1}+1}^0 & \dots & e_{p_{m-2}}^0 & e_{p_{m-2}+1}^0 & \dots & e_{p_{m-3}}^0 & \dots & e_{p_0}^0 \end{array} \tag{4.30}$$

Siano E_j , per $j = 1, \dots, p_0$, i sottospazi generati dai vettori colonna in (4.30). I vettori su ogni colonna hanno la proprietà che

$$f(e_j^i) = e_j^{i+1}$$

per $j = 1, \dots, p_0$ e $i = 0, \dots, m-1$, ovvero salgono di un gradino rimanendo nella stessa colonna. Dunque i sottospazi E_j sono

- f -invarianti e $f|_{E_i}$ è un endomorfismo ciclico.
- $\dim E_1 = \dots = \dim E_{p_{m-1}} = m$ e dunque esiste almeno un sottospazio di dimensione m , dove m è l'indice di f .

Per costruzione $V = \bigoplus_{i=1}^{p_0} E_i$. □

Osservazione 4.7.10 Dalla dimostrazione della Proposizione (4.7.9) segue che il numero di sottospazi f -invarianti è uguale a p_0 , dove

$$p_0 = \dim W_0 - \dim W_1 = \dim V - \dim \text{Im} f = \dim N(f)$$

dunque $p_0 = n - \text{rg}(f)$.

Osservazione 4.7.11 Dalla dimostrazione della Proposizione (4.7.9) segue che il numero di blocchi di ordine i è

$$n_{i+1} + n_{i-1} - 2n_i$$

dove $n_i = \dim \text{Im}(f^i)$.

Se $i = m$ allora il numero di blocchi di ordine m è uguale a p_{m-1} . Infatti $n_{m+1} + n_{m-1} - 2n_m = \dim \text{Im}(f^{m+1}) + \dim \text{Im}(f^{m-1}) - 2\dim \text{Im}(f^m) = 0 + \dim W_{m-1} + 0 = p_{m-1}$.

Se $i = m-1$ allora il numero di blocchi di ordine $m-1$ è uguale a $p_{m-2} - p_{m-1}$. Infatti $n_m + n_{m-2} - 2n_{m-1} = \dim \text{Im}(f^m) + \dim \text{Im}(f^{m-2}) - 2\dim \text{Im}(f^{m-1}) = 0 + \dim W_{m-2} - 2\dim W_{m-1} = p_{m-2} + p_{m-1} - 2p_{m-1} = p_{m-2} - p_{m-1}$.

L'enunciato della Proposizione (4.7.9) in termini di matrici è il seguente:

Proposizione 4.7.12 Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice nilpotente di indice di nilpotenza m . Allora A è simile a una matrice diagonale a blocchi, i cui elementi diagonali N_i , per $i = 1, \dots, s$ sono del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Tutte le matrici N_i , $i = 1, \dots, s$ sono di ordine $\leq m$ e almeno una di esse è di ordine m . Il numero totale di blocchi $s = n - \text{rg}(A)$. Inoltre il numero di blocchi di ordine i è

$$n_{i+1} + n_{i-1} - 2n_i$$

dove $n_i = \text{rg}(A^i)$.

Esempio 4.7.13 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha che $A^3 = 0$ e dunque A è nilpotente di indice 3. Troviamo la matrice nilpotente M in forma canonica e simile alla matrice A .

Poichè A è nilpotente di indice 3, M conterrà almeno un blocco di Jordan di ordine 3. D'altra parte, poichè $rg(A) = 2$, il numero totale di blocchi è $s = n - rg(A) = 5 - 2 = 3$ e dunque

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ & & & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4.7.14 Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1) Verificare che A è nilpotente e trovarne l'indice
- 2) Determinare la forma canonica di Jordan della matrice A .

Osserviamo che $A^2 = 0$, dunque A ha indice 2 e quindi esiste almeno un blocco di Jordan di ordine 2. Inoltre il numero di blocchi di Jordan di ordine 2 è uguale a $n_3 + n_1 - 2n_2 = \dim \text{Im}A^3 + \dim \text{Im}A - 2\dim \text{Im}A^2 = 0 + 2 - 0 = 2$. Sappiamo pure che il numero totale di blocchi di Jordan è $s = 5 - rg(A) = 5 - 2 = 3$ e dunque la forma

canonica di Jordan per A è

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \vdots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \vdots & 0 & 1 & \vdots \\ & & \vdots & 0 & 0 & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

4.7.3 Forma canonica di Jordan di un endomorfismo qualunque

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} di dimensione n e sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo qualunque di V . Sia λ un autovalore di f . L'autospazio $E(\lambda)$ può essere pensato come il più grande sottospazio di V in cui l'endomorfismo $f - \lambda I$ è uguale a zero. Vogliamo ora dare la nozione di *autospazio generalizzato* detto anche *sottospazio radice*.

Definizione 4.7.15 Un vettore $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \in V$ è detto *vettore radice* relativo all'autovalore λ se esiste un intero $m \geq 1$ tale che $(f - \lambda I)^m(\vec{v}) = \vec{0}$.

Lemma 4.7.16 L'insieme costituito da tutti i vettori radice relativi all'autovalore λ e dal vettore nullo è un sottospazio vettoriale di V che denotiamo con R_λ .

Dimostrazione Siano v_1, v_2 due vettori radice relativi all'autovalore λ . Allora esistono $m_1 \geq 1, m_2 \geq 1$ tali che $(f - \lambda I)^{m_1}(v_1) = \vec{0}$ e $(f - \lambda I)^{m_2}(v_2) = \vec{0}$. Allora $(f - \lambda I)^m(v_1 + v_2) = \vec{0}$, dove $m = \max\{m_1, m_2\}$ e dunque $v_1 + v_2 \in R_\lambda$. Se \vec{v} è un vettore radice allora per ogni $k \in \mathbb{K}$ si ha che $k\vec{v} \in R_\lambda$. □

Definizione 4.7.17 Il sottospazio R_λ è il più grande sottospazio dello spazio V in cui l'endomorfismo $f - \lambda I$ è nilpotente. Esso è detto *autospazio generalizzato* dell'endomorfismo f relativo all'autovalore λ .

Osservazione 4.7.18 Il sottospazio R_λ è invariante per $f - \lambda I$. Infatti per ogni $\vec{v} \in R_\lambda$ esiste un $m \geq 1$ tale che $(f - \lambda I)^m(\vec{v}) = \vec{0}$ da cui segue che $(f - \lambda I)^{m-1}((f - \lambda I)(\vec{v})) = \vec{0}$ e dunque $(f - \lambda I)(\vec{v}) \in R_\lambda$.

Osservazione 4.7.19 Il sottospazio R_λ è invariante per f . Infatti per ogni $\vec{v} \in R_\lambda$ esiste un intero $m \geq 1$ tale che $(f - \lambda I)^m(\vec{v}) = \vec{0}$ da cui segue che anche $(f - \lambda I)^{m+1}(\vec{v}) = \vec{0}$ e dunque $\vec{0} = (f - \lambda I)^m(f(v) - \lambda v) = (f - \lambda I)^m(f(v)) - (f - \lambda I)^m(\lambda v) = (f - \lambda I)^m(f(v)) - \lambda(f - \lambda I)^m(\vec{v}) = (f - \lambda I)^m(f(v))$ e dunque $f(\vec{v}) \in R_\lambda$.

Esercizio 4.7.20 Il sottospazio R_λ è invariante per $f - \mu I$ per ogni $\mu \in \mathbb{K}$. Infatti per ogni $\vec{v} \in R_\lambda$ si ha che $(f - \mu I)(v) = f(v) - \mu v \in R_\lambda$ essendo R_λ un sottospazio e i vettori $f(v), \mu v \in R_\lambda$. Da ciò segue che $(f - \mu I)|_{R_\lambda}$ è un endomorfismo di R_λ .

Proposizione 4.7.21 *Se $\lambda \neq \mu$ l'endomorfismo $(f - \mu I)_{|R_\lambda}$ è un isomorfismo*

Dimostrazione È sufficiente dimostrare che il nucleo di $(f - \mu I)_{|R_\lambda}$ è costituito dal solo vettore nullo. Supponiamo che esista un vettore $\vec{v} \in N((f - \mu I)_{|R_\lambda})$ con $\vec{v} \neq \vec{0}$. Allora $(f - \mu I)(\vec{v}) = \vec{0}$ e dunque $f(\vec{v}) = \mu \vec{v}$. Da ciò segue che $(f - \lambda I)(\vec{v}) = f(\vec{v}) - \lambda \vec{v} = (\mu - \lambda) \vec{v}$ e dunque $\mu - \lambda$ è un autovalore dell'endomorfismo nilpotente $(f - \lambda I)_{|R_\lambda}$. Ma gli autovalori di un endomorfismo nilpotente sono zero e quindi $\mu = \lambda$, contraddicendo $\mu \neq \lambda$. Quindi $\vec{v} = \vec{0}$ e dunque $N((f - \mu I)_{|R_\lambda}) = \{\vec{0}\}$. \square

Osservazione 4.7.22 *Sia λ un autovalore di molteplicità algebrica m allora il nucleo dell'endomorfismo $(f - \lambda I)^m$, $N((f - \lambda I)^m) = R_\lambda$. Potrebbe darsi che $R_\lambda = N((f - \lambda I)^t)$ con $t \leq m$.*

Ora proveremo l'analogo della Proposizione (4.7.9) per i sottospazi radice.

Proposizione 4.7.23 *Sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo di un \mathbb{K} -spazio vettoriale V di dimensione n . Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ autovalori distinti di f e siano $R_1 = R_{\lambda_1}, \dots, R_p = R_{\lambda_p}$ gli autospazi generalizzati relativi a $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, rispettivamente. Allora la somma*

$$R_1 + \dots + R_p$$

è diretta, ossia l'equazione

$$\vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_p = \vec{0} \text{ con } \vec{v}_i \in R_i \text{ se e solo se } \vec{v}_i = \vec{0}, \text{ per } i = 1, \dots, p.$$

Dimostrazione Faremo la dimostrazione per induzione sull'intero p . Per $p = 1$ la dimostrazione è ovvia. Supponiamo d'aver dimostrato la Proposizione per $p - 1$ sottospazi radice. Sia dunque $\vec{v}_p \in R_p$, questo implica che esiste un intero $s \geq 1$ tale che $(f - \lambda_p I)^s(\vec{v}_p) = \vec{0}$. Applichiamo $(f - \lambda_p I)^s$ al vettore $\vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_p$ e otteniamo

$$(f - \lambda_p I)^s(\vec{v}_1) + \dots + (f - \lambda_p I)^s(\vec{v}_{p-1}) + (f - \lambda_p I)^s(\vec{v}_p) = \vec{0} \quad (4.31)$$

Poniamo $(f - \lambda_p I)^s(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ e sappiamo che $(f - \lambda_p I)^s(\vec{v}_p) = \vec{0}$ e quindi abbiamo l'equazione

$$\vec{w}_1 + \dots + \vec{w}_{p-1} = \vec{0} \quad (4.32)$$

Poichè i sottospazi R_i sono $(f - \lambda_p I)$ -invarianti allora $\vec{w}_i = (f - \lambda_p I)^s(\vec{v}_i) \in R_i$ e quindi per ipotesi induttiva si ha che $\vec{w}_1 = \dots = \vec{w}_{p-1} = \vec{0}$. Poichè $(f - \lambda_p I)$ è invertibile nei sottospazi R_1, \dots, R_{p-1} si ha che $\vec{v}_i = \vec{0}$ per $i = 1, \dots, p - 1$ e dunque anche $\vec{v}_p = \vec{0}$. \square

Vogliamo ora dimostrare che i sottospazi radice R_{λ_i} hanno dimensione uguale alla molteplicità algebrica di λ_i .

Proposizione 4.7.24 *Per ogni autovalore $\bar{\lambda}$ dell'endomorfismo $f : V \rightarrow V$ si ha che $\dim R_{\bar{\lambda}} = m_a(\bar{\lambda})$, dove $m_a(\bar{\lambda})$ è la molteplicità algebrica di $\bar{\lambda}$.*

Dimostrazione Sia $V/R_{\bar{\lambda}} := \{[\bar{v}] := \bar{v} + R_{\bar{\lambda}}, \bar{v} \in V\}$, lo spazio quoziente e sia $\pi : V \rightarrow V/R_{\bar{\lambda}}$ l'applicazione di proiezione, ovvero $\pi(\bar{v}) = [\bar{v}]$. L'endomorfismo f induce un'applicazione $\bar{f} : V/R_{\bar{\lambda}} \rightarrow V/R_{\bar{\lambda}}$, con $\bar{f}([\bar{v}]) = [f(\bar{v})]$. Si ha quindi il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ V/R_{\bar{\lambda}} & \xrightarrow{\bar{f}} & V/R_{\bar{\lambda}} \end{array}$$

Sia $\{v_1, \dots, v_t\}$ una base per il sottospazio $R_{\bar{\lambda}}$. Estendiamo tale base a una base per V e sia essa $\mathcal{B} := \{v_1, \dots, v_t, v_{t+1}, \dots, v_n\}$. Allora la matrice associata a f in tale base è della forma

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & \vdots & & \\ \dots & & \dots & \\ 0 & \vdots & A_2 & \end{pmatrix}$$

dove A_1 è una matrice di ordine t e A_2 è una matrice di ordine $n - t$. Infatti poichè $R_{\bar{\lambda}}$ è f -invariante allora $f(v_i) \in R_{\bar{\lambda}}$ per ogni $i = 1, \dots, t$. Sia $f_1 = f|_{R_{\bar{\lambda}}}$ allora si ha che A_1 è la matrice associata a f_1 nella base $\{v_1, \dots, v_t\}$. Osserviamo che l'insieme $\{[v_{t+1}], \dots, [v_n]\}$ è una base per $V/R_{\bar{\lambda}}$ e quindi A_2 è la matrice associata a \bar{f} nella base $\{[v_{t+1}], \dots, [v_n]\}$. Allora il polinomio caratteristico di B , $p_B(\lambda) = p_{A_1}(\lambda) \cdot p_{A_2}(\lambda)$. Supponiamo che $\dim R_{\bar{\lambda}} = t < m_a(\bar{\lambda})$. Poichè $p_B(\lambda) = p_{A_1}(\lambda) \cdot p_{A_2}(\lambda)$ ne segue che $\bar{\lambda}$ è una radice del polinomio $p_{A_2}(\lambda)$ e quindi $\bar{\lambda}$ è un autovalore dell'endomorfismo \bar{f} . Sia $[\bar{v}]$ il corrispondente autovettore. Allora $\bar{f}([\bar{v}]) = \bar{\lambda}[\bar{v}]$ da cui segue che $[f(\bar{v})] = [\bar{\lambda}\bar{v}]$ e quindi $f(\bar{v}) - \bar{\lambda}\bar{v} \in R_{\bar{\lambda}}$. Dunque esiste un intero k tale che $(f - \bar{\lambda}I)^k(f(\bar{v}) - \bar{\lambda}\bar{v}) = \bar{0}$, da cui segue che $(f - \bar{\lambda}I)^{k+1}(\bar{v}) = \bar{0}$ e quindi $\bar{v} \in R_{\bar{\lambda}}$, ossia $[\bar{v}] = \bar{0}$, contraddicendo il fatto che $[\bar{v}]$ è un autovettore. Dunque non è possibile che $\dim R_{\bar{\lambda}} < m_a(\bar{\lambda})$ e pertanto $\dim R_{\bar{\lambda}} = m_a(\bar{\lambda})$. \square

Corollario 4.7.25 *Se $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sono tutti gli autovalori distinti di f e sono tutti contenuti in \mathbb{K} allora*

$$V = R_1 \oplus \dots \oplus R_p$$

Dimostrazione Poichè $R_1 + \dots + R_p$ è somma diretta e poichè $\dim(R_1 + \dots + R_p) = m_1 + \dots + m_p = n$ allora $V = R_1 \oplus \dots \oplus R_p$. \square

Abbiamo quindi dimostrato il seguente teorema

Teorema 4.7.26 *Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione n . Per ogni endomorfismo $f : V \rightarrow V$ i cui autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sono tutti contenuti nel campo \mathbb{K} si ha che*

$$V = R_1 \oplus \dots \oplus R_p$$

Equivalentemente

Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ tale che tutte le radici del polinomio caratteristico sono contenute in \mathbb{K} . Allora esiste una matrice $M \in GL_n(\mathbb{K})$ tale che $M^{-1}AM$ è in forma canonica di Jordan.

Ricordiamo che $(f - \lambda I)|_{R_\lambda}$ è nilpotente e denotiamo tale endomorfismo con g . Allora

$$f|_{R_\lambda} = \lambda I + g$$

Per la Proposizione (4.7.9) applicata all'endomorfismo g esiste una decomposizione di R_λ come somma diretta di sottospazi invarianti in ognuno dei quali g induce un endomorfismo ciclico. Poichè i sottospazi invarianti per g lo sono anche per f , operando tale decomposizione in ogni sottospazio radice si ha il risultato.

Osservazione 4.7.27 Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ e dato un autovalore λ per A si ha che il numero di blocchi di Jordan di ordine k corrispondenti a λ è dato dalla formula

$$rg(A - \lambda I)^{k+1} + rg(A - \lambda I)^{k-1} - 2rg(A - \lambda I)^k$$

Esercizio 4.7.28 Determinare la forma canonica di Jordan della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico $p_A(\lambda) = (\lambda - 2)^4$. La matrice A non è diagonalizzabile poichè $m_a(2) = 4 \neq m_g(2) = 1$. La matrice $A - 2I$ è nilpotente di indice 4 e dunque $A - 2I$ ha almeno un blocco di Jordan di ordine 4. Pertanto la forma canonica di Jordan di A è

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4.7.29 Determinare la forma canonica di Jordan della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^4$. La matrice A non è diagonalizzabile poichè $m_a(1) = 4 \neq m_g(1) = 2$. La matrice $A - I$ è nilpotente di indice 2 e dunque $A - I$ ha almeno un blocco di Jordan di ordine 2. Inoltre il numero totale di blocchi di Jordan

è $s = 4 - \text{rg}(A - I) = 4 - 2 = 2$. Pertanto la forma canonica di Jordan di A è

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4.7.30 Determinare la forma canonica di Jordan della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico $p_A(\lambda) = (\lambda - 3)^3(\lambda + 2)$. La matrice A non è diagonalizzabile poichè $m_a(3) = 3 \neq m_g(3) = 2$. Per $\lambda = 3$ il numero totale di blocchi di Jordan è $4 - \text{rg}(A - 3I) = 4 - 2 = 2$. Dunque la forma canonica di Jordan di A è

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \vdots & & & \\ 0 & 3 & \vdots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ & & \vdots & 3 & \vdots & \\ & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & \vdots & -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4.7.31 Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 0 & 6 & -3 \\ 7 & 6 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

- (i) Determinare la forma canonica di Jordan J della matrice A .
- (ii) Trovare una matrice $C \in GL_5(\mathbb{R})$ tale che $J = C^{-1}AC$.

Il polinomio caratteristico $p_A(\lambda) = (\lambda + 1)^3(\lambda - 2)^2$. La matrice A non è diagonalizzabile poichè $m_a(-1) = 3 \neq m_g(-1) = 2$ e $m_a(2) = 2 \neq m_g(2) = 1$.

Per $\lambda = -1$ il numero totale di blocchi di Jordan è $5 - \text{rg}(A + I) = 5 - 3 = 2$. Per $\lambda = 2$ il numero totale di blocchi di Jordan è $5 - \text{rg}(A - 2I) = 5 - 4 = 1$.

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \vdots & & & & \\ 0 & -1 & \vdots & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & \vdots & -1 & \vdots & & \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & \vdots & 2 & 1 \\ & & & & \vdots & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determiniamo ora la matrice C tale che $J = C^{-1}AC$, ovvero troviamo la base di \mathbb{R}^5 rispetto alla quale l'endomorfismo di \mathbb{R}^5 definito dalla matrice A viene rappresentato dalla matrice J . Noi vogliamo trovare vettori $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in \mathbb{R}^5$ tali che

$$\begin{aligned} Av_1 &= -v_1, \\ Av_2 &= v_1 - v_2, \\ Av_3 &= -v_3, \\ Av_4 &= 2v_4, \\ Av_5 &= v_4 + 2v_5 \end{aligned}$$

Osserviamo che da $Av_2 = v_1 - v_2$ ne segue che quindi $v_1 = (A + I)v_2$ e quindi v_1 è una combinazione lineare delle colonne della matrice $A + I$ ed è anche un autovettore relativo all'autovalore $\lambda_1 = -1$ e quindi $v_1 \in E(-1) \cap col(A + I)$.

$$A + I = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 & 6 & -3 \\ 7 & 7 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

e le soluzioni del sistema con matrice associata $A + I$ sono l'insieme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e quindi l'autospazio $E(-1) = Span\{(-1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0)\}$ ed esso ha equazioni $x_1 + x_2 = 0, x_4 = x_5 = 0$. Lo spazio delle colonne della matrice $A + I$, $col(A + I)$ ha equazioni $x_4 = 0, 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_5 = 0$.

Allora le equazioni di $E(-1) \cap \text{col}(A+I)$ sono $x_1 + x_2 = 0, x_4 = x_5 = 0, 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_5 = 0$ e quindi $E(-1) \cap \text{col}(A+I)$ è l'insieme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

come v_1 possiamo prendere $v_1 = (2, -2, 1, 0, 0)$.

Ora calcoliamo v_2 sapendo che $(A+I)v_2 = v_1$. Risolvendo il sistema $(A+I)X = v_1$ si ha

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e quindi come v_2 possiamo prendere $v_2 = 3(0, 0, 0, 1, \frac{4}{3}) = (0, 0, 0, 3, 4)$.

Come vettore v_3 possiamo prendere un vettore di $E(-1)$ linearmente indipendente con v_1, v_2 , per esempio $v_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$ e quindi $A(v_3) = -v_3$.

Per quanto riguarda l'autovalore $\lambda_2 = 2$, noi vogliamo trovare vettori v_4, v_5 tali che $Av_4 = 2v_4$ e $Av_5 = v_4 + 2v_5$, da cui segue che $v_4 = (A - 2I)v_5$ e quindi $v_4 \in E(2) \cap \text{col}(A - 2I)$. Le equazioni di $E(2)$ sono $x_1 - x_5 = 0, x_2 - x_5 = 0, x_3 = x_4 = 0$ e quindi l'autospazio $E(2) = \text{Span}\{(-1, 1, 0, 0, 1)\}$. Lo spazio $\text{col}(A - 2I)$ ha equazioni $x_1 + x_2 = 0$ e quindi $E(2) \cap \text{col}(A - 2I) = E(2)$ e come v_4 prendiamo $v_4 = (-1, 1, 0, 0, 1)$. Ora calcoliamo v_5 sapendo che $(A - 2I)v_5 = v_4$ e si ha che $v_5 = (-1, 2, 0, 0, 0)$. La base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ è quella rispetto alla quale l'endomorfismo f_A ha come matrice associata J e quindi la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4.7.32 Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- (i) Determinare la forma canonica di Jordan J della matrice A .
- (ii) Trovare una matrice $C \in GL_4(\mathbb{R})$ tale che $J = C^{-1}AC$.

Il polinomio caratteristico $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^4$. La matrice A non è diagonalizzabile poichè $m_d(1) = 4 \neq m_g(1) = 2$. Per $\lambda = 1$ il numero totale di blocchi di Jordan è

$4 - \text{rg}(A - I) = 4 - 2 = 2$. Quindi o si hanno due blocchi di ordine 2 oppure un blocco di ordine 1 e uno di ordine 3.

La matrice $A - I$ è nilpotente e poichè

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad (A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ne segue che $(A - I)^3 = 0$ e quindi è nilpotente di indice 3 e perciò c'è almeno un blocco di Jordan di ordine 3. Pertanto la forma canonica di Jordan di A è

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determiniamo ora la matrice C tale che $J = C^{-1}AC$, ovvero troviamo la base di \mathbb{R}^4 rispetto alla quale l'endomorfismo di \mathbb{R}^4 definito dalla matrice A viene rappresentato dalla matrice J . Noi vogliamo trovare vettori $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ tali che

$$\begin{aligned} Av_1 &= v_1, \\ Av_2 &= v_2, \\ Av_3 &= v_2 + v_3, \\ Av_4 &= v_3 + v_4 \end{aligned}$$

Osserviamo che da $Av_3 = v_2 + v_3$ ne segue che quindi $v_2 = (A - I)v_3$ da $Av_4 = v_3 + v_4$ ne segue che $v_3 = (A - I)v_4$ e quindi $v_2 = (A - I)v_3 = (A - I)^2v_4$. Si ha quindi che v_2 è una combinazione lineare delle colonne della matrice $(A - I)^2$ ed è anche un autovettore relativo all'autovalore $\lambda_1 = 1$ e quindi $v_2 \in E(1) \cap \text{col}((A - I)^2)$.

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

e l'autospazio $E(1)$ ha equazioni $x_1 - x_3 + x_4 = 0, 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0$ e quindi $E(1) = \text{Span}\{(1, \frac{2}{3}, 1, 0), (-1, -\frac{2}{3}, 0, 1)\}$. Lo spazio delle colonne della matrice $(A - I)^2, \text{col}((A - I)^2)$ ha equazioni $x_1 = x_2 = 0, x_3 - x_4 = 0$.

Allora $E(1) \cap \text{col}((A - I)^2)$ è l'insieme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

come v_2 possiamo prendere $v_2 = (0, 0, 1, 1)$.

Ora calcoliamo v_4 sapendo che $(A-I)^2 v_4 = v_2$. Risolvendo il sistema $(A-I)^2 X = v_2$ si ha

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e quindi come v_4 possiamo prendere $v_4 = (0, 0, 1, 0)$. Poichè $v_3 = (A - I)v_4$ allora $v_3 = (-1, -1, 1, 2)$

Come vettore v_1 possiamo prendere un vettore di $E(1)$ linearmente indipendente con v_2, v_3, v_4 , per esempio $v_1 = 3(1, \frac{2}{3}, 1, 0) = (3, 2, 3, 0)$ e quindi $Av_1 = v_1$. La base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è quella rispetto alla quale l'endomorfismo f_A ha come matrice associata J e quindi la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4.7.33 Sia $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo così definito

$$F(x, y, z, t) = (y - 2z, 2x + 2t, x + t, -y + 2z)$$

- 1) Scrivere la matrice A associata a F nella base canonica
- 2) Determinare il nucleo e l'immagine di F e una loro base.
- 3) Verificare che la matrice A è nilpotente e determinarne l'indice di nilpotenza
- 4) Trovare una base di \mathbb{R}^4 rispetto alla quale la matrice A è in forma canonica di Jordan.

1) Osserviamo che

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Da 1) segue facilmente che

$$\begin{aligned} N(F) &:= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + t = 0, y - 2z = 0\} \\ &= \langle v_1 = (0, 2, 1, 0), v_2 = (1, 0, 0, -1) \rangle = \text{Im}(F) \end{aligned}$$

Poichè $\text{Im}(F) = N(F)$ allora $(F \circ F)(v) = F(F(v)) = 0$. Da qui segue che $A^2 = 0$ essendo A^2 la matrice associata a $F \circ F$ nella base canonica.

3) Da 2) segue che A nilpotente di indice 2 e dunque esiste almeno un blocco di Jordan di ordine 2. Inoltre il numero totale s di blocchi di Jordan della matrice A è

$s = 4 - \text{rg}(A) = 4 - 2 = 2$. Dunque la forma canonica di Jordan di A è

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Per trovare una base di \mathbb{R}^4 rispetto alla quale la matrice A è nella forma canonica di Jordan data in 3), consideriamo i vettori di una base di $\text{Im}(F)$ siano essi $v_1 = (0, 2, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 0, -1)$. Siano $v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ tali che $F(v_3) = v_1$ e $F(v_4) = v_2$. Basta quindi risolvere il sistema $AX = v_1$ e $AX = v_2$ e otteniamo che come v_3, v_4 possiamo prendere $v_3 = (1, 0, 0, 0)$, $v_4 = (0, 1, 0, 0)$. Allora la base cercata è $\{v_1, v_3, v_2, v_4\}$. Infatti $F(v_1) = 0, F(v_3) = v_1, F(v_2) = 0, F(v_4) = v_2$.

Esercizio 4.7.34 Determinare la forma canonica di Jordan della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 9 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

e una base di \mathbb{R}^3 rispetto alla quale la matrice ha la forma di Jordan determinata.

Il polinomio caratteristico $p_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3$. La matrice A non è diagonalizzabile poichè $m_a(2) = 3 \neq m_g(2) = 2$. La matrice $A - 2I$ è nilpotente di indice 2 e dunque $A - 2I$ ha almeno un blocco di Jordan di ordine 2. Inoltre il numero totale di blocchi è $3 - \text{rg}(A - 2I) = 2$. Pertanto la forma canonica di Jordan di A è

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determiniamo ora la base. La matrice

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

ha rango 1 e quindi l'autospazio relativo a $\lambda = 2$, $E(2) = N(A - 2I)$ ha equazione $3x + 3y - 2z = 0$ e quindi è l'insieme delle terne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Sia $v_2 = (0, 0, 1)$ un vettore che non appartiene al nucleo di $A - 2I$ e quindi $(A - 2I)(v_2) \neq 0$. Sia ora v_1 un vettore tale che $v_1 = (A - 2I)(v_2)$ e quindi $v_1 = (-4, 0, -6)$. Osserviamo che $(A - 2I)(v_1) = (A - 2I)^2(v_2) = 0$. Come v_3 possiamo prendere un qualunque altro vettore di $N(A - 2I)$ che sia indipendente da v_1 , per esempio $v_3 = (-1, 1, 0)$.

Nella base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ la matrice A assume la forma canonica di Jordan. Infatti

$$\begin{aligned} A(v_1) &= (-8, 0, -12) = 2v_1; \\ A(v_2) &= (-4, 0, -4) = v_1 + 2v_2 \\ A(v_3) &= (-2, 2, 0) = 2v_3 \end{aligned}$$

Esercizio 4.7.35 Determinare la forma canonica di Jordan della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & -3 \\ 9 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

e una base di \mathbb{R}^3 rispetto alla quale la matrice ha la forma di Jordan determinata.

Il polinomio caratteristico $p_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3$. La matrice A non è diagonalizzabile poichè $m_a(2) = 3 \neq m_g(2) = 1$. L'autospazio generalizzato è $N(A - 2I)^3$. In questo caso $(A - 2I)^3 = 0$ e quindi $A - 2I$ è nilpotente di indice 3 e dunque $A - 2I$ ha almeno un blocco di Jordan di ordine 3. Pertanto la forma canonica di Jordan di A è

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determiniamo ora la base. Si ha che

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 9 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

ha rango 2 e quindi l'autospazio relativo a $\lambda = 2$, $E(2) = N(A - 2I)$ ha equazione $2x + 2y - z = z = 0$ e quindi è l'insieme delle terne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Inoltre

$$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A - 2I)^3 = 0.$$

Sia v_3 un vettore tale che $(A - 2I)^2(v_3) \neq 0$, allora $v_2 = (A - 2I)(v_3)$ e $v_1 = (A - 2I)^2(v_3)$. Se per esempio $v_3 = (0, 0, 1)$, si ha $v_2 = (A - 2I)(v_3)$ e quindi $v_2 = (-1, -3, -6)$ e $v_1 = (A - 2I)(v_2)$ e quindi $v_1 = (-2, 2, 0)$. Nella base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ la matrice A assume la forma canonica di Jordan. Infatti

$$\begin{aligned} A(v_1) &= (-4, 4, 0) = 2v_1; \\ A(v_2) &= (-4, -4, -12) = v_1 + 2v_2 \\ A(v_3) &= (-1, -3, -4) = v_2 + 2v_3 \end{aligned}$$

Capitolo 5

Spazi Vettoriali Euclidei

Vogliamo dare a \mathbb{R}^n una struttura di *spazio euclideo*. Per fare ciò bisogna definire in \mathbb{R}^n un prodotto scalare. Noi considereremo come prodotto scalare quello standard.

5.1 Prodotto scalare standard in \mathbb{R}^n .

Siano $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $v = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Il *prodotto scalare standard* di u e v è così definito

$$\langle u, v \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (5.1)$$

Osserviamo che se pensiamo ai vettori u, v come vettori riga, ovvero

$$(x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n), \quad (y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n)$$

allora il prodotto scalare $\langle u, v \rangle$ non è altro che il prodotto tra la matrice riga u e la matrice colonna ${}^t v$, ovvero $\langle u, v \rangle = u \cdot {}^t v$.

5.1.1 Proprietà del prodotto scalare standard

Il prodotto scalare definito in (5.1) soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$, per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$ (simmetria)
2. $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$, per ogni $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ (linearità)
3. $\langle u, kv \rangle = k \langle u, v \rangle$, per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $k \in \mathbb{R}$ (omogeneità)
4. $\langle u, u \rangle \geq 0$, l'uguaglianza vale se e solo se $u = \vec{0}$ (positività)

Queste proprietà sono di facile verifica. Basta solo applicare la definizione di prodotto scalare.

Definizione 5.1.1 Lo spazio \mathbb{R}^n in cui è definito un prodotto scalare (per esempio il prodotto scalare standard) è detto spazio vettoriale euclideo.

5.2 Gli spazi euclidei $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

Vogliamo ora considerare gli spazi euclidei $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ e vedere il legame che c'è tra il prodotto scalare standard e le nozioni di: *lunghezza* di un vettore, *angolo* tra vettori, *proiezione* ortogonale di un vettore lungo un altro vettore, con semplici considerazioni di carattere geometrico.

5.2.1 Lunghezza di un vettore

Dalla Fig. 1 si vede che la lunghezza del vettore $\vec{X} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, in simboli $\|\vec{X}\|$ si può calcolare applicando il teorema di Pitagora al triangolo OXX' e si ha che

$$\|\vec{X}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Similmente, dato un vettore $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, dalla Fig. 2 si vede che

$$\|\vec{X}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

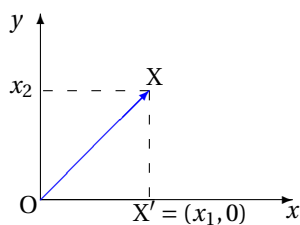


Fig. 1

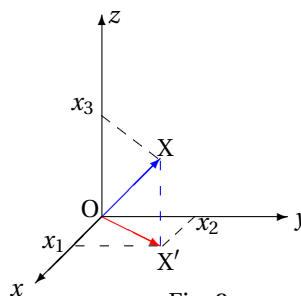


Fig. 2

La lunghezza di un vettore gode delle seguenti proprietà:

1. Per ogni $u \in \mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3)$ $\|u\| \geq 0$ e vale l'uguaglianza solo se $u = \vec{0}$;
2. Per ogni $u \in \mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3)$ e per ogni $k \in \mathbb{R}$ si ha $\|ku\| = |k| \cdot \|u\|$;

Tali proprietà seguono direttamente dalla definizione.

5.2.2 Ortogonalità di vettori

Siano X, Y due vettori di \mathbb{R}^2 aventi lo stesso punto di applicazione O e sia $Z = X + Y$, vedasi Fig. 5.1.

Dalla definizione di lunghezza di un vettore si ha che

$$\begin{aligned} \|Z\|^2 &= \|X + Y\|^2 = \langle X + Y, X + Y \rangle \\ &= \|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2 \langle X, Y \rangle \end{aligned} \tag{5.2}$$

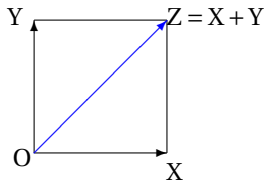


Figura 5.1: \vec{OX}, \vec{OY} , vettori ortogonali

Poichè i vettori X e Y individuano un angolo retto, applicando il teorema di Pitagora al triangolo OXZ in Figura 5.1 si ha che

$$\|Z\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 \tag{5.3}$$

Da (5.2) e (5.3), poichè i vettori X e Y sono perpendicolari, si conclude che $\langle X, Y \rangle = 0$. Abbiamo quindi la seguente definizione

Definizione 5.2.1 Due vettori si dicono *ortogonali* se il loro prodotto scalare è zero.

5.2.3 Proiezione di vettori

Siano X, Y due vettori di \mathbb{R}^2 aventi lo stesso punto di applicazione O e linearmente indipendenti, ovvero non paralleli, vedasi Fig. 5.2. Sia Y' la *proiezione ortogonale* di Y lungo il vettore X, in simboli $Y' = pr_X Y$. Essendo il vettore Y' parallelo al vettore X si ha che $Y' = tX$ per qualche $t \in \mathbb{R}$. Sia $Z = Y - Y' = Y - tX$

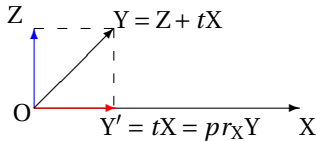


Figura 5.2: Y' è la proiezione ortogonale di Y lungo X

Se facciamo il prodotto scalare di Y per X e ricordiamo che $Y = Z + tX$, si ha

$$\langle Y, X \rangle = \langle Z + tX, X \rangle = \langle Z, X \rangle + \langle tX, X \rangle = t \langle X, X \rangle, \tag{5.4}$$

quest'ultima uguaglianza vale perchè i vettori X e Z sono ortogonali. Da (5.4) segue che

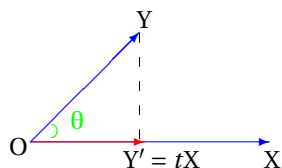
$$t = \frac{\langle Y, X \rangle}{\langle X, X \rangle}$$

e quindi

$$Y' = pr_X Y = \frac{\langle Y, X \rangle}{\langle X, X \rangle} X \tag{5.5}$$

5.2.4 Angolo tra vettori

Siano X, Y due vettori distinti non nulli di \mathbb{R}^2 aventi lo stesso punto di applicazione O . Essi individuano un angolo convesso $\theta \in [0, \pi]$. Tale angolo convesso non dipende dall'ordine con cui si prendono i vettori X, Y . Se il vettore X o il vettore Y è il vettore nullo essi non individuano alcun angolo.



Se consideriamo il triangolo rettangolo OYY' e ricordiamo che in un triangolo rettangolo *un cateto è uguale all'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente* si ha che

$$\|Y'\| = \|Y\| \cos \theta \tag{5.6}$$

D'altra parte da (5.5) ne segue che

$$\|Y'\| = \left\| \frac{\langle Y, X \rangle}{\langle X, X \rangle} X \right\| = \frac{|\langle Y, X \rangle|}{\langle X, X \rangle} \|X\| = \frac{\langle Y, X \rangle}{\|X\|} \tag{5.7}$$

quest'ultima uguaglianza vale in quanto $t = \frac{\langle Y, X \rangle}{\langle X, X \rangle} > 0$ essendo l'angolo θ un angolo acuto. Mettendo insieme (5.6) e (5.7) ne segue che

$$\cos \theta = \frac{\langle Y, X \rangle}{\|X\| \cdot \|Y\|} \tag{5.8}$$

5.3 Prodotto vettoriale

Dati due vettori $v = (a_1, a_2, a_3), w = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, con \mathbb{R}^3 spazio euclideo con prodotto scalare standard, definiamo il *prodotto vettoriale* di v e w , denotato con $v \wedge w$, come il vettore le cui componenti sono

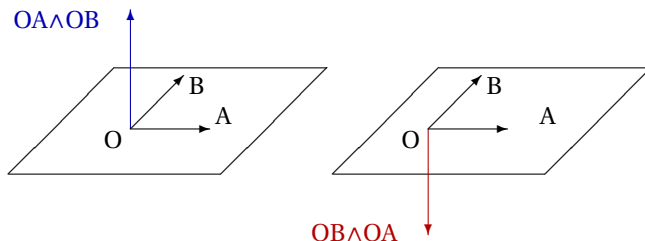
$$v \wedge w := (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

5.3.1 Proprietà del prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale gode delle seguenti proprietà:

- 1) $v \wedge w = -w \wedge v$ *antisimmetria*
- 2) $v \wedge (u + w) = v \wedge u + v \wedge w$ *distributività*
- 3) $k(v \wedge w) = (kv) \wedge w$

- 4) $\langle v, v \wedge w \rangle = 0$
- 5) $\langle w, v \wedge w \rangle = 0$
- 6) $\|v \wedge w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2$ *identità di Lagrange*
- 7) $v \wedge w = 0$ se e solo se $v = kw$



Tali proprietà si verificano facilmente, usando la definizione di prodotto vettoriale. Noi vedremo solo le ultime due proprietà.

Per quanto riguarda la 6):

$$\begin{aligned} \|v \wedge w\|^2 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_3^2 - 2a_3 a_1 b_1 b_3 + a_1^2 b_2^2 \\ &\quad + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\ &= a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 \\ &\quad - a_1^2 b_1^2 - a_2^2 b_2^2 - a_3^2 b_3^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 \\ &= a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 \\ &\quad - 2a_1 a_3 b_1 b_3 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la 7):

È chiaro che se $v = kw$ dalla definizione di prodotto vettoriale ne segue che $v \wedge w = 0$. Viceversa se $v \wedge w = 0$ allora dalla identità di Lagrange si ha che $\|v\|^2 \|w\|^2 = (v \cdot w)^2$. Inoltre poichè $(v \cdot w)^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 \cos^2 \theta$, dove θ è l'angolo tra i vettori v e w , ne segue che $\cos^2 \theta = 1$, da cui segue che i vettori v e w sono paralleli.

Vogliamo ora esprimere il prodotto vettoriale di due vettori come il determinante di una matrice e precisamente:

Siano $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ e $v = (a_1, a_2, a_3)$, $w = (b_1, b_2, b_3)$ vettori di \mathbb{R}^3 . Osserviamo che i vettori v, w possono essere scritti come combinazione lineare di $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, ossia $v = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$, $w = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$. Allora

$$v \wedge w = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \vec{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) + \vec{j}(a_3 b_1 - a_1 b_3) + \vec{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Esempio 5.3.1 Siano $v = (1, 2, 1), w = (3, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$. Allora

$$v \wedge w = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \vec{i}(4-1) + \vec{j}(3-2) + \vec{k}(1-6) = 3\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$$

Osservazione 5.3.2 Se $v, w \in \mathbb{R}^3$ sono vettori non paralleli allora il vettore $v \wedge w$ rappresenta un vettore normale al piano generato dai vettori $v, w \in \mathbb{R}^3$.

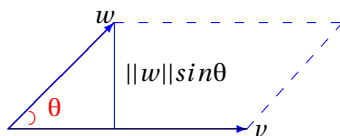
Esempio 5.3.3 Scrivere l'equazione cartesiana del piano Π passante per l'origine e con giacitura il sottospazio generato dai vettori $v = (1, 2, 1), w = (3, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$.

Da (5.3.1) abbiamo che $v \wedge w = 3\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$. Sappiamo inoltre che $v \wedge w$ è un vettore normale al piano Π e pertanto l'equazione cartesiana del piano Π è $3x + y - 5z = 0$.

5.3.2 Significato geometrico di $\|v \wedge w\|$

Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^3$, vedremo che $\|v \wedge w\|$ rappresenta l'area del parallelogramma individuato dai vettori v, w .

Dall'identità di Lagrange si ha che $\|v \wedge w\|^2 = \|v\|^2\|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2 = \|v\|^2\|w\|^2 - \|v\|^2\|w\|^2 \cos^2 \theta = \|v\|^2\|w\|^2 \sin^2 \theta$. Da qui segue che $\|v \wedge w\| = \|v\|\|w\| \sin \theta$. Poichè $\|w\| \sin \theta$ rappresenta l'altezza del parallelogramma individuato dai vettori v, w relativamente alla base v si ha che $\|v \wedge w\|$ rappresenta l'area del suddetto parallelogramma.

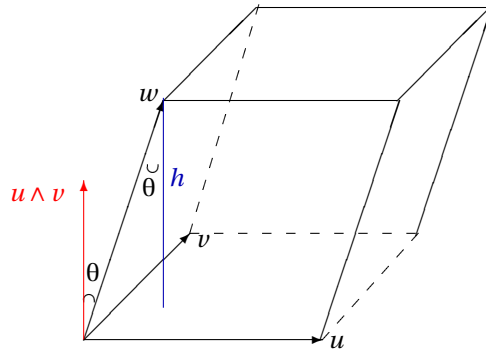


5.3.3 Prodotto misto e suo significato geometrico

Siano $u = (a_1, a_2, a_3), v = (b_1, b_2, b_3), w = (c_1, c_2, c_3)$ vettori di \mathbb{R}^3 . Il prodotto scalare $(u \wedge v) \cdot w$ è detto *prodotto misto*. Osserviamo che

$$\langle u \wedge v, w \rangle = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

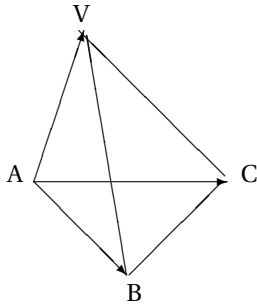
Vedremo che esso, a meno del segno, è il volume del parallelepipedo individuato dai vettori u, v, w .



Infatti $|(u \wedge v) \cdot w| = \|(u \wedge v)\| \cdot \|w\| \cos \theta = \|(u \wedge v)\| \cdot |h|$, dove h è l'altezza del parallelepipedo individuato dai vettori u, v, w .

Esercizio 5.3.4 Calcolare il volume del tetraedro individuato dai punti V, A, B, C dove $V = (1, 2, 3), A = (0, 1, 0), B = (-1, 1, 0), C = (2, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$.

Osserviamo che i quattro punti non sono complanari. Infatti i vettori $\vec{AB} = B - A = (-1, 0, 0), \vec{AV} = V - A = (1, 1, 3), \vec{AC} = C - A = (2, 0, 2)$, sono linearmente indipendenti, ovvero i vettori \vec{AB} e \vec{AC} non sono paralleli (e dunque essi generano un piano Π) e il vettore $\vec{AV} \notin \Pi$, ossia $\det M \neq 0$, dove M è la matrice i cui vettori riga sono i vettori $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AV}$.



$$\text{Volume}(\text{tetraedro}) = \frac{1}{3} \text{Area}(\text{base}) \cdot h = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \vec{AV} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \right) = \frac{1}{3}$$

5.4 Lo spazio euclideo \mathbb{R}^n

La nozione di lunghezza di un vettore di $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ può essere generalizzata a vettori di \mathbb{R}^n . Sia $u \in \mathbb{R}^n$, definiamo la *lunghezza* di u come

$$\|u\| := \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Come già visto per vettori del piano e dello spazio, la lunghezza di un vettore gode delle seguenti proprietà:

1. Per ogni $u \in \mathbb{R}^n$ $\|u\| \geq 0$ e vale l'uguaglianza solo se $u = \vec{0}$;

2. Per ogni $u \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $k \in \mathbb{R}$ si ha $\|ku\| = |k| \cdot \|u\|$;

Il prodotto scalare gode di un'importante proprietà che, come vedremo, ci permetterà di definire l'angolo tra due vettori di \mathbb{R}^n .

Teorema 5.4.1 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) Siano $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Allora

$$\langle X, Y \rangle^2 \leq \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $X = kY$ per qualche $k \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione Se $Y = 0$ la disuguaglianza è ovvia. Se $Y \neq 0$ consideriamo il vettore $X + \lambda Y$ e sia $\mu = (X + \lambda Y) \cdot (X + \lambda Y)$. Dalle proprietà del prodotto scalare si ha che $\mu = \langle X + \lambda Y, X + \lambda Y \rangle \geq 0$ e l'uguaglianza vale se e solo se $X + \lambda Y = 0$, ossia $X = -\lambda Y$.

Poichè $\mu = \langle X + \lambda Y, X + \lambda Y \rangle$, allora $\mu = \langle X + \lambda Y, X + \lambda Y \rangle = \langle X, X \rangle + 2\lambda \langle X, Y \rangle + \lambda^2 \langle Y, Y \rangle$.

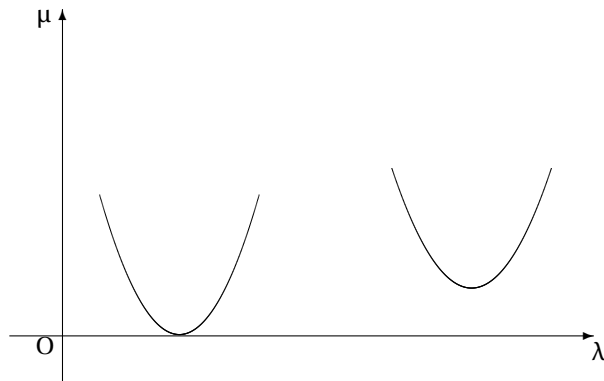


Figura 5.3: $\mu = \langle X, X \rangle + 2\lambda \langle X, Y \rangle + \lambda^2 \langle Y, Y \rangle$

L'equazione

$$\mu = \lambda^2 \langle Y, Y \rangle + 2\lambda \langle X, Y \rangle + \langle X, X \rangle$$

nel piano cartesiano λ, μ , rappresenta una parabola con la concavità verso l'alto (poichè $\langle Y, Y \rangle > 0$) e tutta contenuta nel semipiano positivo (poichè $\mu \geq 0$). Dunque il discriminante dell'equazione di secondo grado $\lambda^2 \langle Y, Y \rangle + 2\lambda \langle X, Y \rangle + \langle X, X \rangle$ deve essere minore o uguale a zero, ossia

$$\langle X, Y \rangle^2 - \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle \leq 0.$$

□

Osservazione 5.4.2 Usando la nozione di lunghezza di un vettore, la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, (5.4.1) diventa

$$\langle X, Y \rangle^2 \leq \|X\|^2 \|Y\|^2$$

o equivalentemente

$$|\langle X, Y \rangle| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$$

da cui segue (se X e Y sono entrambi non nulli) che

$$-1 \leq \frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\| \cdot \|Y\|} \leq 1$$

Da ciò segue che esiste un unico numero $\theta \in [0, \pi]$ tale che

$$\cos \theta := \frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\| \cdot \|Y\|}$$

e quindi possiamo pensare a questa quantità come il coseno dell'angolo individuato dai due vettori X e Y .

Definizione 5.4.3 Il numero reale $\theta \in [0, \pi]$ tale che

$$\cos \theta := \frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\| \cdot \|Y\|}$$

è detto *angolo convesso* tra i vettori X e Y , o angolo convesso formato dai vettori X e Y .

Corollario 5.4.4 (*Disuguaglianza Triangolare*) Siano $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Allora

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$

Dimostrazione Utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha che

$$\begin{aligned} \|X + Y\|^2 &= \langle X + Y, X + Y \rangle = \|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2\langle X, Y \rangle \\ &\leq \|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2|\langle X, Y \rangle| \leq \|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2\|X\| \cdot \|Y\| \\ &= (\|X\| + \|Y\|)^2 \end{aligned}$$

□

Diamo la nozione di *ortogonalità* in \mathbb{R}^n . Come per la definizione di lunghezza di un vettore, questa è una generalizzazione di quanto già visto in \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

Definizione 5.4.5 Due vettori $X, Y \in \mathbb{R}^n$ si dicono *ortogonali* se $\langle X, Y \rangle = 0$. In generale, l'insieme di vettori $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ è detto *ortogonale* se $\langle X_i, X_j \rangle = 0$ per $i \neq j$.

Esempio 5.4.6 La base canonica $\{E_1, \dots, E_n\}$ di \mathbb{R}^n è un insieme ortogonale.

Esempio 5.4.7 Se $\{X_1, \dots, X_k\} \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme ortogonale allora l'insieme $\{a_1 X_1, \dots, a_k X_k\}$ è un insieme ortogonale per ogni $a_i \in \mathbb{R}$.

Definizione 5.4.8 Sia $\{X_1, \dots, X_k\} \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme ortogonale di vettori non nulli. Esso si dice insieme *ortonormale* se $\|X_i\| = 1$ per ogni $i = 1, \dots, k$.

Esempio 5.4.9 Se $\{X_1, \dots, X_k\} \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme ortogonale di vettori non nulli allora l'insieme $\{\frac{X_1}{\|X_1\|}, \dots, \frac{X_k}{\|X_k\|}\}$ è un insieme ortonormale.

Esempio 5.4.10 Siano $X_1 = (1, 0, 1, 1), X_2 = (0, 1, -1, 1), X_3 = (3, 1, -1, -2) \in \mathbb{R}^4$. L'insieme $\{X_1, X_2, X_3\}$ è un insieme ortogonale.

Un importante teorema di geometria che riguarda l'ortogonalità è il teorema di Pitagora. Questo vale anche in \mathbb{R}^n .

Teorema 5.4.11 (Teorema di Pitagora) Sia $\{X_1, \dots, X_k\}$ un insieme ortogonale di vettori di \mathbb{R}^n . Allora

$$\|X_1 + X_2 + \dots + X_k\|^2 = \|X_1\|^2 + \|X_2\|^2 + \dots + \|X_k\|^2$$

Dimostrazione Sappiamo che $\|X_1 + X_2 + \dots + X_k\|^2 = \langle X_1 + X_2 + \dots + X_k, X_1 + X_2 + \dots + X_k \rangle = \langle X_1, X_1 + X_2 + \dots + X_k \rangle + \langle X_2, X_1 + X_2 + \dots + X_k \rangle + \dots + \langle X_k, X_1 + X_2 + \dots + X_k \rangle = \|X_1\|^2 + \|X_2\|^2 + \dots + \|X_k\|^2$, essendo l'insieme $\{X_1, \dots, X_k\}$ ortogonale. \square

Teorema 5.4.12 Ogni insieme ortogonale $\{X_1, \dots, X_k\}$ di vettori non nulli è linearmente indipendente.

Dimostrazione Dobbiamo verificare che l'equazione

$$\sum_i^k a_i X_i = 0$$

ammette la sola soluzione banale. Osserviamo che per ogni $j = 1, \dots, k$ si ha che $\langle X_j, \sum_i^k a_i X_i \rangle = 0$, da cui, essendo l'insieme $\{X_1, \dots, X_k\}$ ortogonale si ha che $0 = \langle X_j, \sum_i^k a_i X_i \rangle = \langle X_j, a_j X_j \rangle = a_j \langle X_j, X_j \rangle$. Inoltre i vettori sono non nulli e quindi $a_j = 0$ per ogni $j = 1, \dots, k$. \square

Vedremo che se in $U \subseteq \mathbb{R}^n$, sottospazio vettoriale, prendiamo una base ortogonale allora è facile trovare le componenti di un qualunque vettore di U in tale base ortogonale.

Teorema 5.4.13 (dello sviluppo di Fourier) Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale e sia $\{X_1, \dots, X_k\}$ una base ortogonale per U . Allora per ogni $X \in U$ si ha

$$X = \frac{X \cdot X_1}{\|X_1\|^2} X_1 + \dots + \frac{X \cdot X_k}{\|X_k\|^2} X_k$$

Dimostrazione Sia $X = a_1 X_1 + \dots + a_k X_k$. Allora per ogni $j = 1, \dots, k$ si ha che $X \cdot X_j = (a_1 X_1 + \dots + a_k X_k) \cdot X_j = a_j X_j \cdot X_j = a_j \|X_j\|^2$ ed essendo gli $X_j \neq \vec{0}$ si ha che $a_j = \frac{X \cdot X_j}{\|X_j\|^2}$. \square

Vedremo che data una base di un sottospazio $U \subseteq \mathbb{R}^n$ è sempre possibile trasformarla in una base ortogonale.

5.5 Algoritmo di Gram-Schmidt

Prima di descrivere l'algoritmo di Gram-Schmidt nel caso generale, vediamo come si ortogonalizza una base di \mathbb{R}^2 o di \mathbb{R}^3 .

Esempio 5.5.1 Sia $\{v, w\}$ una base di \mathbb{R}^2 non ortogonale, vedi Figura 5.4 (a). Fissiamo il vettore v e proiettiamo il vettore w lungo v e sia esso $v_1 = pr_v w = \frac{\langle w, v \rangle}{\|v\|^2} v$. Chiamiamo $w_1 = w - v_1$.

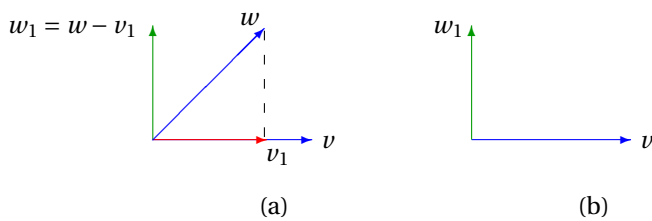


Figura 5.4: Gram-Schmidt in \mathbb{R}^2

Allora il vettore $w_1 = w - v_1$ è un vettore ortogonale a v . Dunque l'insieme $\{v, w_1\}$ in Figura 5.4 (b) è una base ortogonale per \mathbb{R}^2 .

Esempio 5.5.2 Sia $\{u, v, w\}$ una base di \mathbb{R}^3 non ortogonale, vedasi Figura 5.5 (a). Fissiamo il vettore u e proiettiamo il vettore v lungo u e sia esso $u_1 = pr_u v = \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u$. Chiamiamo $v_1 = v - u_1$. Per disegnarli più facilmente posizioniamo i vettori u, v_1, w come in Figura 5.5 (b).

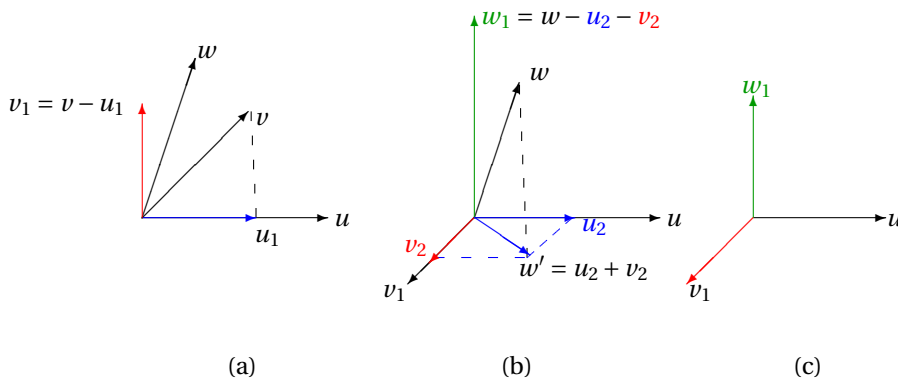


Figura 5.5: Gram-Schmidt in \mathbb{R}^3

Ora proiettiamo il terzo vettore w ortogonalmente sul piano generato dai vettori u e v_1 e chiamiamo

$$w' = u_2 + v_2 = pr_u w + pr_{v_1} w = \frac{\langle w, u \rangle}{\|u\|^2} u + \frac{\langle w, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1.$$

Il vettore $w_1 = w - w' = w - u_2 - v_2$ è ortogonale sia al vettore u che al vettore v_1 . Dunque l'insieme $\{u, v_1, w_1\}$ in Figura 5.5 (c) è una base ortogonale per \mathbb{R}^3 .

Possiamo generalizzare quanto fatto in \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 a una base non ortogonale di un sottospazio U di \mathbb{R}^n .

Caso generale Sia $\{X_1, \dots, X_k\}$ una base per $U \subseteq \mathbb{R}^n$, sottospazio vettoriale. Se essa non è ortogonale allora esistono vettori Y_1, \dots, Y_k in modo tale che $\{Y_1, \dots, Y_k\}$ è una base ortogonale per U . I vettori Y_i si costruiscono nel seguente modo

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 \\ Y_2 &= X_2 - a_{12}Y_1 \\ Y_3 &= X_3 - a_{13}Y_1 - a_{23}Y_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ Y_k &= X_k - a_{1k}Y_1 - a_{2k}Y_2 + \dots + a_{k-1k}Y_{k-1} \end{aligned}$$

dove $a_{ij} = \frac{\langle X_j, Y_i \rangle}{\|Y_i\|^2}$. Osserviamo che l'insieme $\{Y_1, \dots, Y_k\}$ è ortogonale per costruzione. Inoltre l'insieme $\{Y_1, \dots, Y_k\}$ è linearmente indipendente. Infatti i vettori Y_i scritti nella base $\{X_1, \dots, X_k\}$ danno luogo alle seguenti k -ple: $Y_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $Y_2 = (-a_{12}, 1, 0, \dots, 0)$, $Y_3 = (b, -a_{23}, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $Y_k = (*, \dots, *, 1)$, dove $b, *$ sono coefficienti opportuni. La matrice i cui vettori colonna sono Y_1, \dots, Y_k ha rango k essendo triangolare superiore con tutti 1 sulla diagonale principale e quindi Y_1, \dots, Y_k sono linearmente indipendenti. Osserviamo che per ogni $i = 1, \dots, k$, $Y_i \in U$ essendo esso combinazione lineare dei vettori X_1, \dots, X_k e pertanto $L(\{X_1, \dots, X_k\}) = L(\{Y_1, \dots, Y_k\})$.

Esempio 5.5.3 Siano $X_1 = (1, 0, 1), X_2 = (1, 1, 1), X_3 = (1, 2, 2) \in \mathbb{R}^3$. L'insieme $\{X_1, X_2, X_3\}$ è linearmente indipendente, ma non è ortogonale poichè $\langle X_1, X_2 \rangle = 2$. Con l'algoritmo di Gram-Schmidt costruiamo una base ortogonale. Poniamo $Y_1 = X_1$. Sia $Y_2 = X_2 - \frac{\langle X_2, Y_1 \rangle}{\|Y_1\|^2} Y_1$. Ma $\langle X_1, X_2 \rangle = 2$ e $\langle X_1, X_1 \rangle = 2$ e quindi $Y_2 = (1, 1, 1) - \frac{2}{2}(1, 0, 1) = (0, 1, 0)$. Sia $Y_3 = X_3 - \frac{\langle X_3, Y_1 \rangle}{\|Y_1\|^2} Y_1 - \frac{\langle X_3, Y_2 \rangle}{\|Y_2\|^2} Y_2$. Ma $\langle X_3, Y_1 \rangle = 3$, $\langle X_3, Y_2 \rangle = 2$ e $\langle Y_2, Y_2 \rangle = 1$, quindi $Y_3 = (1, 2, 2) - \frac{3}{2}(1, 0, 1) - 2(0, 1, 0) = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

In modo analogo a quanto fatto in \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 definiamo la nozione di distanza in \mathbb{R}^n .

Definizione 5.5.4 Siano $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Allora la distanza di X da Y è così definita

$$d(X, Y) := \|X - Y\|$$

5.6 Basi ortonormali e matrici ortogonali

Definizione 5.6.1 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su cui è definito un prodotto scalare. Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V . Essa si dice base *ortonormale* se è ortogonale e se $\|v_i\| = 1$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Definizione 5.6.2 Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$, essa si dice *ortogonale* se $A \cdot {}^t A = I_n$. L'insieme delle matrici ortogonali è denotato con $O(n)$.

Osservazione 5.6.3 Se $A \in O(n)$ allora $\det(A) = \pm 1$ da cui segue che A è invertibile. Infatti dalla relazione $A \cdot {}^t A = I_n$ ne segue che $\det(A)^2 = 1$ e quindi $\det(A) = \pm 1$.

Osservazione 5.6.4 Se $A \in O(n)$ allora i vettori colonna di A , A^j per $j = 1, \dots, n$, sono una base ortonormale di \mathbb{R}^n .

Infatti poichè A è ortogonale ne segue che $A \cdot {}^t A = I_n = {}^t A \cdot A$ e quindi

$$({}^t A \cdot A)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

L'entrata (i, j) della matrice ${}^t A \cdot A$ è $({}^t A \cdot A)_{ij} = {}^t A_i \cdot A^j = A^i \cdot A^j$.

Proposizione 5.6.5 Siano $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_n\}$ due basi ortonormali di V e sia $C = M_{v,w}$ la matrice del cambio di base, ossia la matrice che dice come la base w si scrive nella base v . Allora la matrice C è una matrice ortogonale.

Dimostrazione Ricordiamo che $w_j = \sum_{k=1}^n c_{kj} v_k$ e la matrice $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j, \leq n}$ è la matrice del cambio di base. Poichè le basi sono ortonormali si ha che

$$\langle w_i, w_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Calcoliamo $\langle w_i, w_j \rangle$

$$\begin{aligned} \langle w_i, w_j \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^n c_{ki} v_k, \sum_{k=1}^n c_{kj} v_k \right\rangle \\ &= \langle c_{1i} v_1, c_{1j} v_1 + c_{2j} v_2 + \dots + c_{nj} v_n \rangle + \langle c_{2i} v_2, c_{1j} v_1 + c_{2j} v_2 + \dots + c_{nj} v_n \rangle + \\ &\quad + \dots + \langle c_{ni} v_n, c_{1j} v_1 + c_{2j} v_2 + \dots + c_{nj} v_n \rangle = c_{1i} \cdot c_{1j} + \dots + c_{ni} \cdot c_{nj} = \\ &= \langle C^i, C^j \rangle = \langle ({}^t C)_i, C^j \rangle = ({}^t C \cdot C)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

e dunque ${}^t C C = I_n$.

5.7 Complemento ortogonale

Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale. Vogliamo considerare il seguente problema di approssimazione: *dato* $X \in \mathbb{R}^n$, *trovare un elemento di* U *la cui distanza da* X *sia minima.*

Vediamo questo dapprima con un esempio.

Esempio 5.7.1 Sia $U \subset \mathbb{R}^3$ un piano per l'origine, sia $X \in \mathbb{R}^3$ e vogliamo trovare $Y \in U$ tale che $d(X, Y) = \|X - Y\|$ sia minima.

Se $X \in U$ allora $Y = X$.

Se $X \notin U$ allora il punto più vicino a X si trova tracciando per X la retta r ortogonale al piano dato U e il punto $Y \in U$ più vicino a X è $Y = U \cap r$.

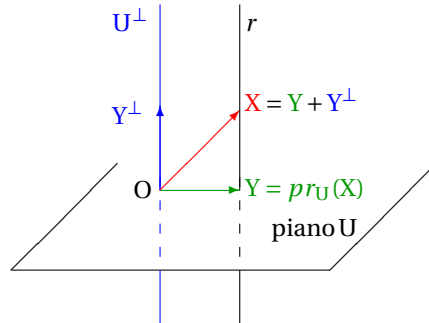


Figura 5.6: Y è il punto del piano U più vicino a X

Questo ci suggerisce un modo per risolvere il problema di approssimazione in generale.

Cominciamo col vedere cosa si intende per complemento ortogonale di un dato sottospazio $U \subset \mathbb{R}^n$. L'insieme dei vettori di \mathbb{R}^n ortogonali a tutti i vettori di U , denotato con U^\perp , ossia $U^\perp := \{X \in \mathbb{R}^n \mid \langle X, u \rangle = 0 \text{ per ogni } u \in U\}$ è detto *complemento ortogonale* di U .

Lemma 5.7.2 Sia U un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n . Allora

- 1) U^\perp è un sottospazio di \mathbb{R}^n .
- 2) Se $U = L(\{X_1, \dots, X_k\})$ allora $U^\perp := \{X \in \mathbb{R}^n \mid \langle X, X_i \rangle = 0 \text{ per } i=1, \dots, k\}$

Dimostrazione 1) Per ogni $X, Y \in U^\perp$ si ha che $X + Y \in U^\perp$. Infatti per ogni $u \in U$ si ha che $\langle X + Y, u \rangle = \langle X, u \rangle + \langle Y, u \rangle = 0$. Similmente Per ogni $X \in U^\perp$ e per ogni $k \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle kX, u \rangle = k \langle X, u \rangle = 0$. Dunque U^\perp è un sottospazio di \mathbb{R}^n .

2) Se $X \in \mathbb{R}^n$ è tale che $\langle X, X_i \rangle = 0$ per ogni $i = 1, \dots, k$ allora anche $\langle X, u \rangle = 0$ per ogni $u \in U$. Infatti essendo $u = \sum_i^k a_i X_i$ si ha che $\langle X, u \rangle = \langle X, \sum_i^k a_i X_i \rangle = \sum_i^k a_i \langle X, X_i \rangle = 0$. \square

Teorema 5.7.3 (Teorema di decomposizione ortogonale) Sia U un sottospazio di \mathbb{R}^n . Allora ogni $X \in \mathbb{R}^n$ si scrive in modo unico come $X = Y + Y^\perp$, $Y \in U$, $Y^\perp \in U^\perp$.

Dimostrazione Sia $\{X_1, \dots, X_k\}$ una base ortonormale per U (per Gram-Schmidt è sempre possibile trovarla). Dato $X \in \mathbb{R}^n$, sia $Y = \sum_i^k \langle X, X_i \rangle X_i$ e sia $Y^\perp = X - Y$. Ricordiamo che $\langle X, X_i \rangle X_i$ è la proiezione ortogonale di X lungo X_i . Si vede facilmente che $Y^\perp \in U^\perp$, infatti $Y^\perp \cdot X_j = (X - Y) \cdot X_j = (X - \sum_i^k \langle X, X_i \rangle X_i) \cdot X_j = \langle X, X_j \rangle - \langle X, X_j \rangle = 0$. Inoltre tale modo di decomporre X è unico. Infatti se $X = Y + Y^\perp$ e

inoltre $X = Z + Z^\perp$ allora $Y - Z = Z^\perp - Y^\perp$ e dunque $Y - Z$ appartiene sia a U che a U^\perp e perciò $\langle Y - Z, Y - Z \rangle = 0$. Da qui segue che $Y - Z = 0$ ossia $Y = Z$ e quindi $Y^\perp = Z^\perp$. \square

Definizione 5.7.4 Sia $\{X_1, \dots, X_k\}$ una base ortonormale per U sottospazio di \mathbb{R}^n . Se $X \in \mathbb{R}^n$, allora il vettore $Y = \sum_i^k \langle X, X_i \rangle X_i$ è detto proiezione ortogonale di X sul sottospazio U .

Vedremo che la proiezione ortogonale di X su U è la soluzione al problema di approssimazione.

Teorema 5.7.5 (Teorema di approssimazione) Sia U un sottospazio di \mathbb{R}^n e sia $X \in \mathbb{R}^n$. Allora Y , la proiezione ortogonale di X sul sottospazio U , è l'elemento di U più vicino a X , ossia $d(X, Y) \leq d(X, Z)$ per ogni $Z \in U$.

Dimostrazione Dal Teorema 5.7.3 si ha che $X = Y + Y^\perp$, dove Y è la proiezione ortogonale di X su U . Per ogni $Z \in U$ si ha che $X - Z = (X - Y) + (Y - Z)$. Osserviamo che $X - Y \in U^\perp$ e $Y - Z \in U$. Allora $\|X - Z\|^2 = \|X - Y\|^2 + \|Y - Z\|^2 \geq \|X - Y\|^2$ e dunque $d(X, Y) \leq d(X, Z)$ per ogni $Z \in U$. \square

Esempio 5.7.6 In \mathbb{R}^3 si consideri il piano U di equazione cartesiana $3x - y + 2z = 0$. Determinare il punto di U più vicino al punto $X = (1, -1, 1)$.

Osserviamo che $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ dove $u_1 = (1, 3, 0)$, $u_2 = (0, 2, 1)$. Tale base non è ortogonale poiché $u_1 \cdot u_2 = 6$. La ortogonalizziamo con Gram-Schmidt. Sia $X_1 = u_1$ e $X_2 = u_2 - \frac{u_2 \cdot X_1}{\|X_1\|^2} X_1 = (0, 2, 1) - \frac{6}{10}(1, 3, 0) = (-\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 1)$. Onde evitare frazioni prendiamo come vettore $X_2 = (-3, 1, 5)$. Allora il punto di U più vicino a X è la proiezione di X su U , ossia $Y = pr(X)_U = \frac{\langle X, X_1 \rangle}{\|X_1\|^2} X_1 + \frac{\langle X, X_2 \rangle}{\|X_2\|^2} X_2 = \frac{-2}{10}(1, 3, 0) + \frac{1}{35}(-3, 1, 5) = (-\frac{2}{7}, \frac{-4}{7}, \frac{1}{7})$.

Possiamo anche risolverlo geometricamente. Basta considerare la retta per X e ortogonale al piano U e il punto cercato sarà l'intersezione di U con tale retta. Notiamo che la retta cercata è quella con vettore direttore il vettore normale al piano U ossia il vettore $n = (3, -1, 2)$ e dunque r è la retta $x = \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}$. Il punto $Y = r \cap U$ è il punto $Y = (-\frac{2}{7}, \frac{-4}{7}, \frac{1}{7})$.

Esempio 5.7.7 In \mathbb{R}^3 si consideri il sottospazio $U = L(\{u_1, u_2\})$ dove $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$. Decomporre $X = (2, 1, 3)$ come somma di un vettore di U e di un vettore di U^\perp .

Osserviamo che $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$ e dunque tale base è ortogonale. Allora la proiezione di X su U è il vettore $Y = pr(X)_U = \frac{\langle X, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle X, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \frac{4}{3}(1, -1, 1) + \frac{4}{2}(0, 1, 1) = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{10}{3})$. Sia $Y^\perp = X - Y = (2, 1, 3) - (\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$. Allora $X = Y + Y^\perp$.

5.7.1 Esercizi

1. Siano $u_1 = (1, 1, -1, 2)$, $u_2 = (0, 1, 1, 1)$, $u_3 = (0, 0, 1, -1)$, $u_4 = (1, 2, 1, 2)$ vettori di \mathbb{R}^4 e sia W lo spazio generato da essi.
 - (a) Trovare una base per W .
 - (b) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane per W .

- (c) Dire se la base trovata al punto (a) è ortonormale e in caso di risposta negativa ortonormalizzarla.
2. Siano $u_1 = (1, -1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1, 0)$, $u_3 = (-1, 0, 1, 0)$, $u_4 = (0, 0, 2, 1)$ vettori di \mathbb{R}^4 e sia U il sottospazio generato da essi.
- (a) Determinare $\dim U$ e una base per U .
- (b) Dire se la base trovata al punto (a) è ortonormale e in caso di risposta negativa ortonormalizzarla.
- (c) Sia W il sottospazio di \mathbb{R}^4 generato dal vettore $w = (1, 1, 1, 1)$. Dire, giustificando la risposta, se W è ortogonale a U .
3. In \mathbb{R}^3 si consideri il punto $P = (1, 0, 1)$ e il sottospazio U di equazione: $x - 2y + 3z = 0$.
- (a) Determinare il punto di U più vicino a P .
- (b) Determinare una base per U che sia ortonormale.
- (c) Completare tale base di U a una base per \mathbb{R}^3 .

5.8 Prodotto scalare

Vogliamo ora dare la nozione di prodotto scalare su un qualunque spazio vettoriale reale V .

Definizione 5.8.1 Un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V è un'applicazione

$$F: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

che gode delle seguenti proprietà:

1. $F(u, v) = F(v, u)$, per ogni $u, v \in V$ (simmetria)
2. $F(u, v + w) = F(u, v) + F(u, w)$, per ogni $u, v, w \in V$ (linearità)
3. $F(u, kv) = kF(u, v)$, per ogni $u, v \in V$ e per ogni $k \in \mathbb{R}$ (omogeneità)
4. $F(u, u) \geq 0$, l'uguaglianza vale se e solo se $u = \vec{0}$ (positività)

Noi denoteremo il prodotto scalare con il simbolo \langle, \rangle . Lo spazio V con il prodotto scalare \langle, \rangle è detto spazio euclideo e viene denotato con la coppia (V, \langle, \rangle) .

Esempio 5.8.2 Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n , siano $u = (x_1, \dots, x_n)$, $v = (y_1, \dots, y_n) \in V$ e sia $F: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ così definita $F(u, v) := {}^t u \cdot v = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Si verifica facilmente che esso è un prodotto scalare.

Osservazione 5.8.3 Sia V uno spazio vettoriale reale con base $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e sia $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un prodotto scalare su V . Possiamo associare a tale prodotto scalare una matrice A di ordine n la cui entrata $a_{ij} := \langle v_i, v_j \rangle$. Tale matrice è una matrice simmetrica poichè $\langle v_i, v_j \rangle = \langle v_j, v_i \rangle$ per la proprietà simmetrica di \langle, \rangle . Osserviamo che $\langle u, w \rangle$ si calcola facilmente a partire dalla matrice A . Infatti se (x_1, \dots, x_n) e (y_1, \dots, y_n) sono le coordinate di u, w rispettivamente, rispetto alla base \mathbf{v} e pensiamo a questi vettori come vettori colonna allora

$$\langle u, w \rangle = \langle X, Y \rangle = {}^t X \cdot A \cdot Y$$

con $X = (x_1, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, \dots, y_n)$. Basta usare le proprietà del prodotto scalare.

Lemma 5.8.4 Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Allora il polinomio caratteristico di A possiede tutte radici reali.

Dimostrazione Possiamo pensare a $A \in M_n(\mathbb{C})$ e sia $F_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ l'endomorfismo definito da A . Sia $k \in \mathbb{C}$ una radice del polinomio $p_A(\lambda)$ e sia $X \in \mathbb{C}^n$ un corrispondente autovettore. Allora si ha che

$$AX = kX \tag{5.9}$$

Prendendo i complessi coniugati di ambo i membri si ha

$$A\bar{X} = \bar{k}\bar{X} \tag{5.10}$$

Consideriamo il seguente prodotto

$${}^t \bar{X} A X = {}^t \bar{X} k X = k {}^t \bar{X} X$$

D'altra parte

$${}^t \bar{X} A X = ({}^t \bar{X} A) X = {}^t (A\bar{X}) X = {}^t (\bar{k}\bar{X}) X = \bar{k} {}^t \bar{X} X$$

Ne segue che

$$k {}^t \bar{X} X = \bar{k} {}^t \bar{X} X$$

ossia $k \in \mathbb{R}$ poichè $k = \bar{k}$. □

Definizione 5.8.5 Sia V uno spazio euclideo e sia $F \in \text{End}(V)$. F si dice *autoaggiunto* se

$$\langle F(v), u \rangle = \langle v, F(u) \rangle \text{ per ogni } v, u, \in V$$

Osserviamo che se $F \in \text{End}(V)$ è autoaggiunto e se in V fissiamo una base ortonormale $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ allora la matrice $A = M_{\mathbf{v}}(F)$ è una matrice simmetrica.

Infatti, sia $F(v_i) = \sum_{k=1}^n a_{ik} v_k$, allora

$$\langle F(v_i), v_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n a_{ik} v_k, v_j \right\rangle = a_{ij}$$

e poichè F è autoaggiunto allora

$$\langle F(v_i), v_j \rangle = \langle v_i, F(v_j) \rangle = \langle v_i, \sum_{k=1}^n a_{jk} v_k \rangle = a_{ji}$$

Si ha quindi $a_{ij} = a_{ji}$, ovvero la matrice A è simmetrica.

Proprio perchè la matrice associata a un endomorfismo autoaggiunto in una base ortonormale è una matrice simmetrica, a volte F è detto anche *endomorfismo simmetrico*.

Teorema 5.8.6 (Spettrale) *Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n e sia $F : V \rightarrow V$ un endomorfismo simmetrico. Esiste una base ortonormale di V rispetto alla quale la matrice che rappresenta F è diagonale. Equivalentemente, per ogni matrice simmetrica reale $A \in M_n(\mathbb{R})$ esiste una matrice ortogonale $C \in O(n)$ tale che $C^{-1}AC$ sia diagonale.*

Dimostrazione La dimostrazione si fa per induzione su $n = \dim V$. Se $n = 1$ non c'è niente da dimostrare. Sia $n \geq 2$ e supponiamo che il teorema sia vero per spazi di dimensione $n-1$. Poichè F è simmetrico gli autovalori di F sono tutti reali. Sia quindi λ_1 un autovalore e sia v_1 un corrispondente autovettore. Sia $\langle v_1 \rangle^\perp$ il complemento ortogonale di $\langle v_1 \rangle$. Per ogni $u \in \langle v_1 \rangle^\perp$ si ha che

$$\langle F(u), v_1 \rangle = \langle u, F(v_1) \rangle = \langle u, \lambda_1 v_1 \rangle = \lambda_1 \langle u, v_1 \rangle = 0$$

da cui segue che $F(u) \in \langle v_1 \rangle^\perp$ quindi F ristretto al sottospazio $\langle v_1 \rangle^\perp$ è un'applicazione $F|_{\langle v_1 \rangle^\perp} : \langle v_1 \rangle^\perp \rightarrow \langle v_1 \rangle^\perp$ che è a sua volta un endomorfismo simmetrico poichè $F|_{\langle v_1 \rangle^\perp}(u) = F(u)$. Per ipotesi induttiva il sottospazio $\langle v_1 \rangle^\perp$ possiede una base ortonormale $\{v_2, \dots, v_n\}$ che diagonalizza $F|_{\langle v_1 \rangle^\perp}$.

L'insieme $\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, v_2, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale di V che diagonalizza F . \square

Proposizione 5.8.7 *Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n e sia $F : V \rightarrow V$ un endomorfismo simmetrico. Se λ_1, λ_2 sono due autovalori distinti di F ogni autovettore relativo a λ_1 è ortogonale a ogni autovettore relativo a λ_2 .*

Dimostrazione Sia v_1 un autovettore relativo a λ_1 e sia v_2 un autovettore relativo a λ_2 . Si ha

$$\begin{aligned} \langle F(v_1), v_2 \rangle &= \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_1, F(v_2) \rangle &= \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle \end{aligned}$$

Poichè F è simmetrico allora

$$\lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$$

ed essendo λ_1, λ_2 distinti ne segue che $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. \square

Esercizio 5.8.8 Determinare una matrice ortogonale che diagonalizzi le seguenti matrici simmetriche

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Capitolo 6

Rette e Piani nello Spazio

6.1 Geometria affine

Vogliamo ora dare delle applicazioni dell'algebra delle matrici alla geometria analitica del piano e dello spazio. In particolare ci occuperemo di rette e piani nello spazio. Lo faremo da un punto di vista algebrico, ossia andremo a definire le rette e i piani utilizzando le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare nello spazio dei vettori geometrici che abbiamo visto essere in corrispondenza uno a uno con \mathbb{R}^3 .

6.1.1 Equazione vettoriale, equazioni parametriche e cartesiane di rette nello spazio

Definizione 6.1.1 Sia $P \in \mathbb{R}^3$ e sia \vec{v} un vettore non nullo di \mathbb{R}^3 di coordinate $v = (l, m, n)$. La retta r passante per P e avente per direzione quella individuata dal vettore v è l'insieme così definito

$$r := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid X = P + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}\} \quad (6.1)$$

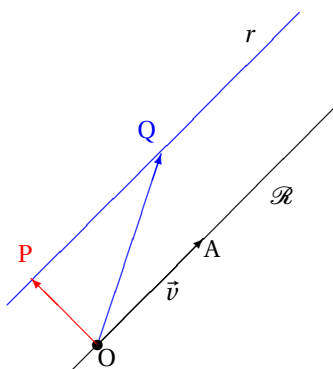


Figura 6.1: r : retta per P con direzione \mathcal{R}

Ricordando che $\vec{PX} = X - P$, la (6.1) può essere scritta come

$$\vec{PX} = t\vec{v} \quad (6.2)$$

con $t \in \mathbb{R}$. L'equazione (6.2) è detta *equazione vettoriale* di r .
L'insieme

$$R := \{t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}\} \quad (6.3)$$

è detto *direzione* della retta r e il vettore \vec{v} è detto *vettore direttore* di r .

Osserviamo che il vettore \vec{PQ} in Figura (6.1) è un altro vettore direttore di r .

Se $X = (x, y, z)$ e $P = (x_0, y_0, z_0)$ allora l'equazione (6.2) diventa

$$\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases} \quad (6.4)$$

Le equazioni (6.4) sono dette *equazioni parametriche* di r .

Se si elimina il parametro t da (6.4) si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = c_1 \\ f_2(x, y, z) = c_2 \end{cases} \quad (6.5)$$

dove $f_i(x, y, z)$, per $i = 1, 2$, sono polinomi lineari nelle indeterminate x, y, z e c_1, c_2 sono opportuni scalari in \mathbb{R} . Le equazioni (6.5) sono dette *equazioni cartesiane* di r .

Esempio 6.1.2 Siano $P = (2, 0, 1)$ e $\vec{v} = (0, 2, -1)$ rispettivamente un punto e un vettore non nullo di \mathbb{R}^3 . Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per P e avente come direzione quella individuata dal vettore \vec{v} .

La retta r è l'insieme dei punti $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $X = P + t\vec{v}$ e pertanto le equazioni parametriche di r sono

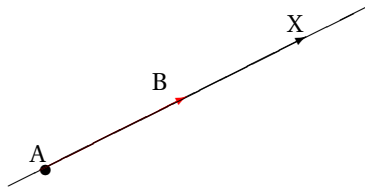
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Eliminando il parametro t si ottengono le equazioni cartesiane di r

$$r: \begin{cases} x = 2 \\ y + 2z = 2 \end{cases}$$

Esempio 6.1.3 Siano $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, 3) \in \mathbb{R}^3$. Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per i punti A, B .

Osserviamo che il vettore $\vec{v} = \vec{AB}$ individua la direzione della retta passante per i punti A, B .



Poiché $\vec{v} = \vec{AB} = B - A = (2, 1, 3) - (1, 0, 1) = (1, 1, 2)$ allora la retta r è l'insieme dei punti $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $X = A + t\vec{v}$ e pertanto le equazioni parametriche di r sono

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Eliminando il parametro t si ottengono le equazioni cartesiane

$$r: \begin{cases} x - y = 1 \\ -2y + z = 1 \end{cases}$$

Definizione 6.1.4 Date due rette esse si dicono *parallele* se hanno la stessa direzione.

6.1.2 Equazione vettoriale, equazioni parametriche e cartesiane di piani nello spazio

Definizione 6.1.5 Sia $P \in \mathbb{R}^3$ e siano \vec{v}_1, \vec{v}_2 due vettori non nulli di \mathbb{R}^3 tali che \vec{v}_1 non sia parallelo con \vec{v}_2 . Il piano π passante per P e generato dai vettori \vec{v}_1, \vec{v}_2 è l'insieme così definito

$$\pi = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid X = P + t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2, \quad t, s \in \mathbb{R}\} \tag{6.6}$$

ovvero

$$\vec{PX} = t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2 \tag{6.7}$$

con $t, s \in \mathbb{R}$. L'equazione (6.7) è detta *equazione vettoriale* di π . L'insieme

$$\Pi := \{t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2 \mid t, s \in \mathbb{R}\} \tag{6.8}$$

è detto *giacitura* del piano π .

Se $X = (x, y, z), P = (x_0, y_0, z_0), \vec{v}_1 = (a_1, a_2, a_3), \vec{v}_2 = (b_1, b_2, b_3)$ allora l'equazione (6.7) diventa

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 + sb_1 \\ y = y_0 + ta_2 + sb_2 \\ z = z_0 + ta_3 + sb_3 \end{cases} \tag{6.9}$$

Le equazioni (6.9) sono dette *equazioni parametriche* di π .

Se si eliminano i parametri t e s da (6.9) si ottiene l'equazione

$$f(x, y, z) = c \tag{6.10}$$

dove $f(x, y, z)$ è un polinomio lineare nelle indeterminate x, y, z e $c \in \mathbb{R}$ è uno scalare opportuno. L'equazione (6.10) è detta *equazione cartesiana* di π .

Esempio 6.1.6 Siano $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$ e sia $Q = (1, 2, 1)$ un punto di \mathbb{R}^3 . Poichè i vettori \vec{v}_1 e \vec{v}_2 non sono paralleli allora il piano passante per Q e generato dai vettori \vec{v}_1, \vec{v}_2 è l'insieme dei punti $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $X = Q + t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2$ e pertanto le equazioni parametriche di π sono

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2s \\ z = 1 - s \end{cases}$$

Eliminando i parametri t, s , si ottiene l'equazione cartesiana di π : $y + 2z - 4 = 0$.

Definizione 6.1.7 Dati due piani essi si dicono *paralleli* se hanno la stessa giacitura.

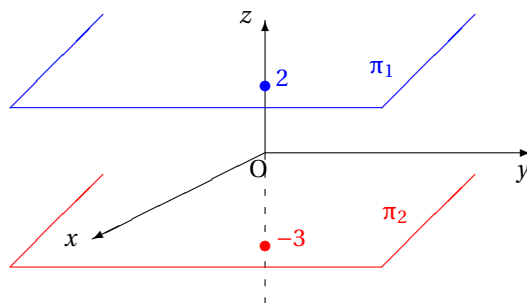


Figura 6.2: π_1, π_2 sono piani paralleli

Esempio 6.1.8 Nella Figura 6.13 i piani $\pi_1 : z = 2$ e $\pi_2 : z = -3$ sono paralleli. Essi hanno entrambi come giacitura il piano Π di equazione cartesiana $z = 0$.

Definizione 6.1.9 Siano r e π una retta e un piano in \mathbb{R}^3 , rispettivamente. Si dice che r è parallela al piano π se la direzione di r è contenuta nella giacitura del piano π .

Esempio 6.1.10 Sia r la retta di equazioni $x + y - z = 0, 2x - y = 2$ e sia π il piano di equazione $3x - z = 4$. Si vede facilmente che $\vec{r} = (1, 2, 3)$ è un vettore direttore di r e che $\Pi : 3x - z = 0$ è la giacitura di π . Poichè $\vec{r} \in \Pi$ allora la retta r è parallela al piano π .

Definizione 6.1.11 Siano r e s due rette di \mathbb{R}^3 . Esse si dicono *sghembe (incidenti)* se non hanno alcun punto in comune (se hanno almeno un punto in comune).

Esempio 6.1.12 Nelle Figure 6.3 e 6.15 abbiamo due piani incidenti lungo una retta e due rette sghembe dello spazio, rispettivamente

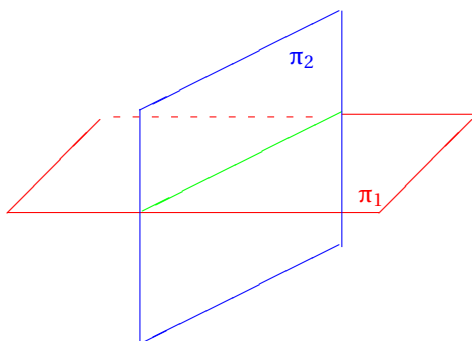


Figura 6.3: π_1, π_2 sono piani incidenti

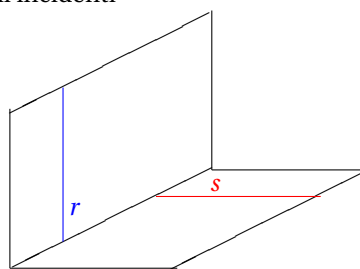


Figura 6.4: r, s sono rette sghembe

6.1.3 Equazioni cartesiane di piani e rette particolari

• **Piani coordinati:** i piani coordinati hanno equazione $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$, rispettivamente.

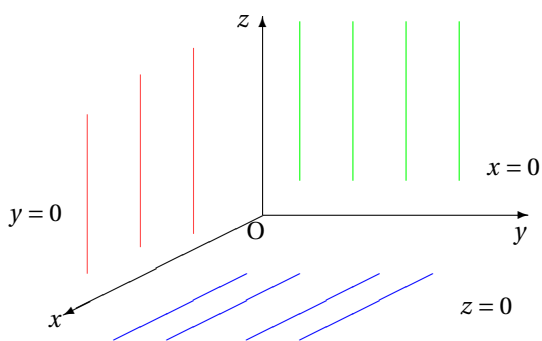


Figura 6.5: piani coordinati

• **Piani paralleli agli assi coordinati:** Il piano di equazione cartesiana $ax + by + d = 0$ è un piano parallelo all'asse z .

Infatti un vettore direttore dell'asse z è $\vec{k} = (0, 0, 1)$, la giacitura del piano $ax + by + d = 0$ è il piano Π di equazione $ax + by = 0$ e poichè $\vec{k} \in \Pi$ si ha che il piano

$ax + by + d = 0$ è parallelo all'asse z .

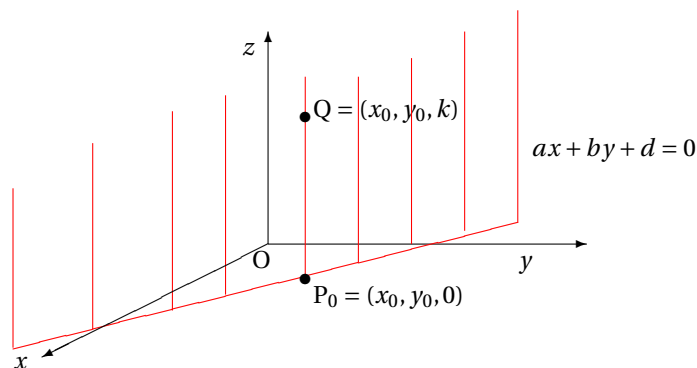


Figura 6.6: piano parallelo all'asse z

Similmente il piano di equazione $ax + cz + d = 0$ è parallelo all'asse delle y e il piano di equazione $by + fz + d = 0$ è parallelo all'asse delle x .

• **Rette parallele agli assi coordinati.**

La retta di equazione $r: \begin{cases} x = h \\ y = k \end{cases}$ è parallela all'asse z , (vedi Figura (6.7)).

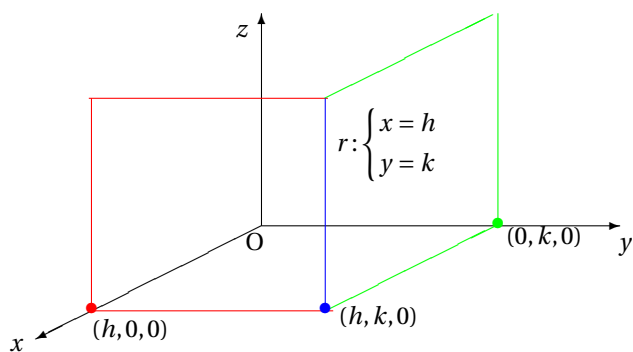


Figura 6.7: La retta r è parallela all'asse z

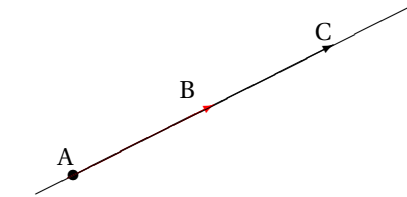
Similmente la retta $s: \begin{cases} x = h \\ z = a \end{cases}$ è parallela all'asse y e la retta $t: \begin{cases} y = k \\ z = b \end{cases}$ è parallela all'asse x .

6.1.4 Condizione di allineamento di 3 punti e di complanarità di 4 punti

A1. Siano $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3), C = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$. Essi sono allineati se e solo se

$$rg \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 & c_3 - a_3 \end{pmatrix} = 1$$

Infatti dire che A, B, C sono allineati vuol dire che i vettori \vec{AB} e \vec{AC} sono linearmente dipendenti,



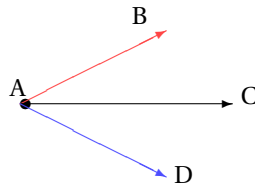
ossia che

$$rg \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 & c_3 - a_3 \end{pmatrix} = 1$$

C1. Siano $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ quattro punti non allineati con $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3), C = (c_1, c_2, c_3), D = (d_1, d_2, d_3)$. Essi sono complanari se e solo se

$$det \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 & d_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 & d_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 & c_3 - a_3 & d_3 - a_3 \end{pmatrix} = 0$$

Infatti dire che A, B, C, D sono complanari vuol dire che i vettori \vec{AB}, \vec{AC} e \vec{AD} sono linearmente dipendenti, e quindi



$$det \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 & d_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 & d_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 & c_3 - a_3 & d_3 - a_3 \end{pmatrix} = 0$$

Esempio 6.1.13 Siano $A = (1, 2, -1), B = (0, 1, 2), C = (-2, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$. Verificare che i punti non sono allineati e scrivere un'equazione cartesiana del piano passante per essi.

Osserviamo che i vettori $\vec{AB} = (-1, -1, 3)$ e $\vec{AC} = (-3, 1, 2)$ non sono paralleli e quindi i punti A, B, C non sono allineati. Sia π il piano passante per essi. Allora π è l'insieme dei punti $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che i vettori \vec{AB} , \vec{AC} e $\vec{AX} = (x-1, y-2, z+1)$ sono linearmente dipendenti, ossia

$$\det \begin{pmatrix} -1 & -3 & x-1 \\ -1 & 1 & y-2 \\ 3 & 2 & z+1 \end{pmatrix} = 0$$

da cui segue che $5x + 7y + 4z - 15 = 0$ è un'equazione cartesiana del piano π passante per A, B, C.

6.1.5 Condizioni algebriche di parallelismo tra due piani e tra retta e piano

- Siano $\pi_1, \pi_2 \subset \mathbb{R}^3$ due piani aventi rispettivamente equazioni cartesiane $\pi_1 : ax + by + cz + d = 0$ e $\pi_2 : a'x + b'y + c'z + d' = 0$. Essi sono paralleli se e solo se

$$(a, b, c) = k(a', b', c') \text{ per qualche } k \in \mathbb{R}.$$

Infatti essere paralleli equivale a dire che essi hanno la stessa giacitura, ossia le giaciture $\Pi_1 : ax + by + cz = 0$, $\Pi_2 : a'x + b'y + c'z = 0$ sono uguali e quindi ne segue che $(a, b, c) = k(a', b', c')$ per qualche $k \in \mathbb{R}$.

- Siano $\pi, r \subset \mathbb{R}^3$ rispettivamente un piano e una retta. Sia $\vec{r} = (l, m, n)$ un vettore direttore della retta r e sia $ax + by + cz + d = 0$ un'equazione cartesiana di π . Il piano π e la retta r sono paralleli se e solo se

$$al + bm + cn = 0.$$

Infatti essere paralleli equivale a dire che la direzione della retta r è contenuta nella giacitura $\Pi : ax + by + cz = 0$ di π , ossia che il vettore direttore $\vec{r} = (l, m, n) \in \Pi$ e quindi ne segue che $al + bm + cn = 0$.

Esempio 6.1.14 Determinare le equazioni parametriche della retta r passante per $P = (0, 0, 1)$ e parallela ai piani $\pi_1 : 3x + 2y - z = 0$, $\pi_2 : -2x + 3y - 2z + 1 = 0$.

Poiché r è parallela sia a π_1 che a π_2 la direzione R di r è contenuta sia nella giacitura di π_1 che in quella di π_2 e quindi R :

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ -2x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

Una soluzione non banale di tale sistema omogeneo da un vettore direttore $\vec{r} = (-1, 8, 13)$ di r . Quindi le equazioni parametriche di r sono

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 8t \\ z = 1 + 13t \end{cases}$$

6.1.6 Fasci di Piani

Siano $\pi_1, \pi_2 \subset \mathbb{R}^3$ due piani distinti di \mathbb{R}^3 e siano $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ le rispettive equazioni cartesiane.

- Se i piani π_1, π_2 non sono paralleli essi individuano un *fascio proprio* di piani, denotato con $F_{h,k}$, al variare di $h, k \in \mathbb{R}$, con $(h, k) \neq (0, 0)$, di equazione

$$F_{h,k} : h(ax + by + cz + d) + k(a'x + b'y + c'z + d') = 0 \quad (6.11)$$

La retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$ è detta *asse del fascio*.

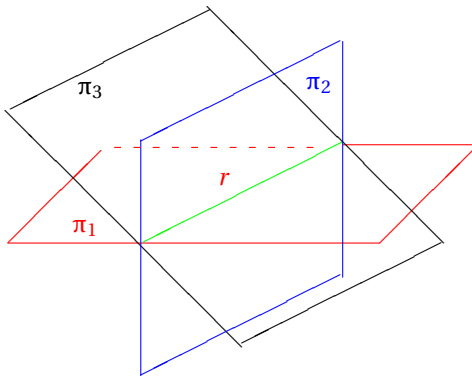


Figura 6.8: Fascio proprio di piani con asse la retta r

- Se i piani π_1, π_2 sono paralleli essi individuano un *fascio improprio*.

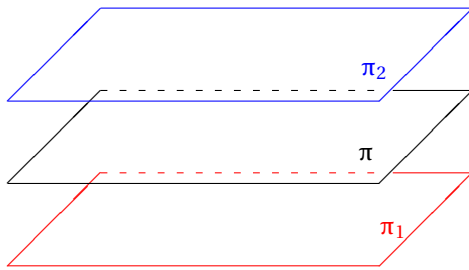


Figura 6.9: Fascio improprio di piani

Osservazione 6.1.15 Dato il fascio di piani di equazione (6.11), poichè $(h, k) \neq (0, 0)$ allora possiamo riscrivere il fascio come

$$F_\lambda : ax + by + cz + d + \lambda(a'x + b'y + c'z + d') = 0 \quad (6.12)$$

con $\lambda = \frac{k}{h}$ (stiamo assumendo $h \neq 0$). Occorre tener presente che se scriviamo il fascio di piani individuato da π_1, π_2 come in (6.12) non stiamo considerando tutti i piani del fascio ma stiamo escludendo π_2 , ovvero il piano del fascio che si ottiene per $h = 0$.

Osservazione 6.1.16 Dato il piano $\pi : a''x + b''y + c''z + d'' = 0$ e il fascio di piani di equazione $F_{h,k} : h(ax + by + cz + d) + k(a'x + b'y + c'z + d') = 0$, il piano π appartiene al fascio $F_{h,k}$ se esistono $h, k \in \mathbb{R}$ tali che $a'' = ha + ka'$, $b'' = hb + kb'$, $c'' = hc + kc'$, $d'' = hd + kd'$, ovvero la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$$

ha rango minore o uguale 2 essendo l'ultima riga combinazione lineare delle prime due.

Esempio 6.1.17 Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per $P = (1, 2, 3)$ e contenente la retta s

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - t \\ z = 3t \end{cases}$$

Scriveremo l'equazione cartesiana di π utilizzando due diversi metodi.

Usiamo dapprima il metodo del fascio di piani. Se nell'equazione parametrica di s eliminiamo il parametro t si ottengono le equazioni cartesiane di s : $x = 2, 3y + z - 3 = 0$. Osserviamo che P non appartiene ad alcuno dei due piani la cui intersezione è la retta s . Sia $x - 2 + k(3y + z - 3) = 0$ il fascio di piani individuato dalla retta s . Imponiamo il passaggio per P e otteniamo $k = \frac{1}{6}$ e quindi il piano π ha equazione $6x + 3y + z - 15 = 0$.

Altro modo per scrivere l'equazione di π è il seguente: poichè $s \subset \pi$ allora π contiene tutti i punti di s e in particolare i punti $A = (2, 1, 0)$, ottenuto per $t = 0$ e $B = (2, 0, 3)$ ottenuto per $t = 1$. Poichè il punto $P \notin s$ allora i punti A, B, P non sono allineati e quindi il piano π è il luogo dei punti $X = (x, y, z)$ tali che i vettori $\vec{AX} = (x - 2, y - 1, z)$, $\vec{AB} = (0, -1, 3)$, $\vec{AP} = (-1, 13)$, sono linearmente indipendenti, ossia $\det \begin{pmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 0$, ovvero $6x + 3y + z - 15 = 0$.

6.1.7 Esercizi

1. Nello spazio \mathbb{R}^3 si considerino le seguenti rette: $r : x = -z - 1, y = z - 6$; $s : x = 2z - 7, y = -3z + 2$.
 - (a) Verificare che le rette r, s sono incidenti e determinare un'equazione cartesiana del piano che le contiene.
 - (b) Sia R il punto di intersezione delle rette r, s . Verificare che i punti A, B, D, R non sono complanari, dove $A = (-1, -6, 0)$, $B = (-7, 2, 0)$ e $D = (6, 0, 1)$.
2. Nello spazio \mathbb{R}^3 si considerino le seguenti rette: $r : x = t + 5, y = t - 2, z = -t$; $s : x = 2z - 1, y = z + 2$.

- (a) Studiare la loro posizione reciproca.
- (b) Determinare, se esiste, il piano passante per s e parallelo a r .
- (c) Determinare, se esiste, la retta passante per $P = (1, 1, 2)$ e incidente simultaneamente alle due rette r e s .
3. Nello spazio \mathbb{R}^3 si considerino le seguenti rette: $r : x = t, y = t, z = 1 + t$; $s : x + y - z = 0, 2y + z + k = 0$.
- (a) Dire se r e s sono parallele.
- (b) Determinare, se esistono, i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per i quali $r \cap s \neq \emptyset$.
- (c) Per tali valori di k determinare il piano che contiene le rette r e s .
4. Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta r' simmetrica della retta $r : x = 1 + t, y = 3t, z = -2t$ rispetto al piano $\pi : x - y + 2z - 7 = 0$.
5. Si considerino le rette $r : x = -1 + 2t, y = t, z = -t$ e $s : x + y - z + 1 = 0, 2x + z + 2 = 0$. Provare che esse sono complanari e determinare un'equazione cartesiana del piano che le contiene.
6. Nello spazio \mathbb{R}^3 si considerino i punti $A = (1, 2, -1)$, $B = (2, 0, 1)$, $C = (0, 1, 3)$, $D = (3, 0, -1)$.
- (a) Verificare che essi sono complanari e determinare il piano π che li contiene.
- (b) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r contenuta nel piano π , passante per il punto $C = (0, 1, 3)$ e incidente la retta s di equazioni $s : x = 1 + t, y = -t, z = 1 + t$.
- (c) Dire se esistono valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per i quali il piano $\alpha : x - 2y + z - a = 0$ appartenga al fascio di piani individuato dalla retta r .
7. Nello spazio \mathbb{R}^3
- (a) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per $P = (1, -1, 1)$ e avente vettore direttore $\vec{r} = (1, -1, 1)$
- (b) Trovare un vettore direttore della retta s di equazioni $x - y = 1, x + 2y - z = 0$
- (c) Nel fascio di piani individuato dalla retta s trovare, se esiste, il piano parallelo alla retta r .
8. Dato il punto $A = (1, -3, -2)$ in \mathbb{R}^3 , determinare l'equazione del piano passante per A in ciascuno dei seguenti casi:

(a) parallelo alle rette $r_1 : \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$, $r_2 : \begin{cases} 3x + 2y - z + 1 = 0 \\ 2y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$,

- (b) parallelo alla retta $s: \begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = -x + 1 \end{cases}$ e passante per $B = (2, 0, 3)$
- (c) avente come traccia sul piano coordinato yz la retta $t: \begin{cases} 2y - 3z + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$
9. Siano $\pi_1: 2x + 6y + z - 2 = 0$, $\pi_2: 2x - y + z - 2 = 0$, $\pi_3: x - 4y - 3z + 6 = 0$, $\pi_4: x + 3y - 3z - 1 = 0$ i piani a cui appartengono le facce di un tetraedro. Determinare le coordinate dei vertici del tetraedro.
10. In \mathbb{R}^3 si considerino le rette
- $$r: \begin{cases} x - y = 2 \\ z = -2y \end{cases}, \quad s: \begin{cases} y = x - 1 \\ z = -x + 2 \end{cases}$$
- (a) Verificare che le rette r e s sono sghembe
- (b) Dire se esiste una retta incidente r e s e passante per $P = (0, 1, 1)$. In caso affermativo scriverne le equazioni cartesiane.
11. In \mathbb{R}^3 si considerino i punti $A = (1, -1, 2)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (3, -1, -1)$.
- (a) Verificare che essi non sono allineati e determinare un'equazione cartesiana del piano π che li contiene.
- (b) Sia $P = (1, 3, 0) \in \mathbb{R}^3$. Determinare il luogo descritto dal punto medio del segmento PQ al variare di Q sul piano π .
12. In \mathbb{R}^3 siano L e M le rette di equazioni $x + z - 1 = y - z = 0$ e $3x + y - 2z - 2 = x - 3y + 2 = 0$.
- (a) Verificare che esse non sono complanari.
- (b) Determinare la retta parallela alla retta $x - 5 = y - z - 4 = 0$ e incidente sia la retta L che la retta M .
13. In \mathbb{R}^3 sia L la retta passante per $P = (1, 2, 3)$ e parallela al vettore $\vec{v} = (1, 1, 1)$.
- (a) Trovare un'equazione cartesiana del piano α che contiene la retta L e il punto $A = (2, 3, 5)$.
- (b) Dire se il piano α è parallelo al piano passante per $C = (1, 1, -2)$ e generato dai vettori $\vec{v}_1 = (2, 1, 3)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 3)$.

6.2 Geometria Euclidea

Abbiamo visto in (6.1.1) che una retta è individuata da un punto e da una direzione. Vedremo ora che anche per un piano se diamo un punto e un particolare vettore non nullo, ovvero il vettore normale al piano, questi due dati sono sufficienti per individuare il piano.

Definizione 6.2.1 Sia $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ un vettore non nullo e sia $\pi \subset \mathbb{R}^3$ un piano la cui giacitura è $\Pi : \{t\vec{u} + s\vec{v} \mid t, s \in \mathbb{R}\}$. Se il vettore \vec{n} è ortogonale sia a \vec{u} che a \vec{v} diciamo che il vettore \vec{n} è un *vettore normale* al piano π .

Osservazione 6.2.2 Se il vettore \vec{n} è ortogonale sia a \vec{u} che a \vec{v} allora esso è ortogonale a tutti i vettori di Π .

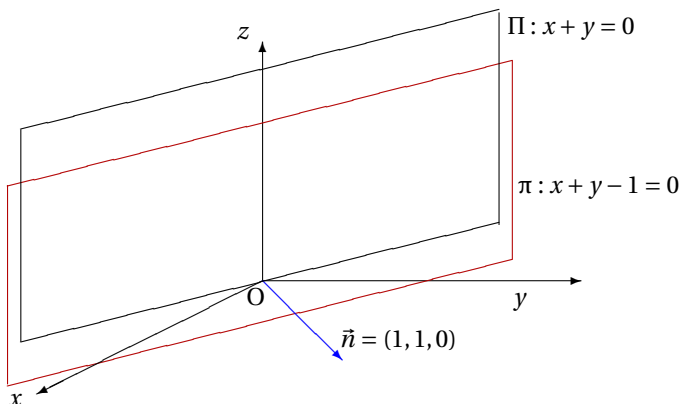


Figura 6.10: \vec{n} , vettore normale al piano π

Se vogliamo il piano π passante per il punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ e avente $\vec{n} \neq \vec{0}$ come vettore normale allora tale piano è fatto di tutti quei punti $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tale che il vettore \vec{PX} è ortogonale al vettore \vec{n} , ovvero,

$$\vec{PX} \cdot \vec{n} = 0 \tag{6.13}$$

Se $\vec{n} = (a, b, c)$ allora la (6.13) diventa

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{6.14}$$

Esempio 6.2.3 Nella Figura 6.10 il vettore $\vec{n} = (1, 1, 0)$ è un vettore normale al piano $\pi : x + y = 1$. Esso è ortogonale a tutti i vettori della giacitura Π , Infatti un generico $P \in \Pi$ ha coordinate $P = (x, -x, 0)$ e $P \cdot \vec{n} = 0$.

6.2.1 Condizioni algebriche di ortogonalità tra due rette, tra due piani, tra retta e piano

• Siano $r, s \subset \mathbb{R}^3$ due rette con vettori direttori $\vec{r} = (l, m, n)$ e $\vec{s} = (l', m', n')$, rispettivamente. Diciamo che r e s sono *ortogonali*, in simboli $r \perp s$, se $\vec{r} \cdot \vec{s} = 0$, ovvero se

$$ll' + mm' + nn' = 0$$

- Siano $\alpha_1, \alpha_2 \subset \mathbb{R}^3$ due piani di equazioni cartesiane $\alpha_1 : ax + by + cz + d = 0$ e $\alpha_2 : a'x + b'y + c'z + d' = 0$. Diciamo che α_1 e α_2 sono *ortogonali*, in simboli $\alpha_1 \perp \alpha_2$, se $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, ovvero se

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

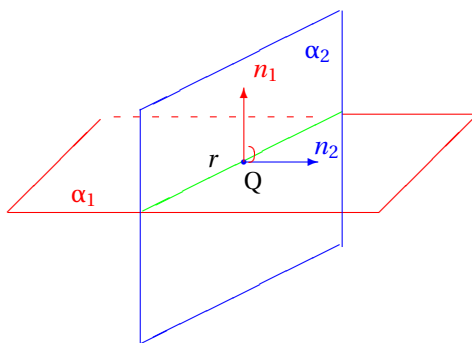


Figura 6.11: Piani ortogonali α_1 e α_2

- Sia $\alpha_1 \subset \mathbb{R}^3$ un piano con vettore normale $\vec{n} = (a, b, c)$ e sia r una retta con vettore direttore $\vec{r} = (l, m, n)$. Diciamo che r e α_1 sono *ortogonali*, in simboli $\alpha_1 \perp r$, se i vettori \vec{n} e \vec{r} , sono paralleli, ovvero se

$$(l, m, n) = k(a, b, c)$$

con $k \neq 0$.

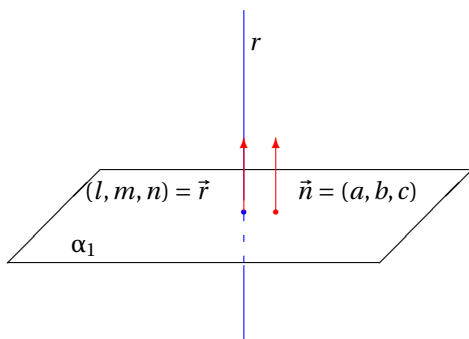


Figura 6.12: Retta r ortogonale al piano α_1

6.2.2 Distanza di un punto da un piano

Siano $P = (x_0, y_0, c_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$ un punto e un piano di \mathbb{R}^3 , rispettivamente. Vogliamo vedere come si determina la distanza del punto P dal piano π , che denoteremo con $d(P, \pi)$.

- Se $P \in \pi$ allora $d(P, \pi) = 0$.
- Se $P \notin \pi$, prendiamo un punto $P_0 \in \pi$, $P_0 = (p_1, p_2, p_3)$ e siano v_1, v_2 i vettori generatori del piano π . Il piano ha equazione vettoriale $\pi : P_0 + t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2$. Sia r la retta passante per P e ortogonale al piano π , allora la retta r ha equazione vettoriale $r : P + t \vec{n}$.

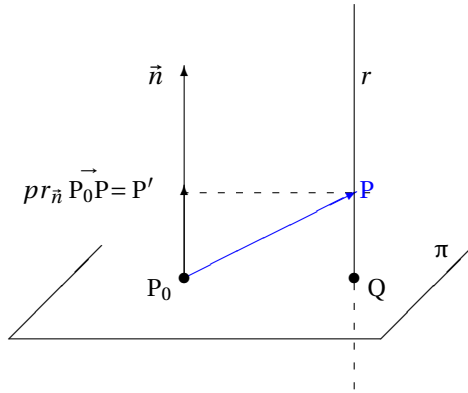


Figura 6.13: $d(P, \pi) = \|\vec{PQ}\| = \|\text{pr}_{\vec{n}} \vec{P_0P}\| = \|\vec{P_0P'}\|$

Sia Q il punto di intersezione della retta r con il piano π . Allora $Q = P + t\vec{n}$ per qualche $t \in \mathbb{R}$ e $Q = P_0 + t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2$ per qualche $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Si ha quindi che $P + t\vec{n} = P_0 + t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2$ da cui segue che $P_0 - P = t\vec{n} - t_1 \vec{v}_1 - t_2 \vec{v}_2$, ovvero $\vec{PP_0} = t\vec{n} - t_1 \vec{v}_1 - t_2 \vec{v}_2$. Facciamo il prodotto scalare di ambo i membri con il vettore \vec{n} allora, poichè $\vec{n} \perp v_1 = 0$ e $\vec{n} \perp v_2$ si ha che

$$\vec{PP_0} \cdot \vec{n} = t\vec{n} \cdot \vec{n}$$

e dunque $t = \frac{\vec{PP_0} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}$. Ne segue che $Q = P + \frac{\vec{PP_0} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n}$. Poichè $\vec{n} = (a, b, c)$ e $\vec{PP_0} = (p_1 - x_0, p_2 - y_0, p_3 - z_0)$ allora $\vec{PP_0} \cdot \vec{n} = a(p_1 - x_0) + b(p_2 - y_0) + c(p_3 - z_0) = ap_1 + bp_2 + cp_3 - ax_0 - by_0 - cz_0 = -d - ax_0 - by_0 - cz_0$ Allora $\|\vec{PQ}\| = \|Q - P\| = \|P + \frac{\vec{PP_0} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \cdot \vec{n} - P\| = \|\frac{\vec{PP_0} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}\| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. Dunque

$$d(P, \pi) = \|\vec{PQ}\| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Osserviamo che $\|\vec{PQ}\| = \|\text{pr}_{\vec{n}} \vec{P_0P}\| = \|\vec{P_0P'}\|$, dove $\text{pr}_{\vec{n}} \vec{P_0P}$ denota la proiezione del vettore $\vec{P_0P}$ sul vettore \vec{n} .

Esempio 6.2.4 Trovare la minima distanza tra il punto $P = (1, 5, 5)$ e il piano π di equazione cartesiana $2x - y + 3z = 1$. Si determini inoltre il punto $Q \in \pi$ più vicino a P .

Osserviamo che il vettore $\vec{n} = (2, -1, 3)$ è un vettore normale al piano. Sia $P_0 = (0, 2, 1) \in \pi$ e quindi il vettore $\vec{P_0P} = P - P_0 = (1, 3, 4)$. Dunque

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2 - 5 + 15 - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 9}} = \frac{11}{\sqrt{14}}$$

O anche, sappiamo che la proiezione del vettore $\vec{P_0P}$ lungo \vec{n} è il vettore $pr_{\vec{n}} \vec{P_0P} = \frac{\vec{P_0P} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} = \frac{11}{14} (2, -1, 3)$ e la sua lunghezza è $\|pr_{\vec{n}} \vec{P_0P}\| = \frac{11}{14} \sqrt{14}$ e dunque $d(P, \pi) = \frac{11}{\sqrt{14}}$.

Per determinare il punto $Q \in \pi$ più vicino a P troviamo la retta r passante per P e con direzione quella individuata dal vettore \vec{n} ; il punto di intersezione di r con π è il punto Q . La retta r ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 5 - t \\ z = 5 + 3t \end{cases}$$

L'intersezione di r con π si ha se $2(1 + 2t) - (5 - t) + 3(5 + 3t) = 1$, ovvero per $t = -\frac{11}{14}$ e dunque $Q = (1 - \frac{11}{7}, 5 + \frac{11}{14}, 5 - \frac{33}{14}) = (-\frac{4}{7}, \frac{81}{14}, \frac{37}{14})$. Osserviamo che $\vec{PQ} = (-\frac{11}{7}, \frac{11}{14}, -\frac{33}{14})$ e quindi $\|\vec{PQ}\| = \sqrt{\frac{121}{49} + \frac{121}{196} + \frac{1089}{196}} = \sqrt{\frac{1694}{196}} = \frac{11}{\sqrt{14}}$

6.2.3 Distanza di un punto da una retta

Siano P e r un punto e una retta di \mathbb{R}^3 , rispettivamente. Vogliamo vedere come trovare la distanza del punto P dalla retta r , che denoteremo con $d(P, r)$.

- Se $P \in r$ allora $d(P, r) = 0$.
- Se $P \notin r$, consideriamo il piano π passante per P e con vettore normale un vettore direttore di r . Tale piano interseca la retta r in un punto Q . Allora $d(P, r) = \|\vec{PQ}\|$.

Esempio 6.2.5 Trovare la minima distanza tra il punto $P = (1, 0, 3)$ e la retta r di equazione cartesiana $2x - y + 3z = 1, y - z = 3$. Si determini inoltre il punto $Q \in r$ più vicino al punto P .

Osserviamo che il vettore $\vec{r} = (1, -1, -1)$ è un vettore direttore di r . Sia π il piano passante per P e con vettore normale \vec{r} . Allora π ha equazione cartesiana $(x - 1) - y - (z - 3) = 0$, ovvero $x - y - z + 2 = 0$. Risolvendo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ y - z = 3 \\ x - y - z = -2 \end{cases}$$

si ottiene $Q = (\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{1}{3})$. Allora $\vec{PQ} = (\frac{2}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{8}{3})$ e quindi $d(P, r) = \|\vec{PQ}\| = \frac{2}{3} \sqrt{42}$.

Osservazione 6.2.6 È chiaro che se r e s sono due rette di \mathbb{R}^3 coincidenti, oppure se r e s si intersecano in un punto allora $d(r, s) = 0$. Come pure se r e s sono due rette parallele distinte allora $d(r, s) = d(P, s) = d(Q, r)$, dove P è un qualunque punto di r e Q è un qualunque punto di s .

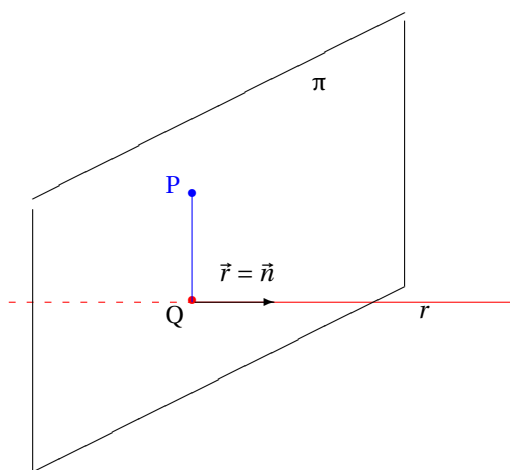


Figura 6.14: $d(P, r) = \|\vec{PQ}\|$

6.2.4 Minima distanza tra due rette sghembe

Siano r e s due rette sghembe. Si può provare che esiste un unico punto $R \in r$ e un unico punto $S \in s$ tali che il vettore \vec{RS} è ortogonale sia a un vettore direttore di r che a un vettore direttore di s . Una volta determinati tali punti la minima distanza tra la retta r e la retta s è data da $\|\vec{RS}\| = d(r, s)$.

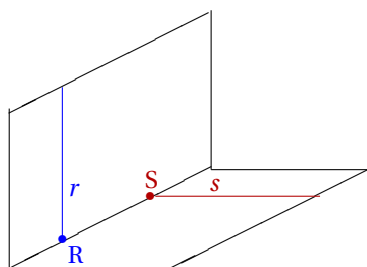


Figura 6.15: $d(r, s) = \|\vec{RS}\|$, r, s rette sghembe

Esempio 6.2.7 Siano r e s due rette in \mathbb{R}^3 di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + t \\ z = 2 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = t' \\ y = 5 - 2t' \\ z = 2 + t' \end{cases}$$

- (a) Trovare la minima distanza tra r e s .
- (b) Trovare i punti $R \in r$ e $S \in s$ più vicini tra loro.

Si verifica facilmente che le due rette non si intersecano. Inoltre esse non sono parallele poichè i vettori direttori $\vec{r} = (1, 1, 0)$ e $\vec{s} = (1, -2, 1)$ di r e di s , rispettivamente, non sono paralleli. Dunque le rette sono sghembe.

Siano $R = (3 + t, -1 + t, 2) \in r$ e $S = (t', 5 - 2t', 2 + t') \in s$ due punti generici. Vogliamo determinare il valore del parametro t e t' tale che il vettore $\overrightarrow{RS} = S - R = (t', 5 - 2t', 2 + t') - (3 + t, -1 + t, 2) = (t' - 3 - t, 6 - 2t' - t, t')$ sia ortogonale sia a \vec{r} che a \vec{s} . Abbiamo

$$\text{quindi il seguente sistema } \begin{cases} 2t + t' = 3 \\ t + 6t' = 15 \end{cases}$$

la cui soluzione è $(t, t') = (\frac{3}{11}, \frac{27}{11})$. Dunque $R = (\frac{36}{11}, -\frac{8}{11}, 2)$, $S = (\frac{27}{11}, \frac{1}{11}, \frac{49}{11})$ e $\|\overrightarrow{RS}\| = \frac{9}{11}\sqrt{11} = d(r, s)$.

6.2.5 Angolo convesso tra due piani

Siano $\alpha_1 : ax + by + cz + d = 0$ e $\alpha_2 : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ due piani dello spazio euclideo \mathbb{R}^3 e siano $n_1 = (a, b, c)$ e $n_2 = (a', b', c')$ i vettori normali di α_1 e α_2 rispettivamente. L'angolo convesso tra i due piani α_1 e α_2 è l'angolo convesso θ tra i vettori n_1 e n_2 con $0 \leq \theta \leq \pi$ e

$$\cos \theta = \frac{n_1 \cdot n_2}{\|n_1\| \|n_2\|}$$

Osserviamo che se si moltiplica una delle due equazioni cartesiane di α_1 o α_2 per

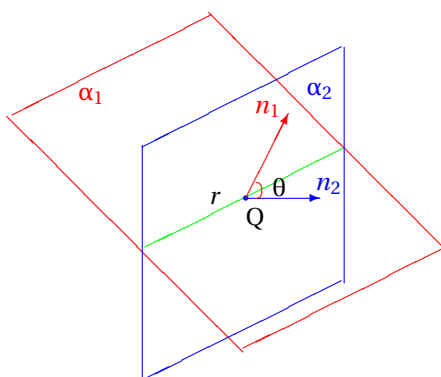


Figura 6.16: Angolo convesso tra i piani α_1 e α_2

uno scalare negativo allora θ cambia in $\pi - \theta$.

6.2.6 Angolo convesso tra due rette orientate

Siano r e s due rette orientate in \mathbb{R}^3 e siano \vec{r} e \vec{s} vettori direttori di r e s , rispettivamente.

Allora l'angolo convesso tra le rette r e s è l'angolo convesso θ tra i vettori \vec{r} e \vec{s} con $0 \leq \theta \leq \pi$ e

$$\cos \theta = \frac{\vec{r} \cdot \vec{s}}{\|\vec{r}\| \|\vec{s}\|}$$

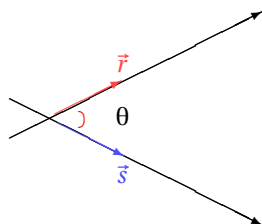


Figura 6.17: Angolo convesso tra le rette orientate r e s

se si è scelta un'orientazione sulle rette e se i vettori \vec{r} e \vec{s} sono orientati come le rette.

6.2.7 Angolo convesso tra una retta e un piano

Siano r e π una retta e un piano in \mathbb{R}^3 e sia r' la proiezione ortogonale di r sul piano π . L'angolo tra la retta r e il piano π è l'angolo θ , in Fig. 6.18. Di tale angolo θ è più

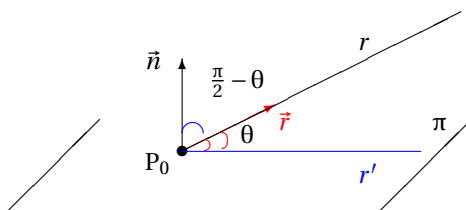


Figura 6.18: Angolo tra la retta r e il piano π

facile calcolarne il seno

$$\sin \theta = \left| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \right| = \left| \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{\|\vec{r}\| \|\vec{n}\|} \right| = \left| \frac{al + bm + cn}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

dove $\vec{r} = (l, m, n)$ è un vettore direttore della retta r e $\vec{n} = (a, b, c)$ è un vettore normale del piano π .

6.2.8 Esercizi

1. In \mathbb{R}^3 si considerino le seguenti rette $r_1 : x - 1 = 0, y - z + 1 = 0$; $r_2 : 2x - z + 1 = 0, 2y + z - 7 = 0$.
 - (a) Verificare che esse sono incidenti e determinare l'equazione cartesiana del piano π che le contiene.
 - (b) Scrivere l'equazione parametrica e cartesiana della retta perpendicolare al piano π e passante per il punto $P = (0, -1, 1)$.
2. In \mathbb{R}^3 si considerino le seguenti rette $r_1 : 3x + z - 2 = 0, 3y - z = 1$; $r_2 : y = 1, 3x + z = 2$; $r_3 : x = 1, z = -1$.

- (a) Verificare che esse sono a due a due incidenti e determinare i punti di intersezione.
- (b) Sia T il triangolo individuato dai punti determinati in (a). Trovare l'area di tale triangolo.
- (c) Scrivere l'equazione del piano che contiene le rette r_1, r_2, r_3 .
3. In \mathbb{R}^3 si considerino i punti $A = (1, 2, 1), B = (0, 1, 1), C = (-1, 0, 2)$.
- (a) Verificare che i punti non sono allineati e scrivere l'equazione cartesiana del piano α che li contiene.
- (b) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r perpendicolare al piano α e passante per il punto $P(2, 2, 1)$.
- (c) Sia s la retta di equazioni $x = t, y = t + 1, z = 2t$. Dire se le rette r e s sono sghembe.
4. Siano $A = (1, 1, -1), B = (0, -1, 1), C = (2, 1, 0), D = (1, 2, 2)$ punti dello spazio euclideo.
- (a) Dopo aver verificato che i punti A, B, C, D non sono complanari, si determini l'equazione cartesiana della retta r passante per A e avente come direzione quella individuata dal vettore \overrightarrow{AB} .
- (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano perpendicolare alla retta r e passante per D .
- (c) Determinare il volume del parallelepipedo individuato dai punti A, B, C, D .
5. Siano $A = (1, 2, 1), B = (2, 0, -1), C = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.
- (a) Verificare che i punti A, B, C non sono allineati.
- (b) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane del piano α contenente i punti A, B, C .
- (c) Scrivere le equazioni parametriche della retta r passante per il punto $P = (0, 1, 1)$ e perpendicolare al piano α .
- (d) Determinare la minima distanza dal punto $P = (0, 1, 1)$ al piano α e il punto Q del piano α più vicino a P .
6. Sia $\vec{n} = (-1, -2, 3)$ un vettore di \mathbb{R}^3 . Scrivere l'equazione cartesiana del piano π avente \vec{n} come vettore normale e passante per il punto $A = (0, 1, -1)$.

Capitolo 7

Matrici Complesse

Sia $M_n(\mathbb{C})$ l'insieme delle matrici $n \times n$ a entrate complesse. Per esse è definita la somma e il prodotto per uno scalare complesso, come per le matrici a entrate reali. Data $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$ per complessa coniugata di A si intende la matrice

$$\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$$

con \bar{a}_{ij} il complesso coniugato di a_{ij} .

Valgono le seguenti proprietà

1. $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$
2. $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$
3. $\overline{kA} = \bar{k} \cdot \bar{A}$
4. ${}^t(\bar{A}) = \overline{{}^tA}$

7.1 Matrici Hermitiane

Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ e sia ${}^t(\bar{A})$ la trasposta della complessa coniugata di A .

Osservazione 7.1.1 Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica reale allora ${}^t(\bar{A}) = A$.

Le matrici complesse che soddisfano questa condizione sono la generalizzazione delle matrici simmetriche.

Definizione 7.1.2 Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice complessa. A è detta *hermitiana* (dal matematico francese *Charles Hermite*) se ${}^t(\bar{A}) = A$.

Osservazione 7.1.3 Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ è una matrice hermitiana allora le entrate sulla diagonale principale di A sono tutte reali.

Esempio 7.1.4 La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2i & 4+i \\ 2i & 8 & 1-i \\ 4-i & 1+i & 5 \end{pmatrix}$$

è hermitiana, infatti ${}^t\bar{A} = A$. Mentre la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2i & 4+i \\ 2i & 8 & 1-i \\ 4-i & 1+i & i \end{pmatrix}$$

non è hermitiana, infatti non tutte le entrate sulla diagonale principale sono reali.

7.2 Prodotto hermitiano standard in \mathbb{C}^n .

Vogliamo definire nello spazio vettoriale complesso \mathbb{C}^n un prodotto tra vettori che permetta di poter definire tramite esso il modulo di un vettore come pure la nozione di vettori ortogonali. Noi considereremo il *prodotto hermitiano standard*.

Definizione 7.2.1 Siano $u = (x_1, x_2, \dots, x_n), v = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. Il *prodotto hermitiano standard* di u e v , denotato con $\langle u, v \rangle_H$, è il numero complesso così definito

$$\langle u, v \rangle_H := x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i. \quad (7.1)$$

Osserviamo che se pensiamo ai vettori u, v come vettori riga, ovvero

$$(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n), \quad (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)$$

allora il prodotto hermitiano $\langle u, v \rangle_H$ non è altro che il prodotto tra la matrice riga u e la matrice colonna ${}^t\bar{v}$, ovvero $\langle u, v \rangle_H = u \cdot {}^t\bar{v}$, dove $\bar{v} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$.

Se $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ allora

$$\langle X, X \rangle_H = x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_n \bar{x}_n = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2$$

dove $|x_i|$ denota il modulo del numero complesso x_i . Da cui segue che $X \cdot X > 0$ se $X \neq 0$. Questo prodotto ci permette di definire la lunghezza di un vettore $X \in \mathbb{C}^n$ come

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle_H} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

Si vede che $\|X\| = 0$ se e solo se $X = 0$.

Osserviamo che il prodotto hermitiano è una funzione

$$\langle, \rangle_H: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$$

che soddisfa le seguenti proprietà

7.2.1 Proprietà del prodotto hermitiano standard

1. $\langle u + v, w \rangle_{\mathbb{H}} = \langle u, w \rangle_{\mathbb{H}} + \langle v, w \rangle_{\mathbb{H}}$, per ogni $u, v, w \in \mathbb{C}^n$
2. $\langle u, w + w' \rangle_{\mathbb{H}} = \langle u, w \rangle_{\mathbb{H}} + \langle u, w' \rangle_{\mathbb{H}}$, per ogni $u, w, w' \in \mathbb{C}^n$
3. $\langle ku, v \rangle_{\mathbb{H}} = k \langle u, v \rangle_{\mathbb{H}}$, per ogni $u, v \in \mathbb{C}^n$ e per ogni $k \in \mathbb{C}$ (omogeneità)
4. $\langle u, v \rangle_{\mathbb{H}} = \overline{\langle v, u \rangle_{\mathbb{H}}}$, per ogni $u, v \in \mathbb{C}^n$
5. $\langle u, u \rangle_{\mathbb{H}} \geq 0$, si ha l'uguaglianza se e solo se $u = 0$ (positività).

Le proprietà 1. e 3. ci dicono che il prodotto hermitiano standard è \mathbb{C} -lineare. La proprietà 2. dice che il prodotto hermitiano standard è additivo in w . Le proprietà 2. e 4. ci dicono che il prodotto hermitiano standard è antilineare in w . Osserviamo

che

$$\langle u, kv \rangle_{\mathbb{H}} = \overline{\langle kv, u \rangle_{\mathbb{H}}} = \overline{k \langle v, u \rangle_{\mathbb{H}}} = \bar{k} \overline{\langle v, u \rangle_{\mathbb{H}}} = \bar{k} \langle u, v \rangle_{\mathbb{H}}$$

In analogia a quanto visto per gli spazi euclidei abbiamo la seguente definizione

Definizione 7.2.2 Due vettori si dicono *ortogonali* se il loro prodotto hermitiano è zero.

Se $U \subset \mathbb{C}^n$ è un sottospazio di \mathbb{C}^n , con U^\perp indichiamo il seguente insieme

$$U^\perp = \{v \in \mathbb{C}^n \mid v \text{ ortogonale a ogni vettore di } U\}$$

Si verifica facilmente che U^\perp è un sottospazio vettoriale di \mathbb{C}^n detto *sottospazio ortogonale* a U .

Lo spazio vettoriale \mathbb{C}^n con il prodotto hermitiano standard è detto spazio vettoriale hermitiano.

Esempio 7.2.3 Siano $X = (1, 1 - i, 5 + i, i), Y = (2 - i, 1 - i, 1, 3 + i) \in \mathbb{C}^4$.

1. Dire se X è un versore, in caso contrario determinare un vettore multiplo di X che sia un versore.
2. Calcolare $\langle X, Y \rangle_{\mathbb{H}}$.

$$\begin{aligned} \|X\| &= \sqrt{1 + (1 - i)(1 + i) + (5 + i)(5 - i) + i(-i)} = \sqrt{1 + 1 + 1 + 25 + 1 + 1} \\ &= \sqrt{30} \end{aligned}$$

X non è un versore, come versore multiplo di X possiamo prendere

$$\frac{1}{\|X\|} X = \frac{1}{\sqrt{30}} (1, 1 - i, 5 + i, i).$$

Calcoliamo ora $\langle X, Y \rangle_{\mathbb{H}}$
 $\langle X, Y \rangle_{\mathbb{H}} = 1(2 - i) + (1 - i)(1 - i) + (5 + i)1 + i(3 - i) = 2 - i + 1 + 1 + 5 + i + 3i - 1 = 8 + 3i$

Faremo vedere che anche per matrici hermitiane, come per matrici simmetriche reali, si ha che gli autovalori sono reali e che autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali. Vale il seguente teorema

Teorema 7.2.4 *Sia A una matrice hermitiana.*

1. *Il polinomio caratteristico di A possiede tutte radici reali.*
2. *Gli autovettori di A corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali.*

Dimostrazione Sia λ un autovalore di A e sia X un autovettore relativo a λ . Allora $AX = \lambda X$. Osserviamo che

$$\langle AX, X \rangle_H = \langle X, {}^t\bar{A}X \rangle_H = \langle X, AX \rangle_H,$$

quest'ultima relazione si ha essendo A hermitiana.

Ne segue che

$$\lambda \langle X, X \rangle_H = \langle \lambda X, X \rangle_H = \langle AX, X \rangle_H = \langle X, AX \rangle_H = \langle X, \lambda X \rangle_H = \bar{\lambda} \langle X, X \rangle_H$$

e quindi

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \langle X, X \rangle_H = 0$$

ed essendo $\langle X, X \rangle_H \neq 0$ ne segue che $\lambda = \bar{\lambda}$ e dunque gli autovalori sono reali.

Siano λ e μ autovalori distinti di A e siano X e Y i corrispondenti autovettori. Allora $AX = \lambda X$ e $AY = \mu Y$. Consideriamo il prodotto hermitiano

$$\lambda \langle X, Y \rangle_H = \langle \lambda X, Y \rangle_H = \langle AX, Y \rangle_H = \langle X, AY \rangle_H = \langle X, \mu Y \rangle_H = \bar{\mu} \langle X, Y \rangle_H = \mu \langle X, Y \rangle_H \quad (7.2)$$

Quindi la relazione (7.2) diventa

$$(\lambda - \mu) \langle X, Y \rangle_H = 0$$

e se $\lambda \neq \mu$ ne segue che $\langle X, Y \rangle_H = 0$ e quindi X e Y sono ortogonali. □

Definizione 7.2.5 Sia v_1, \dots, v_n una base di \mathbb{C}^n . Essa è detta base *ortonormale* se

$$\|v_i\| := 1 \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n \quad (7.3)$$

$$\langle v_i, v_j \rangle_H = 0 \quad \text{per ogni } i \neq j \quad (7.4)$$

Definizione 7.2.6 Una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ si dice *unitaria* se i suoi vettori colonna sono una base ortonormale per \mathbb{C}^n . In altri termini se

$$A {}^t\bar{A} = I_n, \quad \text{ovvero se } A^{-1} = {}^t\bar{A}$$

Esempio 7.2.7 La matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}(1-i) & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

è una matrice unitaria.

Esercizio 7.2.8 Dire se la seguente matrice è una matrice unitaria

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1-i & i \end{pmatrix}$$

7.3 Diagonalizzazione Unitaria

Per una matrice simmetrica reale A sappiamo che esiste una matrice ortogonale C tale che tCAC è una matrice diagonale. Vedremo che se la matrice A è hermitiana lo stesso risultato vale con C matrice unitaria, ovvero A si diagonalizza con una matrice diagonalizzante unitaria.

Teorema 7.3.1 (*Diagonalizzazione unitaria*) Sia A una matrice hermitiana. Allora esiste una matrice unitaria C tale che ${}^t\bar{C}AC$ è una matrice diagonale.

Esempio 7.3.2 Data la matrice hermitiana

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}$$

trovare una matrice unitaria C tale che ${}^t\bar{C}AC$ sia diagonale.

7.3.1 Esercizi

1. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2+i & 0 \\ 2-i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dire se A è unitaria. In caso contrario determinare una base ortonormale per lo spazio generato dalle colonne di A .

2. Determinare una matrice unitaria C tale che ${}^t\bar{C}AC$ sia diagonale, dove A è una delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3-i \\ 3+i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+i \\ 0 & 1-i & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 2 & 0 \\ 1-i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Provare che se A è una matrice hermitiana e unitaria allora ogni autovalore di A è uguale a 1 o -1 .

4. Si considerino i seguenti vettori

- a) $X = (-2, 1+i, 2i), Y = (1-i, 2i, 1) \in \mathbb{C}^3$
- b) $X = (2-i, -1, 1+3i, 2i), Y = (-1, 2i, 1+i, i) \in \mathbb{C}^4$.

Dire se sono ortogonali e si calcoli la loro lunghezza.

5. In \mathbb{C}^3 si consideri la base data dai seguenti vettori $u_1 = (1+i, 1, 1), u_2 = (-1, -1+i, 0), u_3 = (i, 1, -1)$. Dire se essa è ortonormale. In caso contrario ortonormalizzarla con Gram-Schmidt.

6. Siano A e B matrici unitarie. Provare che AB è unitaria e che A^{-1} è unitaria.

7. Sia V uno spazio vettoriale complesso con base v_1, v_2 . Se $v = x_1 v_1 + x_2 v_2$ e $w = y_1 v_1 + y_2 v_2$, poniamo

a) $\langle v, w \rangle := 2x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_1 + x_1 \bar{y}_2 + x_2 \bar{y}_2$

b) $\langle v, w \rangle := x_1 \bar{y}_1 + 2x_2 \bar{y}_1 + 2x_1 \bar{y}_2 - x_2 \bar{y}_2$

c) $\langle v, w \rangle := x_1 \bar{y}_1 + (1+i)x_1 \bar{y}_2 + (1-i)x_2 \bar{y}_1 - 3x_2 \bar{y}_2$

d) $\langle v, w \rangle := 2x_1 \bar{y}_1 + 3x_2 \bar{y}_2$

Dire se essi definiscono un prodotto hermitiano su V .

Capitolo 8

Spazi Affini e Spazi Euclidei

8.1 Spazi Affini

Nello spazio (piano) ordinario (detto anche *spazio affine*) abbiamo introdotto i vettori come classi di equipollenza di segmenti orientati. Abbiamo anche visto che se si fissa nello spazio un punto, per esempio $O = (0, 0, 0)$, a ogni punto P dello spazio ordinario possiamo associare il vettore \vec{OP} e in questo modo si vede che a \mathbb{R}^3 resta associato uno spazio vettoriale, V_0 , quello dei vettori con punto di applicazione l'origine.

Viceversa, dato uno spazio vettoriale V su un campo \mathbb{K} , vedremo cosa si intende per *spazio affine* con spazio dei vettori associato V , generalizzando in tal modo la nozione di piano e spazio affine.

Definizione 8.1.1 Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} . Uno *spazio affine* con spazio dei vettori associato V è un insieme non vuoto \mathcal{A} su cui è definita l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\rightarrow V \\ (P, Q) &\rightarrow \vec{PQ} \end{aligned} \tag{8.1}$$

in modo tale che le seguenti proprietà siano soddisfatte

(SA1) per ogni $P \in \mathcal{A}$ e per ogni $v \in V$ esiste un unico $Q \in \mathcal{A}$ tale che $\vec{PQ} = v$

(SA2) per ogni $P, Q, R \in \mathcal{A}$ si ha che $\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$

L'applicazione (8.1) definisce una struttura di spazio affine sull'insieme \mathcal{A} .

\mathcal{A} è detto *spazio affine reale* se il campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, \mathcal{A} è detto *spazio affine complesso* se il campo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Esempio 8.1.2 Sia $V = \mathbb{K}^n$. \mathbb{K}^n si può pensare come spazio affine su sé stesso, basta definire l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ (P, Q) &\rightarrow \vec{PQ} := Q - P \end{aligned}$$

Si verificano facilmente le proprietà di spazio affine. Infatti per ogni $P \in \mathbb{K}^n$ e per ogni $v \in \mathbb{K}^n$ esiste un unico $Q \in \mathbb{K}^n$ tale che $\vec{PQ} = v$, basta prendere $Q = P + v$

Come pure per ogni $P, Q, R \in \mathbb{K}^n$ si ha che $\vec{PQ} + \vec{QR} = Q - P + R - Q = \vec{PR}$. Dunque (SA1), (SA2) sono soddisfatte. Lo spazio affine \mathbb{K}^n viene denotato con $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$.

Definizione 8.1.3 (Riferimento affine) Sia \mathcal{A} uno spazio affine con spazio dei vettori associato V . Assegnare un *riferimento affine* su \mathcal{A} equivale ad assegnare un punto $O \in \mathcal{A}$ e una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V . $RA(O; v_1, \dots, v_n)$ è detto *riferimento affine*.

Per ogni $P \in \mathcal{A}$, $\vec{OP} \in V$ e dunque $\vec{OP} = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$. Il vettore \vec{OP} si identifica con la n -upla (x_1, \dots, x_n) e queste sono dette *coordinate affini* del punto P .

Per esempio in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, con riferimento affine $RA(O; v_1, v_2)$, $\vec{OP} = x_1 v_1 + y_1 v_2$.

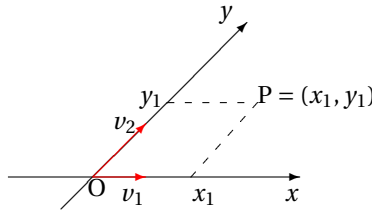


Figura 8.1: Riferimento affine $RA(O; v_1, v_2)$

8.2 Affinità

Vogliamo considerare particolari applicazioni biettive di uno spazio affine \mathcal{A} in sé stesso, $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, dette *affinità*. Descriveremo in modo esplicito tali applicazioni nel caso in cui $\mathcal{A} = \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$. Vedremo che queste applicazioni non sono altro che la composizione di una traslazione e di un'applicazione lineare biettiva. Le affinità trasformano rette in rette, piani in piani, sottospazi in sottospazi e conservano il parallelismo. Quindi sottospazi affini paralleli sono trasformati in sottospazi affini paralleli. Ad esempio nel piano la proprietà di un quadrilatero di essere parallelogramma è una proprietà affine, mentre non lo è quella di essere un quadrato. Diamo ora la definizione di affinità.

Definizione 8.2.1 Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} e sia \mathcal{A} uno spazio affine con spazio dei vettori associato V . Un'applicazione biettiva

$$f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

tale che esista un automorfismo $\varphi : V \rightarrow V$ (ovvero un isomorfismo) che soddisfa la proprietà

$$\vec{f(P)f(Q)} = \varphi(\vec{PQ}) \quad \text{per ogni } P, Q \in \mathcal{A} \tag{8.2}$$

è detta *affinità*.

Esempio 8.2.2 Sia \mathcal{A} uno spazio affine con spazio dei vettori associato V . Sia $\vec{v} \in V$ e sia $t_{\vec{v}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ l'applicazione così definita:

$$t_{\vec{v}}(P) := \vec{v} + P$$

Tale applicazione, detta *traslazione* definita da \vec{v} , è un'affinità. Infatti $t_{\vec{v}}$ è iniettiva poiché se $t_{\vec{v}}(P) = t_{\vec{v}}(Q)$ si ha che $\vec{v} + P = \vec{v} + Q$ e pertanto $P = Q$. Inoltre $t_{\vec{v}}$ è suriettiva infatti per ogni $Q \in \mathcal{A}$ si ha che $P = -\vec{v} + Q$ è tale che $t_{\vec{v}}(P) = t_{\vec{v}}(-\vec{v} + Q) = Q$ e quindi $t_{\vec{v}}$ è biiettiva. Osserviamo che l'isomorfismo φ associato a $t_{\vec{v}}$ è l'applicazione identica. Infatti per ogni $P, Q \in \mathcal{A}$, $\vec{t}_{\vec{v}}(P)\vec{t}_{\vec{v}}(Q) = \varphi(\vec{PQ}) = id_V(\vec{PQ})$.

Osservazione 8.2.3 Sia $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ l'insieme di tutte le traslazioni. Consideriamo in tale insieme l'operazione di composizione. La coppia $(\mathcal{T}(\mathcal{A}), \circ)$, è un gruppo, detto *gruppo delle traslazioni*. Infatti se $t_{\vec{v}}, t_{\vec{w}}$ sono due traslazioni la loro composizione $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}}$ è una traslazione poiché $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}} = t_{\vec{v} + \vec{w}}$ e quindi l'operazione di composizione è una operazione binaria su $\mathcal{T}(\mathcal{A})$. Tale operazione è associativa poiché la composizione di applicazioni è associativa. Inoltre l'applicazione $id_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ è una traslazione, infatti $id_{\mathcal{A}} = t_{\vec{0}}$. Data una qualunque traslazione $t_{\vec{v}}$ la sua inversa, $t_{\vec{v}}^{-1} = t_{-\vec{v}}$, che è una traslazione.

Definizione 8.2.4 Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} e sia \mathcal{A} uno spazio affine con spazio dei vettori associato V . L'insieme

$$Aff(\mathcal{A}) := \{f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \mid f \text{ è un'affinità}\}$$

con l'operazione di composizione è un gruppo, detto *gruppo delle affinità*. La composizione di due affinità f, g è un'affinità. Infatti se φ, ψ sono gli automorfismi associati a f e g rispettivamente allora $f \circ g$ è l'affinità con automorfismo associato $\varphi \circ \psi$. L'elemento neutro è l'applicazione identica $id_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ che ha come automorfismo associato l'applicazione $id_V : V \rightarrow V$. Per ogni $f \in Aff(\mathcal{A})$ esiste l'inversa, f^{-1} , essa è l'affinità con automorfismo associato φ^{-1} , dove φ è l'automorfismo associato a f .

Osservazione 8.2.5 L'insieme $\mathcal{T}(\mathcal{A}) \subset Aff(\mathcal{A})$ è un sottogruppo di $Aff(\mathcal{A})$.

8.2.1 Affinità di $\mathcal{A}^n(\mathbb{K})$

Se come spazio affine prendiamo $\mathcal{A}^n(\mathbb{K})$, descriviamo in modo esplicito il gruppo $Aff(\mathcal{A}^n(\mathbb{K}))$.

Sia $f : \mathcal{A}^n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{A}^n(\mathbb{K})$ un'affinità. Sia $\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ l'isomorfismo associato a f , sia $A = M_{\mathbf{e}}(\varphi)$ la matrice associata a φ rispetto alla base canonica e sia $C = f(0)$. Allora per ogni $X \in \mathcal{A}^n(\mathbb{K})$ si ha che

$$f(X) = AX + C \tag{8.3}$$

Infatti dalla definizione di affinità, (8.2) si ha che

$$\vec{f(0)}f(X) = \varphi(\vec{0X})$$

da cui segue che $f(X) - f(0) = A(X - 0) = AX$ e quindi

$$f(X) = AX + C.$$

Viceversa se $A \in GL(n, \mathbb{K}), C \in \mathcal{A}^n(\mathbb{K})$ allora $f : \mathcal{A}^n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{A}^n(\mathbb{K})$ così definita

$$f(X) = AX + C$$

è un'affinità. Infatti se denotiamo con $\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ l'applicazione lineare definita dalla matrice A , tale applicazione è un isomorfismo. Inoltre per ogni $P, Q \in \mathcal{A}^n(\mathbb{K})$

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = f(Q) - f(P) = AQ + C - AP - C = A(Q - P) = \varphi(\overrightarrow{PQ})$$

e dunque f è un'affinità.

Più in generale se \mathcal{A} è uno spazio affine di dimensione n con spazio dei vettori associato V , e se $RA(O; e_1, \dots, e_n)$ è un riferimento affine su \mathcal{A} , per ogni punto $P \in \mathcal{A}$, indichiamo con (x_1, \dots, x_n) le sue coordinate affini. Allora ogni affinità di \mathcal{A} si scrive come

$$f(X) = AX + C \tag{8.4}$$

dove $A = M_e(\varphi)$ è la matrice associata all'automorfismo φ relativamente alla base e , e $C = f(O)$.

Osservazione 8.2.6 Da (8.3) segue che ogni affinità f è la composizione di una traslazione e di un'applicazione lineare biiettiva, ovvero

$$f = t_C \circ \varphi,$$

dove φ è l'automorfismo associato all'affinità f e $C = f(O)$.

Osservazione 8.2.7 Denotiamo con $Af f_0(\mathcal{A}^n(\mathbb{K}))$ l'insieme delle affinità che fissano l'origine. Si verifica facilmente che $Af f_0(\mathcal{A}^n(\mathbb{K}))$ è un sottogruppo di $Af f(\mathcal{A}^n(\mathbb{K}))$. Da (8.3) segue che se $f(0) = 0$ allora $f(X) = AX$ e quindi $Af f_0(\mathcal{A}^n(\mathbb{K}))$ è in corrispondenza biunivoca con $GL_n(\mathbb{K})$.

Definizione 8.2.8 Sia $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ un'affinità e sia $P \in \mathcal{A}$. P è detto punto fisso per f se $f(P) = P$.

8.2.2 Altri esempi di affinità

Esempio 8.2.9 Fissiamo un punto $C \in \mathcal{A}$. Per ogni $P \in \mathcal{A}$ denotiamo con $\sigma_C(P)$ il simmetrico di P rispetto a C , ossia $\sigma_C(P)$ è tale che $C\sigma_C(P) = -CP$. L'applicazione $\sigma_C : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ che manda P nel suo simmetrico rispetto a C è un'affinità.

Infatti σ_C è iniettiva poiché se $\sigma_C(P) = \sigma_C(Q)$ ne segue che $C\overrightarrow{\sigma_C(P)} = C\overrightarrow{\sigma_C(Q)}$ e quindi $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CQ}$ e pertanto $P = Q$. Inoltre σ_C è suriettiva infatti per ogni $Q \in \mathcal{A}$ si ha

che $P = \sigma_C(Q)$ è tale che $\sigma_C(P) = Q$ infatti $\sigma_C(\sigma_C(Q)) = Q$ e quindi σ_C è biiettiva. Osserviamo che l'isomorfismo φ associato a σ_C è l'opposto dell'applicazione identica. Infatti

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\sigma_C(P)\sigma_C(Q)} &= \overrightarrow{\sigma_C(Q) - \sigma_C(P)} = -\overrightarrow{C} + \overrightarrow{\sigma_C(Q)} + \overrightarrow{C} - \overrightarrow{\sigma_C(P)} \\ &= \overrightarrow{\sigma_C(P)C} + \overrightarrow{C\sigma_C(Q)} = \overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{PQ} = -i d_V(\overrightarrow{PQ}) \end{aligned}$$

Esempio 8.2.10 Sia \mathcal{A} uno spazio affine con spazio dei vettori associato V , con V \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimenisione n . Sia $P_0 \in \mathcal{A}$ e sia $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Un'omotetia di centro P_0 e valore λ è un'applicazione $\omega = \omega_{P_0, \lambda} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ dove $\omega(P)$ è tale che $\overrightarrow{P_0\omega(P)} = \lambda \overrightarrow{P_0P}$. Osserviamo che

- $\omega(P_0) = P_0$. Infatti $\overrightarrow{P_0\omega(P_0)} = \lambda \overrightarrow{P_0P_0} = \vec{0}$ e dunque ω lascia fisso P_0 .
- ω è un'affinità con automorfismo associato $\varphi = \lambda I_n$.

e dunque le omotetie di centro P_0 sono affinità che fissano P_0 .

8.2.3 Alcune proprietà delle affinità

Definizione 8.2.11 Sia \mathcal{A} uno spazio affine con spazio dei vettori associato V di dimensione n e siano $\{P_0, \dots, P_n\}$ punti di \mathcal{A} . Essi si dicono linearmente indipendenti se gli n vettori $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n} \in V$ sono linearmente indipendenti.

Proposizione 8.2.12 Sia \mathcal{A} uno spazio affine con spazio dei vettori associato V di dimensione n e siano $\{P_0, \dots, P_n\}, \{Q_0, \dots, Q_n\}$ due $(n + 1)$ -uple di punti linearmente indipendenti. Allora esiste un'unica affinità $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tale che $f(P_i) = Q_i$ per ogni $i = 0, \dots, n$.

Dimostrazione Poichè $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}, \{\overrightarrow{Q_0Q_1}, \dots, \overrightarrow{Q_0Q_n}\} \subset V$ sono basi per V , da (4.1.16) esiste un'unica applicazione lineare $\varphi : V \rightarrow V$ tale che $\varphi(\overrightarrow{P_0P_i}) = \overrightarrow{Q_0Q_i}$ per $i = 1, \dots, n$ e tale applicazione è un isomorfismo. Definiamo $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ mediante la seguente condizione

$$\overrightarrow{Q_0f(P_i)} = \varphi(\overrightarrow{P_0P_i}). \tag{8.5}$$

Tale f è iniettiva. Infatti se $\overrightarrow{f(A)} = \overrightarrow{f(B)}$, da (8.5) si ha che $\overrightarrow{Q_0f(A)} = \overrightarrow{Q_0f(B)}$. D'altra parte $\overrightarrow{Q_0f(A)} = \varphi(\overrightarrow{P_0A})$ e $\overrightarrow{Q_0f(B)} = \varphi(\overrightarrow{P_0B})$ e quindi $\varphi(\overrightarrow{P_0A}) = \varphi(\overrightarrow{P_0B})$ ed essendo φ un isomorfismo si ha che $\overrightarrow{P_0A} = \overrightarrow{P_0B}$ da cui segue che $A = B$. Inoltre f è suriettiva. Infatti per ogni $B \in \mathcal{A}$ se prendiamo $A = P_0 + \varphi^{-1}(\overrightarrow{Q_0B})$ si ha che $f(A) = B$. Dunque f è un'affinità. Da (8.5) si ha che $\overrightarrow{Q_0f(P_0)} = \varphi(\overrightarrow{P_0P_0}) = \vec{0}$ e quindi $f(P_0) = Q_0$. Inoltre $\overrightarrow{Q_0f(P_i)} = \varphi(\overrightarrow{P_0P_i}) = \overrightarrow{Q_0Q_i}$. \square

Esempio 8.2.13 Determinare l'affinità $f: \mathcal{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}^2(\mathbb{R})$ tale che i punti $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (0, 1)$ abbiamo come immagine i punti $Q_1 = (1, 1)$, $Q_2 = (2, 1)$, $Q_3 = (3, 2)$, rispettivamente.

Sia $X \in \mathcal{A}^2(\mathbb{R})$ e sia $Y = f(X)$. Se $X = (x, y)$ e $Y = (x', y')$ allora $Y = f(X) = AX + C$, ossia

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Poiché $f(0, 0) = (1, 1)$ ne segue che $c_1 = 1, c_2 = 1$. Da $f(1, 0) = (2, 1)$ ne segue che $2 = a + 1, 1 = c + 1$ e dunque $a = 1, c = 0$. Similmente si vede che $b = 2, d = 1$ e dunque

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le equazioni dell'affinità f sono

$$\begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

Proposizione 8.2.14 Sia $f: \mathcal{A}^2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{A}^2(\mathbb{K})$ un'affinità del piano avente tre punti fissi non allineati. Allora $f = id_{\mathcal{A}^2(\mathbb{K})}$.

Dimostrazione Siano $P, Q, R \in \mathcal{A}^2(\mathbb{K})$ tre punti non allineati. Allora i vettori \vec{PQ}, \vec{PR} sono linearmente indipendenti e quindi sono una base per \mathbb{K}^2 . Inoltre, essendo $P, Q, R \in \mathcal{A}^2(\mathbb{K})$ tre punti fissi ne segue che $\vec{PQ} = f(P)\vec{f(Q)}, \vec{PR} = f(P)\vec{f(R)}$. D'altra parte $f(P)\vec{f(Q)} = \varphi(\vec{PQ}), f(P)\vec{f(R)} = \varphi(\vec{PR})$ e quindi $\vec{PQ} = \varphi(\vec{PQ}), \vec{PR} = \varphi(\vec{PR})$, dove $\varphi: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ è l'isomorfismo associato a f . Poiché φ fissa i vettori di una base ne segue che $\varphi = id_{\mathbb{K}^2}$ e quindi $M_e(\varphi) = I_2$. Abbiamo visto in (8.3) che $f(X) = AX + C$, dove $A = M_e(\varphi)$ e $C = f(0)$. Poiché $A = M_e(\varphi) = I_2$ ne segue che $f(X) = X + C$ e inoltre da $P = f(P) = P + C$ ne segue che $C = 0$ e pertanto $f = id_{\mathcal{A}^2(\mathbb{K})}$. \square

Esempio 8.2.15 Determinare l'affinità $f: \mathcal{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}^2(\mathbb{R})$ tale che $f(-1, 1) = (-1, 1)$, $f(r) = r'$, e $f(s) = s'$, dove $r: 2x - y - 2 = 0$, $s: x + y - 1 = 0$, $r':$ asse delle y , $s':$ asse delle x .

Poiché $r' = f(r)$ e $s' = f(s)$ le rette r', s' hanno equazione $x' = 0, y' = 0$, rispettivamente. Inoltre da $f(r) = r'$ ne segue che $x' = k(2x - y - 2)$ e da $f(s) = s'$ ne segue che $y' = h(x + y - 1)$, per qualche $k, h \in \mathbb{K}$. Tali costanti sono determinate usando il fatto che $f(-1, 1) = (-1, 1)$ e quindi $-1 = k(-2 - 1 - 2), 1 = h(-1 + 1 - 1)$ e dunque $k = \frac{1}{5}, h = -1$.

Le equazioni dell'affinità f sono

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y - \frac{2}{5} \\ y' = -x - y + 1 \end{cases}$$

8.2.4 Esercizi

1. Determinare l'affinità $f : \mathcal{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}^2(\mathbb{R})$ tale che $f(1,3) = (1,1)$, $f(r) = r'$, e $f(s) = s$, dove $r : x = 0$, $s : 2x - y = 0$, $r' : x - 2y = 1$.
2. Determinare l'affinità $f : \mathcal{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}^2(\mathbb{R})$ che lascia fisso il punto $P = (1,1)$ e manda le rette $r_1 : x + y + 2 = 0$, $r_2 : 3x - y = 0$ rispettivamente nelle rette $s_1 : x - 2y = 0$, $s_2 : 2x + y - 1 = 0$. Determinare inoltre $Q \in \mathcal{A}^2(\mathbb{R})$ tale che $f(Q) = (2,1)$.
3. Determinare l'affinità $f : \mathcal{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}^2(\mathbb{R})$ che manda l'asse delle x nella retta $r : x - 2y = 0$, l'asse delle y nella retta $s : 2x + y = 2$ e il punto $P = (4,2)$ in $Q = (2,2)$. Determinare inoltre l'inversa di f .
4. In $\mathcal{A}^2(\mathbb{R})$ si consideri la retta $r : x + y = 1$.
 - (a) Determinare le equazioni delle affinità che fissano tutti i punti della retta r .
 - (b) Tra le affinità in (a) determinare, se esistono, quelle che mandano il punto $A = (1,3)$ nel punto $Q = (2,-2)$.
 - (c) Tra le affinità in (a) determinare, se esistono, quelle che sono traslazioni.
5. Sia $f : \mathcal{A}^3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}^3(\mathbb{R})$ l'affinità tale che $f((1,2,0)) = (2,-1,1)$, $f((1,3,1)) = (3,-1,0)$, $\varphi(e_1) = e_1 + e_3$, $\varphi(e_2) = e_1 - e_2$, dove φ è l'isomorfismo associato a f e l'insieme $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica di \mathbb{R}^3 .
 - (a) Determinare le equazioni di f .
 - (b) Trovare i punti fissi di f .
6. In $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r : y - 1 = 0$ e $s : x - 2 = 0$.
 - (a) Determinare tutte le affinità $f : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tali che $f(r) = s$ e $f(s) = r$.
 - (b) Dire se tra le affinità determinate in (a) esistono delle traslazioni.

8.3 Spazi Euclidei

Definizione 8.3.1 Uno spazio euclideo E è uno spazio affine sul cui spazio dei vettori associato V , è definito un prodotto scalare.

Definizione 8.3.2 (Riferimento ortonormale) Sia E uno spazio affine con spazio dei vettori associato V . Assegnare un riferimento ortonormale su E equivale ad assegnare un punto $O \in E$ e una base ortonormale $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V . $RO(O; v_1, \dots, v_n)$ è detto riferimento ortonormale.

Per ogni $P \in E$, $\vec{OP} \in V$ e dunque $\vec{OP} = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$. Il vettore \vec{OP} si identifica con la n -upla (x_1, \dots, x_n) e queste sono dette *coordinate ortonormali* del punto P .

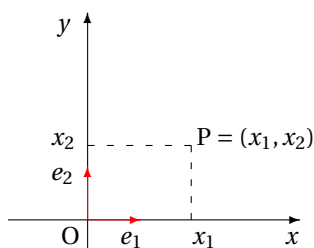


Figura 8.2: Riferimento ortonormale $RO(O; e_1, e_2)$

Per esempio nello spazio euclideo \mathbb{R}^2 , con riferimento ortonormale $RO(O; e_1, e_2)$, $\vec{OP} = x_1 e_1 + x_2 e_2$.

Definizione 8.3.3 Sia E uno spazio euclideo su cui è fissato un riferimento ortonormale $\mathcal{R}\mathcal{O}(O, e_1, \dots, e_n)$ e sia $f : E \rightarrow E$ un'affinità. Si dice che f è un'isometria se l'automorfismo $\varphi : V \rightarrow V$ associato a f è tale che $A = M_e(\varphi)$ è una matrice ortogonale.

Si ha quindi che $f : E \rightarrow E$ si esprime nella forma

$$f(X) = AX + c$$

con $c = f(O)$.

Proposizione 8.3.4 Sia E uno spazio euclideo con spazio dei vettori associato V . Se $f : E \rightarrow E$ è un'isometria allora per ogni $P, Q \in E$ si ha che

$$d(P, Q) = d(f(P), f(Q)) \tag{8.6}$$

ovvero se f è un'isometria allora essa conserva le distanze.

Dimostrazione Se f è un'isometria con automorfismo associato $\varphi : V \rightarrow V$. Sia $Q - P = (q_1 - p_1, \dots, q_n - p_n)$ allora $f(Q) - f(P) = A(Q - P) + c - (A(P - P) + c) = A(Q - P)$ da cui segue che

$$\begin{aligned} d(f(P), f(Q))^2 &= \| \vec{f(P)f(Q)} \|^2 = \| f(Q) - f(P) \|^2 = \| A(Q - P) \|^2 \\ &= \langle A(Q - P), A(Q - P) \rangle = {}^t(Q - P) {}^t A A(Q - P) \\ &= {}^t(Q - P)(Q - P) = \langle Q - P, Q - P \rangle = d(P, Q)^2 \end{aligned}$$

si è usato il fatto che la matrice A è ortogonale, ossia ${}^t A A = I_n$ e che quindi ${}^t(Q - P) {}^t A A(Q - P) = {}^t(Q - P)(Q - P)$. □

Definizione 8.3.5 Sia $f : E \rightarrow E$ un'isometria con automorfismo associato $\varphi : V \rightarrow V$ associato tale che $A = M_e(\varphi)$ è una matrice ortogonale, con e una base ortonormale. Allora f si dice isometria diretta se $\det(A) = 1$, si dice isometria inversa se $\det(A) = -1$

8.3.1 Isometrie del piano

Se $f : E \rightarrow E$ è un'isometria del piano allora la matrice A è della forma

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

se l'isometria è diretta e della forma

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

se l'isometria è inversa.

Capitolo 9

Coniche

I luoghi geometrici ottenuti intersecando un cono con un piano sono detti coniche e a seconda della posizione del piano rispetto al cono si hanno: ellissi, parabole o iperboli, o coniche degeneri.

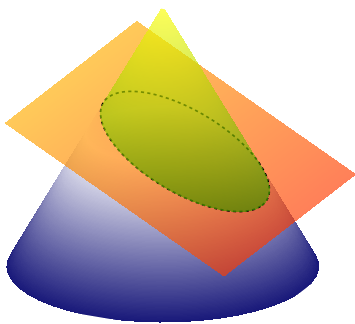


Figura 9.1: Sezione Conica: Ellisse

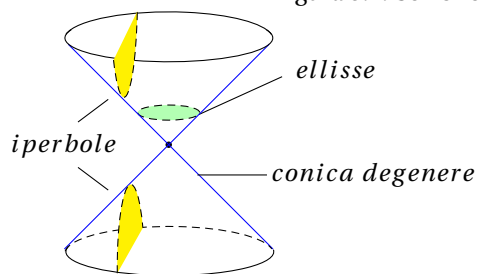


Figura 9.2: Sezioni Coniche

9.1 Equazione generale di una conica in \mathbb{R}^2

Consideriamo un polinomio di grado due a coefficienti reali nelle indeterminate x, y , sia esso

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} \quad (9.1)$$

con a_{11}, a_{22}, a_{12} non tutti nulli e indichiamo con C il luogo di zeri di tale polinomio ossia

$$\mathcal{C} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$$

C è detto *supporto* della conica definita da $F(x, y)$. Osserviamo che se $G(x, y) = kF(x, y)$ con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ il supporto della conica definita da $G(x, y)$ è lo stesso di quello definito da $F(x, y)$. Indichiamo con $[F(x, y)]$ la classe dei polinomi della forma $kF(x, y)$ con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$. Definiamo quindi una *conica* come la classe $[F(x, y)]$.

Osservazione 9.1.1 Osserviamo che se il polinomio $F(x, y)$ si fattorizza su \mathbb{R} come prodotto di due fattori lineari allora il supporto \mathcal{C} sarà dato o da due rette distinte se $F(x, y) = (ax + by + c)(lx + my + n)$, oppure sarà una retta doppia se $F(x, y) = (ax + by + c)^2$.

Osserviamo pure che il supporto di $F(x, y)$ potrebbe essere costituito da un solo punto, se per esempio $F(x, y) = x^2 + y^2$ allora $\mathcal{C} = \{(0, 0)\}$, oppure potrebbe essere l'insieme vuoto, se per esempio $F(x, y) = x^2 + y^2 + 1$.

Possiamo associare al polinomio $F(x, y)$ come in (9.1) la seguente matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

allora il polinomio $F(x, y)$ può essere scritto come

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}. \quad (9.3)$$

La matrice A è detta matrice associata alla conica \mathcal{C} .

Vorremmo trovare un modo per capire da (9.1) il tipo di conica. Vedremo che la matrice A contiene queste informazioni.

9.1.1 Classificazione affine e metrica di una conica

Vogliamo dare la classificazione delle coniche reali sia da un punto di vista affine che metrico. Per fare questo serve la nozione di coniche affinemente equivalente e di coniche congruenti.

Definizione 9.1.2 Una conica \mathcal{C} è detta affinemente equivalente (isometrica) a una conica \mathcal{C}' se esiste un'affinità (isometria) del piano f tale che $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$. Indichiamo con $[\mathcal{C}]_a$ la classe delle coniche affinemente equivalenti e indichiamo con $[\mathcal{C}]_m$ la classe delle coniche congruenti.

Sia quindi \mathcal{C} una conica reale di equazione

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0 \quad (9.4)$$

con a_{11}, a_{22}, a_{12} non tutti nulli. Come già visto, possiamo scrivere tale equazione in forma matriciale come

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0. \quad (9.5)$$

Consideriamo la seguente affinità (isometria) del piano

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + b_1 \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + b_2 \end{cases} \quad (9.6)$$

che possiamo anche scrivere in forma matriciale come

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = C_{00} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (9.7)$$

o anche

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & c_{11} & c_{12} \\ b_2 & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & & \\ b_2 & & C_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

da cui segue che

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x' & y' \end{pmatrix} {}^t C. \quad (9.8)$$

Se sostituiamo (9.8) in (9.5) si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & x' & y' \end{pmatrix} {}^t C A C \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = 0 \quad (9.9)$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & x' & y' \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = 0, \quad (9.10)$$

con $B = {}^t C A C$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} B = {}^t C A C &= \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_2 \\ 0 & & \\ 0 & & {}^t C_{00} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & & \\ b_2 & & C_{00} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{01} & & \\ b_{02} & & {}^t C_{00} A_{00} C_{00} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.11)$$

con

$$A_{00} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

la sottomatrice ottenuta da A sopprimendo prima riga e prima colonna. Ne segue che

$$B_{00} = {}^t C_{00} A_{00} C_{00} \tag{9.12}$$

dove B_{00} è la sottomatrice ottenuta da B sopprimendo prima riga e prima colonna.

9.1.2 Alcune proprietà metriche e affini delle coniche

Osserviamo che le matrici A e B come definite sopra hanno lo stesso rango. Esso è detto *rango della conica* e viene denotato con $rg(\mathcal{C})$.

Quindi il rango di una conica è una proprietà sia affine che metrica di una conica.

- Se $\det A = 0$ allora la conica \mathcal{C} è detta *degenere*. In tal caso se

$$\begin{cases} rg(A) = 2 & \mathcal{C} \text{ consiste di due rette distinte} \\ rg(A) = 1 & \mathcal{C} \text{ consiste di due rette coincidenti} \end{cases}$$

- Se $\det A \neq 0$ allora la conica \mathcal{C} è detta *non-degenere*.

Osserviamo pure che

$$B_{00} = {}^t C_{00} A_{00} C_{00} \tag{9.13}$$

da cui segue che il rango di A_{00} è uguale al rango di B_{00} e quindi esso è una proprietà affine (metrica) della conica.

La conica è detta

$$\begin{cases} \text{parabola} & \text{se } \det(A_{00}) = 0 \\ \text{a centro} & \text{se } \det(A_{00}) \neq 0 \end{cases}$$

Poiché $\det(B_{00}) = \det(A_{00})$ allora il segno del determinante di A_{00} è una proprietà metrica (affine) della conica.

Si ha che

$$\det A_{00} \begin{cases} > 0 & \text{ellisse} \\ < 0 & \text{iperbole} \end{cases}$$

Osservazione 9.1.3 Se la conica \mathcal{C} , definita da ${}^t X A X = 0$, con $X = (1, x, y)$, è una conica a centro, ovvero $\det(A_{00}) \neq 0$, per trovare le coordinate del centro basta fare l'intersezione delle seguenti due rette

$$\begin{cases} a_{01} + a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ a_{02} + a_{12}x + a_{22}y = 0 \end{cases} \tag{9.14}$$

Questa condizione puramente legata alla matrice associata alla conica, in realtà è una condizione di carattere geometrico. A tal scopo serve la nozione di piano ampliato (o anche piano proiettivo).

9.1.3 Complementi: Piano affine ampliato

Sia $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vogliamo associare a P una terna omogenea (x_0, x_1, x_2) e lo facciamo nel modo seguente: Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ con $x_0 \neq 0$. Poniamo $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$ allora al punto $P = (x, y)$ facciamo corrispondere la terna (x_0, x_1, x_2) con $x_0 \neq 0$. Alla terna $(0, x_1, x_2)$ non corrisponde alcun punto di \mathbb{R}^2 . In questo modo a \mathbb{R}^2 aggiungiamo dei punti e abbiamo così il piano ampliato che denotiamo con $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, o semplicemente \mathbb{P}^2 . I punti della forma $(0, x_1, x_2)$ sono detti punti all'infinito o anche punti impropri. Quindi dato $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ la terna omogenea ad esso associata è $(1, x, y)$. Viceversa data una terna omogenea (x_0, x_1, x_2) con $x_0 \neq 0$ gli associamo il punto di \mathbb{R}^2 di coordinate (x, y) dove $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$.

In \mathbb{R}^2 consideriamo una retta r con vettore direttore (l, m) e passante per $Q = (p, q)$ allora essa ha equazioni parametriche $r : \begin{cases} x = tl + p \\ y = tm + q \end{cases}$

Sia $P \in r$ allora $P = (tl + p, tm + q)$ e la terna omogenea ad esso associata è $(1, tl + p, tm + q)$ e tale terna per $t \neq 0$ è $(\frac{1}{t}, l + \frac{p}{t}, m + \frac{q}{t})$ e tale terna $(\frac{1}{t}, l + \frac{p}{t}, m + \frac{q}{t}) \rightarrow (0, l, m)$ per $t \rightarrow \infty$. Il punto $(0, l, m)$ è il punto all'infinito della retta r . Osserviamo che le ultime due coordinate di tale punto sono i parametri direttori della retta r e quindi tutte le rette parallele hanno lo stesso punto all'infinito.

Se la retta r in \mathbb{R}^2 ha equazione cartesiana $r : ax + by + c = 0$ la sua equazione omogenea in \mathbb{P}^2 è $ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0$ (essa è anche detta *chiusura proiettiva* di r).

Osserviamo che la retta di equazione omogenea $x_0 = 0$ è la retta all'infinito di \mathbb{P}^2 .

La conica \mathcal{C} in \mathbb{P}^2 ha equazione omogenea

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{00}x_0^2 = 0$$

I punti di intersezione di \mathcal{C} con la retta all'infinito sono dati dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{00}x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

e quindi si ha

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Poichè $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ possiamo supporre che sia $x_2 \neq 0$ e quindi abbiamo

$$a_{11}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + 2a_{12}\frac{x_1}{x_2} + a_{22} = 0$$

da cui segue che

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

Osserviamo che se

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \begin{cases} > 0 & \text{due soluzioni distinte, dunque 2 punti all'infinito (iperbole)} \\ < 0 & \text{nessuna soluzione reale, dunque non ha punti all'infinito (ellisse)} \\ = 0 & \text{due soluzioni coincidenti, dunque 1 punto all'infinito (parabola)} \end{cases}$$

Ma $\Delta = -\det(A_{00})$ e quindi

$$\det A_{00} = \begin{cases} > 0 & \text{ellisse} \\ < 0 & \text{iperbole} \\ = 0 & \text{parabola} \end{cases}$$

9.1.4 Forme canoniche affini di coniche reali

Vogliamo ora dare una classificazione affine delle coniche di \mathbb{R}^2 . Consideriamo quindi le classi di equivalenza di coniche rispetto all'azione delle affinità del piano. Due classi $[\mathcal{C}_1]_a$ e $[\mathcal{C}_2]_a$ sono dette distinte se preso un rappresentante di $[\mathcal{C}_1]_a$ e un rappresentante di $[\mathcal{C}_2]_a$ non esiste alcuna affinità f con $f(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$ e quindi $[\mathcal{C}_1]_a \cap [\mathcal{C}_2]_a = \emptyset$. L'insieme delle forme canoniche affini per le coniche di \mathbb{R}^2 è l'insieme dei rappresentanti per le classi distinte di equivalenza affine.

Teorema 9.1.4 *Ogni conica \mathcal{C} di \mathbb{R}^2 è affinementemente equivalente a una delle seguenti coniche di equazione:*

1. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ *ellisse*
- 1a. $x^2 + y^2 + 1 = 0$ *ellisse a punti non reali*
- 1b. $x^2 + y^2 = 0$ *ellisse degenera*
2. $x^2 - y^2 - 1 = 0$ *iperbole*
- 2a. $x^2 - y^2 = 0$ *iperbole degenera*
3. $y^2 - x = 0$ *parabola*
- 3a. $y^2 - 1 = 0$ *parabola degenera*
- 3b. $y^2 + 1 = 0$ *parabola degenera*
4. $y^2 = 0$ *conica doppiamente degenera*

Le coniche nella lista sono a due a due non affinementemente equivalenti.

Dimostrazione Supponiamo che \mathcal{C} abbia equazione (9.4). Per trasformare \mathcal{C} in una delle coniche date nella lista del teorema occorre fare una sostituzione (9.7) o un numero finito di esse. Nel primo passo vogliamo eliminare il termine misto di grado due, ovvero $2a_{12}xy$. Essendo A_{00} una matrice simmetrica reale è possibile trovare una base di \mathbb{R}^2 rispetto alla quale la matrice B_{00} sia diagonale e quindi la sostituzione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{9.15}$$

trasforma l'equazione (9.4) in (9.10) con B_{00} diagonale, quindi possiamo supporre che $a_{12} = 0$ e pertanto dopo tale trasformazione la conica \mathcal{C} ha equazione

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0 \quad (9.16)$$

Osserviamo che \mathcal{C} è a centro se e solo se $a_{11}a_{22} \neq 0$.

Nel secondo passo vogliamo **eliminare i termini lineari**.

Consideriamo dapprima il caso di conica a centro. Con la traslazione

$$\begin{aligned} x &= x' - \frac{a_{01}}{a_{11}} \\ y &= y' - \frac{a_{02}}{a_{22}} \end{aligned} \quad (9.17)$$

l'equazione (9.16) si trasforma in

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + d_{00} = 0 \quad (9.18)$$

per un opportuno $d_{00} \in \mathbb{R}$.

Se la conica non è a centro, possiamo supporre, a meno di scambiare tra loro x', y' , che $a_{11} = 0$ e $a_{22} \neq 0$. Con la traslazione

$$\begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' - \frac{a_{02}}{a_{22}} \end{aligned} \quad (9.19)$$

l'equazione (9.16) si trasforma in

$$a_{22}y'^2 + 2a_{01}x' + d_{00} = 0 \quad (9.20)$$

per un opportuno $d_{00} \in \mathbb{R}$.

Se $a_{01} = 0$ si ottiene l'equazione

$$a_{22}y'^2 + d_{00} = 0 \quad (9.21)$$

Se $a_{01} \neq 0$ si considera la seguente traslazione

$$\begin{aligned} x' &= x'' - \frac{d_{00}}{2a_{01}} \\ y' &= y'' \end{aligned} \quad (9.22)$$

e si ottiene l'equazione

$$a_{22}y''^2 + 2a_{01}x'' = 0 \quad (9.23)$$

L'altro passo sarà quello di **normalizzare i coefficienti**.

Se \mathcal{C} è una conica a centro allora \mathcal{C} è stata trasformata in (9.18). Se il coefficiente d_{00} è diverso da zero possiamo supporre che esso sia $d_{00} = -1$ (a meno di moltiplicare (9.18) per $-d_{00}^{-1}$) e fare la sostituzione

$$\begin{aligned} x' &= \frac{X}{\sqrt{|a_{11}|}} \\ y' &= \frac{Y}{\sqrt{|a_{22}|}} \end{aligned} \quad (9.24)$$

e si riduce a una delle prime cinque equazioni nella lista. Se la conica non è a centro e \mathcal{C} è stata trasformata in (9.20) possiamo supporre che $d_{00} = 0$ oppure $d_{00} = -1$ e fare la sostituzione

$$\begin{aligned} x' &= X \\ y' &= \frac{Y}{\sqrt{a_{22}}} \end{aligned} \quad (9.25)$$

e la conica si riduce a una delle ultime tre equazioni nella lista.

Se la conica non è a centro e \mathcal{C} è stata trasformata in (9.23) possiamo supporre che $a_{22} > 0$. Essa viene trasformata nella sesta equazione con la sostituzione

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{X}{\sqrt{2a_{01}}} \\ y'' &= \frac{Y}{\sqrt{a_{22}}} \end{aligned} \quad (9.26)$$

□

9.1.5 Forme canoniche metriche di coniche reali

Nel piano euclideo \mathbb{R}^2 consideriamo le classi di equivalenza di coniche rispetto all'azione delle isometrie del piano. Vale il seguente teorema.

Teorema 9.1.5 *Ogni conica dello spazio euclideo \mathbb{R}^2 è congruente a una delle seguenti coniche di equazione:*

$$1. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (a \geq b > 0) \quad \text{ellisse}$$

$$1a. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \quad (a \geq b > 0) \quad \text{ellisse a punti non reali}$$

$$1b. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (a \geq b > 0) \quad \text{ellisse degenera}$$

$$2. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (a > 0, b > 0) \quad \text{iperbole}$$

$$2a. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (a \geq b > 0) \quad \text{iperbole degenera}$$

$$3. y^2 - 2px = 0 \quad (p > 0) \quad \text{parabola}$$

$$3a. y^2 - a^2 = 0 \quad (a \geq 0) \quad \text{parabola degenera}$$

$$3b. y^2 + a^2 = 0 \quad (a > 0) \quad \text{parabola degenera}$$

$$4. y^2 = 0 \quad \text{conica doppiamente degenera}$$

Le coniche nella lista sono a due a due non congruenti.

Osservazione 9.1.6 Nel caso di coniche generale del Tipo 1., 2. e 3. facciamo le seguenti osservazioni

- Sia \mathcal{C} una conica di Tipo 1., ovvero \mathcal{C} è un' ellisse. Se $a = b$ allora la conica è una circonferenza di centro l'origine e raggio 1. In generale si vede che l'intersezione di \mathcal{C} con gli assi coordinati danno i punti $(\pm a, 0)$ e $(0, \pm b)$ detti *vertici* dell'ellisse. Poichè siamo nel caso $a \geq b > 0$, consideriamo lo scalare $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. I punti di coordinate $(\pm c, 0)$ sono detti *fuochi* dell'ellisse. Il numero $e = \frac{c}{a}$ è detto *eccentricità* dell'ellisse. Osserviamo che $0 \leq e < 1$. Si ha che $e = 0$ se e solo se \mathcal{C} è una circonferenza.

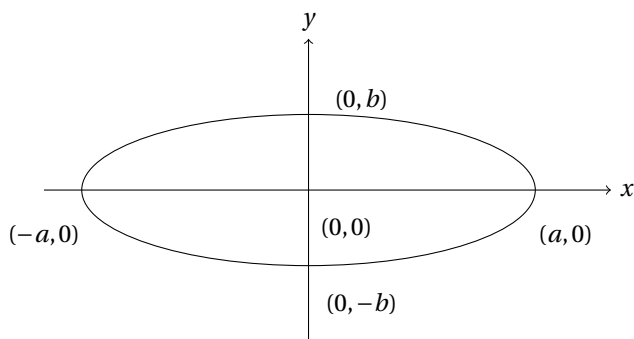


Figura 9.3: Ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $a \geq b > 0$

- Sia \mathcal{C} una conica di Tipo 2., ovvero \mathcal{C} è un' iperbole. Se $a = b$ allora l'iperbole è detta equilatera.

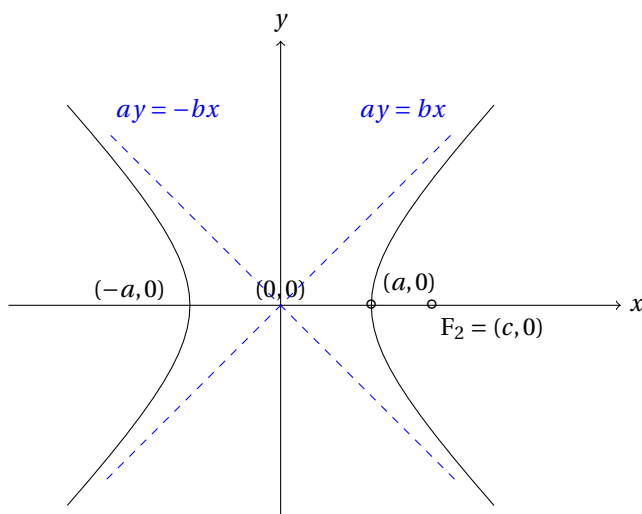


Figura 9.4: Iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0, b > 0$

In generale si vede che l'intersezione di \mathcal{C} con l'asse coordinato $y = 0$ da i punti $(\pm a, 0)$, detti *vertici* dell'iperbole. Sia $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. I punti di coordina-

te $(\pm c, 0)$ sono detti *fuochi* dell'iperbole. Il numero $e = \frac{c}{a}$ è detto *eccentricità* dell'iperbole. Osserviamo che $e > 1$.

Le rette di equazione $ay = \pm bx$ sono dette *asintoti* dell'iperbole. Osserviamo che per valori di $|x| \gg 0$ l'iperbole si avvicina sempre più a queste due rette. Infatti da $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ segue che $b^2x^2 - a^2b^2 = a^2y^2$ e quindi $ay = \pm \sqrt{b^2x^2 - a^2b^2}$.

Se $y > 0$ allora $ay = \sqrt{b^2x^2 - a^2b^2}$.

Consideriamo $ay - b|x| = \sqrt{b^2x^2 - a^2b^2} - b|x|$.

Moltiplico e divido ambo i membri per $\sqrt{b^2x^2 - a^2b^2} + b|x|$ si ha quindi

$$ay - b|x| = -\frac{a^2b^2}{\sqrt{b^2x^2 - a^2b^2} + b|x|}$$

e quest'ultima quantità diventa sempre più piccola per $|x| \gg 0$.

- Sia \mathcal{C} una conica di Tipo 3., ovvero \mathcal{C} è una parabola. Poichè il termine quadratico è in x allora la parabola è simmetrica rispetto all'asse $x = 0$, detto anche asse di simmetria. Tale asse incontra la parabola nell'origine. Esso è detto vertice della parabola. L'eccentricità della parabola è $e = 1$.

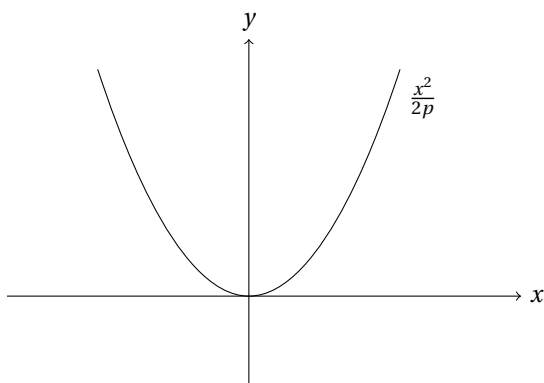


Figura 9.5: Parabola di equazione $x^2 - 2py = 0$

9.1.6 Invarianti ortogonali di una conica non degenera

Sia \mathcal{C} una conica non degenera nello spazio euclideo \mathbb{R}^2 e sia ${}^tXAX = 0$ la sua equazione.

Vedremo quali sono gli invarianti di una conica non degenera per trasformazioni ortogonali del piano, ovvero isometrie. Scriviamo l'equazione di \mathcal{C} , come

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Lemma 9.1.7 $\det A, \det A_{00}, tr A_{00}$ sono invarianti per trasformazioni ortogonali del piano, ovvero isometrie del piano, dove $A_{00} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ è la sottomatrice ottenuta da A sopprimendo prima riga e prima colonna.

Dimostrazione Sia

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + b_1 \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + b_2 \end{cases} \quad (9.27)$$

un'isometria piana che possiamo anche scrivere in forma matriciale come

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = C_{00} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (9.28)$$

con C_{00} matrice ortogonale. Dopo tale cambio di coordinate la \mathcal{C} avrà equazione

$$\mathcal{C} : (1 \quad x' \quad y')^t C A C \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = 0 \quad (9.29)$$

con

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & c_{11} & c_{12} \\ b_2 & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} {}^t C A C &= \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_2 \\ 0 & & {}^t C_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & & A_{00} \\ a_{02} & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & & \\ b_2 & & C_{00} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{01} & & \\ b_{02} & & {}^t C_{00} A_{00} C_{00} \end{pmatrix} = B \end{aligned}$$

Ne segue che

$$B_{00} = {}^t C_{00} A_{00} C_{00} \quad (9.30)$$

dove B_{00} è la sottomatrice ottenuta da B sopprimendo prima riga e prima colonna.

Osserviamo che $\det(B) = \det({}^t C A C) = \det({}^t C) \det(A) \det(C) = \det(C)^2 \det(A) = \det(A)$ poichè $\det C = \det C_{00} = \pm 1$ essendo C_{00} una matrice ortogonale. Inoltre essendo B_{00} simile a A_{00} allora $\det A_{00} = \det B_{00}$, e $tr A_{00} = tr B_{00}$. \square

Osservazione 9.1.8 La matrice A_{00} è una matrice simmetrica reale, allora essa è diagonalizzabile tramite una matrice ortogonale. Siano λ_1, λ_2 autovalori di A_{00} , $\{v_1, v_2\}$

una base ortonormale di autovettori e sia G la matrice i cui vettori colonna sono v_1, v_2 . Allora la matrice simile (congruente) a A_{00} è la matrice

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Se λ_1, λ_2 sono tali che

$$\begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 > 0 & \mathcal{C} \text{ è un'ellisse} \\ \lambda_1 \lambda_2 < 0 & \mathcal{C} \text{ è un'iperbole} \\ \lambda_1 \lambda_2 = 0 & \mathcal{C} \text{ è una parabola} \end{cases}$$

• Se la conica è a centro allora le rette passanti per il centro della conica e con vettori direttori gli autovettori v_1, v_2 (che sono ortogonali tra loro) sono detti *assi* delle conica.

Se (x, y) sono le coordinate rispetto alla base canonica e (x', y') sono le coordinate rispetto alla base v_1, v_2 allora la trasformazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{9.31}$$

è la trasformazione che manda gli assi coordinati del piano euclideo negli assi della conica. Tale trasformazione può anche essere scritta come

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Da qui segue che

$$\begin{aligned} {}^tXAX &= (1 \ x' \ y') {}^tMAM \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= (1 \ x' \ y') \begin{pmatrix} a'_{00} & a'_{01} & a'_{02} \\ a'_{01} & & \\ a'_{02} & & {}^tGA_{00}G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= (1 \ x' \ y') \begin{pmatrix} a'_{00} & a'_{01} & a'_{02} \\ a'_{01} & & \\ a'_{02} & & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= (1 \ x' \ y') \begin{pmatrix} a'_{00} & a'_{01} & a'_{02} \\ a'_{01} & \lambda_1 & 0 \\ a'_{02} & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

E quindi dopo la trasformazione l'equazione di \mathcal{C} è

$$\mathcal{C} : \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{01}x' + 2a'_{02}y' + a'_{00} = 0$$

Consideriamo la nuova trasformazione

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + \frac{a'_{01}}{\lambda_1} \\ y' + \frac{a'_{02}}{\lambda_2} \end{pmatrix} \quad (9.32)$$

ovvero portiamo l'intersezione degli assi x', y' (che è uguale all'intersezione degli assi x, y) nel centro della conica $C = (-\frac{a'_{01}}{\lambda_1}, -\frac{a'_{02}}{\lambda_2})$. Dopo tale trasformazione l'equazione di \mathcal{C} è

$$\alpha z_1^2 + \beta z_2^2 + \gamma = 0$$

Nel caso di ellisse o iperbole, la matrice B è

$$B = \begin{pmatrix} b_{00} & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 \\ 0 & 0 & b_{22} \end{pmatrix}$$

• Se la conica è una parabola allora o $\lambda_1 = 0$ oppure $\lambda_2 = 0$. Poichè la forma canonica della parabola è

$$\mathcal{C} : b_{22}y'^2 + 2b_{01}x' = 0 \quad (9.33)$$

la matrice B in questo caso è

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{01} & 0 \\ b_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{22} \end{pmatrix}$$

o anche

$$\mathcal{C} : b_{11}x'^2 + 2b_{02}y' = 0 \quad (9.34)$$

la matrice B in questo caso è

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{02} \\ 0 & b_{11} & 0 \\ b_{02} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 9.1.9 (1) Si considerino le seguenti coniche

a) $x^2 + y^2 + xy + x + y - 1 = 0$

b) $3x^2 - 3y^2 - 8xy + 10 = 0$

c) $9x^2 + 16y^2 + 24xy - 40x + 30y = 0$

(i) Dire se la conica è a centro oppure no.

(ii) Nel caso sia a centro determinare le coordinate del centro.

(iii) Determinare un'isometria che trasforma la conica nella forma canonica e determinare la forma canonica.

(2) Determinare la forma canonica e l'isometria che trasforma \mathcal{C} in forma canonica

a) $6y^2 + 8xy - 8x + 4y - 3 = 0$

b) $4xy + 4x - 64y + 1 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 2xy - 3x - 5y = 0$

Soluzione (Esercizio (1)) **a)** La matrice associata alla conica è $A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

(i) $\det A = -1$ e quindi la conica è non degenera. Osserviamo che $\det A_{00} = \frac{3}{4}$, dunque la conica è a centro ed essa è un'ellisse.

(ii) Per determinare le coordinate del centro basta fare l'intersezione delle rette $a_{01} + a_{11}x + a_{12}y = 0$ e $a_{02} + a_{12}x + a_{22}y = 0$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + x + \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + y = 0 \end{cases}$$

Il punto d'intersezione $C = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ è il centro della conica.

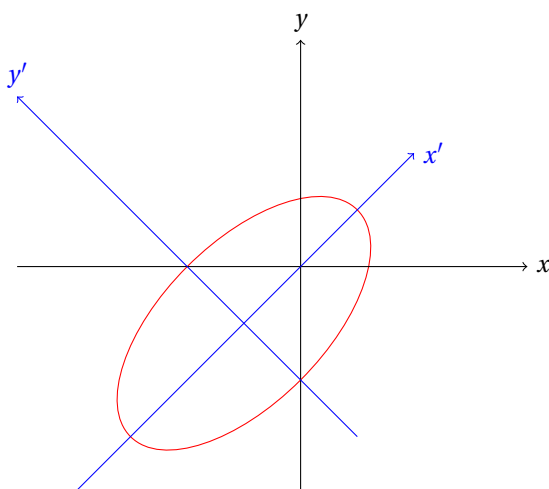


Figura 9.6: Ellisse di equazione $x^2 + y^2 + xy + x + y - 1 = 0$

(iii) Utilizziamo gli invarianti ortogonali per determinare una forma canonica di \mathcal{C} . Poichè la conica è a centro allora la matrice

$$B = \begin{pmatrix} b_{00} & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 \\ 0 & 0 & b_{22} \end{pmatrix}$$

Sappiamo che

$$\det A = \det B; \quad \det A_{00} = \det B_{00}; \quad tr A_{00} = tr B_{00}.$$

Nel nostro caso

$$\det A = -1 = b_{00} b_{11} b_{22}$$

$$\det A_{00} = \frac{3}{4} = \det B_{00} = b_{11} b_{22}$$

$$\operatorname{tr} A_{00} = 2 = \operatorname{tr} B_{00} = b_{11} + b_{22}.$$

Si ha quindi che $b_{00} = \frac{-1}{b_{11} b_{22}} = -\frac{4}{3}$.

Poichè $b_{11} + b_{22} = 2$ e $\frac{3}{4} = b_{11} b_{22}$ allora

$$\frac{3}{4} = b_{11}(2 - b_{11}) = 2b_{11} - b_{11}^2$$

da cui segue che $b_{11} = \frac{3}{2}$ oppure $b_{11} = \frac{1}{2}$ e quindi $b_{22} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ oppure $b_{22} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Allora \mathcal{C} ha le seguenti forme canoniche

$$-\frac{4}{3} + \frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 0$$

oppure

$$-\frac{4}{3} + \frac{1}{2}x'^2 + \frac{3}{2}y'^2 = 0$$

Per determinare un'isometria determiniamo gli autovalori della matrice

$$A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A_{00} è $p_{A_{00}}(\lambda) = \det A_{00} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - \frac{1}{4} = (\frac{1}{2} - \lambda)(\frac{3}{2} - \lambda)$. Gli autovalori sono $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{3}{2}$. L'autovettore relativo a $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ è $v_1 = (1, -1)$ e l'autovettore relativo a $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ è $v_2 = (1, 1)$. La base ortonormale è $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $u_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Dunque l'isometria è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (9.35)$$

Se sostituiamo (9.35) nell'equazione di \mathcal{C} si ottiene

$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{3}{2}y'^2 - \frac{4}{3} = 0.$$

b) La matrice associata alla conica è

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

(i) $\det A = -250$ e quindi la conica è non degenere. Osserviamo che $\det A_{00} = -25$, dunque la conica è a centro ed essa è un'iperbole.

(ii) Per determinare le coordinate del centro basta fare l'intersezione delle rette $a_{01} + a_{11}x + a_{12}y = 0$ e $a_{02} + a_{12}x + a_{22}y = 0$

$$\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}$$

Il punto d'intersezione $C = (0, 0)$ è il centro della conica.

(iii) Utilizziamo gli invarianti ortogonali per determinare una forma canonica di \mathcal{C} .

Poichè la conica è a centro allora la matrice

$$B = \begin{pmatrix} b_{00} & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 \\ 0 & 0 & b_{22} \end{pmatrix}$$

Sappiamo che

$$\det A = \det B; \quad \det A_{00} = \det B_{00}; \quad tr A_{00} = tr B_{00}.$$

Nel nostro caso

$$\det A = -250 = b_{00} b_{11} b_{22}$$

$$\det A_{00} = -25 = \det B_{00} = b_{11} b_{22}$$

$$tr A_{00} = 0 = tr B_{00} = b_{11} + b_{22}.$$

Si ha quindi che $b_{00} = \frac{-250}{b_{11} b_{22}} = -\frac{-250}{-25} = 10$.

Poichè $b_{11} + b_{22} = 0$ e $-25 = b_{11} b_{22}$ allora

$$-25 = b_{11}(-b_{11}) = -b_{11}^2$$

da cui segue che $b_{11} = \pm 5$ e quindi $b_{22} = \mp 5$ Allora \mathcal{C} ha le seguenti forme canoniche

$$10 + 5x'^2 - 5y'^2 = 0$$

oppure

$$10 - 5x'^2 + 5y'^2 = 0$$

Notiamo che gli autovalori di

$$A_{00} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -5$. L'autovettore relativo a $\lambda_1 = 5$ è $v_1 = (-2, 1)$ e l'autovettore relativo a $\lambda_2 = -5$ è $v_2 = (1, 2)$. La base ortonormale è $u_1 = (\frac{-21}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{52}})$, $u_2 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$. Dunque l'isometria è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{9.36}$$

Se sostituiamo (9.36) nell'equazione di \mathcal{C} si ottiene

$$5x'^2 - 5y'^2 + 10 = 0$$

o anche

$$\frac{y'^2}{2} - \frac{x'^2}{2} = 1$$

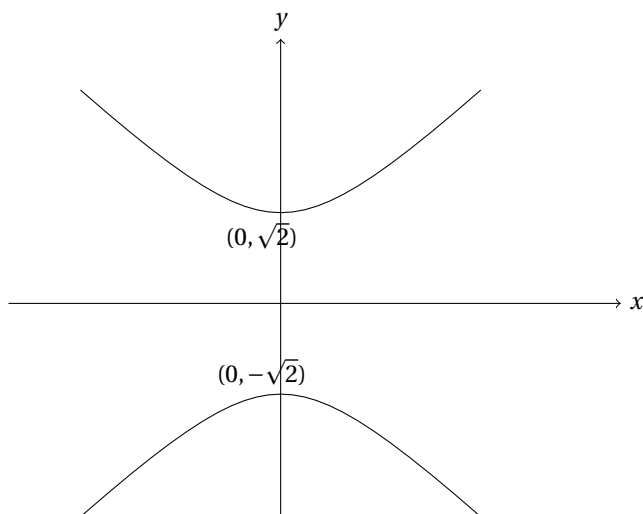


Figura 9.7: Iperbole di equazione $-\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 1$

c) La matrice associata alla conica è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -20 & 15 \\ -20 & 9 & 12 \\ 15 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

(i) $\det A = -15625$ e quindi la conica è non degenera. Osserviamo che $\det A_{00} = 0$ e dunque la conica è una *parabola*.

(iii) Poichè la forma canonica di \mathcal{C} è $a'_{22}y'^2 + 2a'_{01}x' = 0$ e

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{01} & 0 \\ b_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{22} \end{pmatrix}$$

Sappiamo che

$$\det A = \det B; \quad tr A_{00} = tr B_{00}.$$

Nel nostro caso

$$\det A = -15625 = -b_{01}^2 b_{22}$$

$$tr A_{00} = 25 = tr B_{00} = b_{22}.$$

Si ha quindi che $b_{01}^2 = \frac{15625}{25} = 625$, allora $b_{01} = \pm 25$.

Allora \mathcal{C} ha le seguenti forme canoniche

$$25y'^2 \pm 50x' = 0$$

ovvero

$$y'^2 \pm 2x' = 0$$

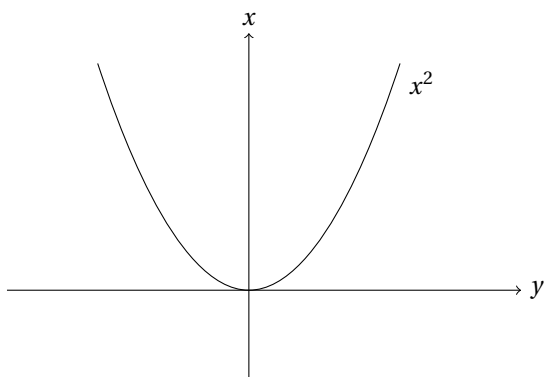


Figura 9.8: Parabola di equazione $y = x^2$

9.1.7 Conica come luogo geometrico: eccentricità

Pensiamo alla conica come la traiettoria di un punto che si muove in un piano in modo che resti costante il rapporto della sua distanza da un punto fisso e da una retta fissa. Questo rapporto costante si chiama *eccentricità* della conica e viene indicata con e .

Abbiamo visto che

$$\begin{cases} 0 < e < 1 & \text{ellisse} \\ e > 1 & \text{iperbole} \\ e = 1 & \text{parabola} \end{cases}$$

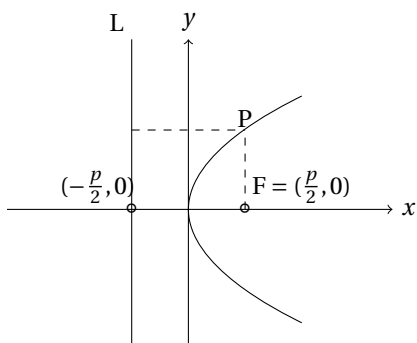


Figura 9.9: Parabola, eccentricità $e = 1$

9.2 Equazioni di coniche con date condizioni

Vogliamo dare una costruzione esplicita di coniche con date condizioni. Siano \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 due coniche distinte e non degeneri. Siano ${}^tXAX = 0$ e ${}^tXBX = 0$, le equazioni di \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 , rispettivamente, e sia

$$\mathcal{C}_\lambda = \mathcal{C}_1 + \lambda\mathcal{C}_2 : {}^tX(A + \lambda B)X = 0 \tag{9.37}$$

il fascio di coniche individuato da \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 .

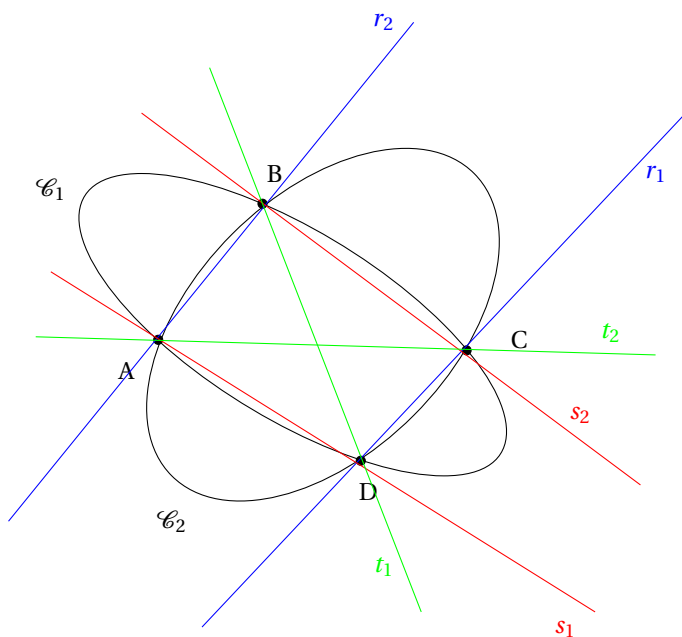


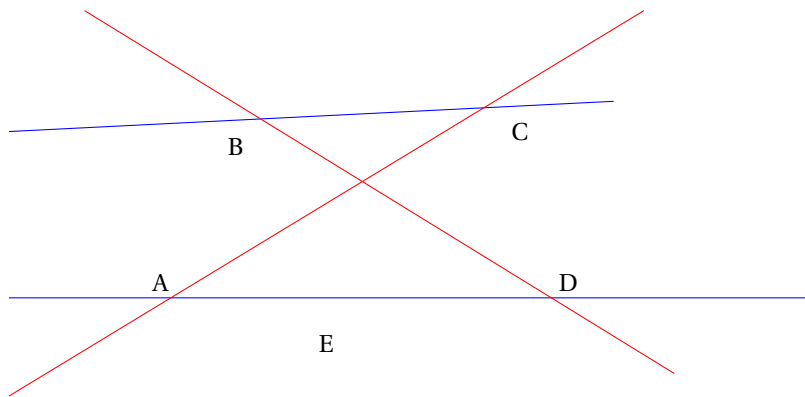
Figura 9.10: r_1r_2 , s_1s_2 , t_1t_2 , coniche degeneri del fascio individuato da \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2

Osservazione 9.2.1 Il fascio \mathcal{C}_λ contiene tre coniche degeneri. Infatti \mathcal{C}_λ è degenera se $\det(A + \lambda B) = 0$, ma $\det(A + \lambda B) = 0$ è un polinomio in λ di grado 3 e quindi si hanno tre coniche degeneri, quelle corrispondenti ai valori di λ che sono radici di $\det(A + \lambda B) = 0$.

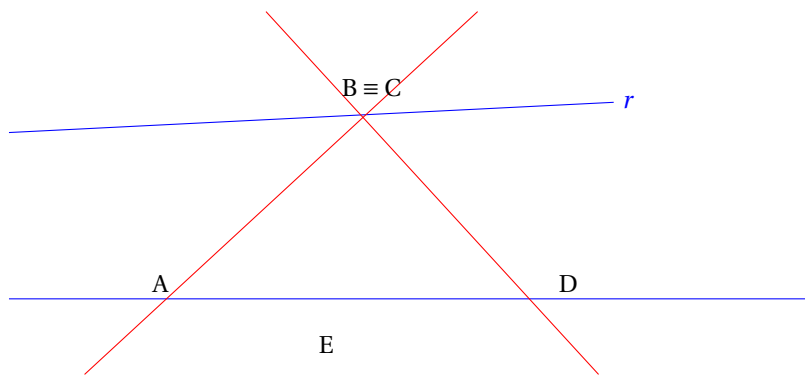
Osservazione 9.2.2 Se le coniche \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 sono generiche allora la loro intersezione $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{A, B, C, D\}$. Tali punti sono detti *punti base del fascio*. Tutte le coniche del fascio passano per tali punti e vi sono tra queste tre coniche degeneri, riducibili a coppie di rette. Ciascuna conica riducibile dovendo passare per i quattro punti base del fascio dovrà essere costituita dai lati opposti del quadrangolo ABCD

9.2.1 Coniche con date condizioni col metodo del fascio

1. Se vogliamo una conica per 5 punti A, B, C, D, E si considera il fascio di coniche $\mathcal{C}_1 + \lambda \mathcal{C}_2$ con $\mathcal{C}_1 = (AD)(BC)$ e $\mathcal{C}_2 = (AC)(BD)$ e poi si impone il passaggio per il punto E.



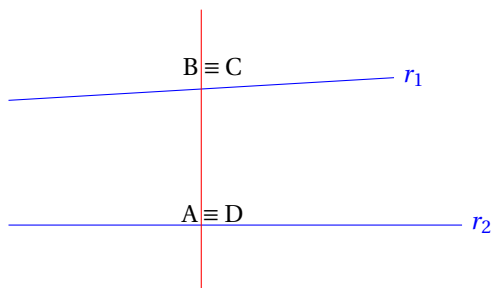
2. Se $B = C$ consideriamo una retta r per B e non passante né per A né per D e si considera il fascio di coniche $\mathcal{C}_\lambda = \mathcal{C}_1 + \lambda \mathcal{C}_2$ con $\mathcal{C}_1 = r(AD)$ e $\mathcal{C}_2 = (AC)(BD)$.



Esempio 9.2.3 Scrivere l'equazione della conica passante per $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,1)$, e tangente in $P = (2,2)$ alla retta di equazione $x + y - 4 = 0$.

Soluzione Si considerano le seguenti coniche degeneri $\mathcal{C}_1 : (CP)(BP)$ e $\mathcal{C}_2 : (CB)(x + y - 4)$. Osserviamo che $CP : x - 2y + 2 = 0$, $BP : 2x - y - 2 = 0$ e $CB : x + y - 1 = 0$. Quindi il fascio $\mathcal{C}_\lambda = \mathcal{C}_1 + \lambda \mathcal{C}_2 = (x - 2y + 2)(2x - y - 2) + \lambda(x + y - 1)(x + y - 4)$. Imponiamo il passaggio per il punto $A = (0,0)$ e si ottiene $\lambda = 1$ e dunque la conica cercata è $\mathcal{C} : 3x^2 + 3y^2 - 3xy - 3x - 3y = 0$.

3. Se $B \equiv C$ e se $A \equiv D$ consideriamo una retta r_1 per B e non passante per A e una retta r_2 per A e non passante per B ; il fascio di coniche $\mathcal{C}_\lambda = \mathcal{C}_1 + \lambda \mathcal{C}_2$ con $\mathcal{C}_1 = r_1 r_2$ e $\mathcal{C}_2 = (AB)^2$.



9.3 Coniche nel piano proiettivo

Sia \mathcal{C} una conica in \mathbb{R}^2 di equazione

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0 \tag{9.38}$$

con a_{11}, a_{22}, a_{12} non tutti nulli. Sia (x_0, x_1, x_2) la terna omogenea associata a (x, y) , quindi stiamo assumendo $x_0 \neq 0$ e $x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}$. Si ha che l'equazione di \mathcal{C} nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (piano ampliato) è

$$a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 = 0 \tag{9.39}$$

Possiamo anche scrivere tale equazione in forma matriciale come

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{9.40}$$

Se $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ allora

$$\mathcal{C}: {}^tXAX = 0$$

9.3.1 Polarità definita da una conica

Sia \mathcal{C} una conica non degenera di equazione ${}^tXAX = 0$.

• Sia $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con P esterno alla conica. Si definisce *polare* del punto P rispetto alla conica \mathcal{C} la retta p così definita:

$$p: {}^tPAX = 0 \tag{9.41}$$

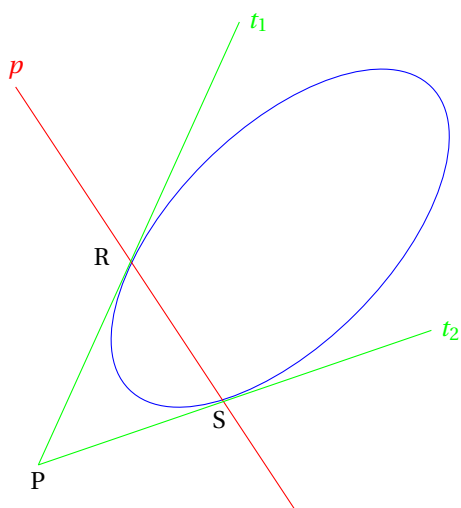


Figura 9.11: p: polare di P rispetto a \mathcal{C}

Indichiamo con t_1 e t_2 le rette per P e tangenti alla conica e siano R e S i rispettivi punti di tangenza. Se $P = (y_0, y_1, y_2) = Y$, $R = (z_0, z_1, z_2) = Z$, $S = (z'_0, z'_1, z'_2) = Z'$ allora le rette tangenti t_1 e t_2 hanno equazioni:

$$t_1 : \lambda Y + \mu Z \text{ e}$$

$$t_2 : \lambda Y + \mu Z' .$$

Determiniamo l' intersezione di t_1 con \mathcal{C} :

$${}^t(\lambda Y + \mu Z)A(\lambda Y + \mu Z) = 0$$

ovvero

$$\lambda^2 {}^tYAY + 2\lambda\mu {}^tYAZ + \mu^2 {}^tZAZ = 0 \tag{9.42}$$

Il punto $R = (z_0, z_1, z_2) = Z \in \mathcal{C}$ allora ${}^tZAZ = 0$ e dunque (9.42) diventa

$$\lambda^2 {}^tYAY + 2\lambda\mu {}^tYAZ = 0$$

e sappiamo che ${}^tYAY \neq 0$ poichè $P = Y \notin \mathcal{C}$. Inoltre essendo la retta t_1 tangente a \mathcal{C} allora l'equazione

$$\lambda^2 {}^tYAY + 2\lambda\mu {}^tYAZ = 0$$

deve avere due soluzioni coincidenti e quindi ${}^tYAZ = 0$. Ma ${}^tYAZ = 0$ dice che il punto Z appartiene alla retta di equazione ${}^tYAX = 0$, ovvero ${}^tPAX = 0$ e quindi

$${}^tPAX = 0 : \left(\sum_{i=0}^2 a_{i0} y_i\right) x_0 + \left(\sum_{i=0}^2 a_{i1} y_i\right) x_1 + \left(\sum_{i=0}^2 a_{i2} y_i\right) x_2 = 0 \tag{9.43}$$

Se facciamo lo stesso per la retta t_2 si ha che $S = (z'_0, z'_1, z'_2) = Z'$ appartiene alla retta (9.43) e quindi la retta (9.43) passa per R e S e dunque essa è l'equazione della retta polare del punto P rispetto alla conica \mathcal{C} .

• Sia $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con $P \in \mathcal{C}$. Allora la polare di P rispetto a \mathcal{C} è la retta tangente alla conica nel punto P e pertanto ha equazione

$${}^tPAX = 0 \tag{9.44}$$

Infatti poichè $P \in \mathcal{C}$ allora ${}^tPAP = 0$ e quindi soddisfa l'equazione (9.44).

Sia $X : \lambda P + \nu P'$ l'equazione parametrica delle retta per P con $P \neq P'$. Le intersezioni di tale retta con la conica \mathcal{C} sono date da

$${}^t(\lambda P + \nu P')A(\lambda P + \nu P') = 0$$

ovvero

$$\lambda^2 {}^tPAP + 2\lambda\nu {}^tPAP' + \nu^2 {}^tP'AP' = 0$$

Affinchè la retta $X : \lambda P + \nu P'$ sia tangente a \mathcal{C} in P deve aversi che ${}^tP'AP' = 0$ e quindi la retta tangente a \mathcal{C} in P ha equazione ${}^tPAX = 0$.

Teorema 9.3.1 (di reciprocità) Sia \mathcal{C} una conica non degenera contenuta in \mathbb{P}^2 . Siano $P, Q \in \mathbb{P}^2$ e siano p e q le rispettive polari rispetto alla conica \mathcal{C} . Si ha che

$$P \in q \text{ se e solo se } Q \in p.$$

Dimostrazione La retta q ha equazione ${}^tQAX = 0$ e la retta p ha equazione ${}^tPAX = 0$. Poichè $P \in q$ allora ${}^tQAP = 0$. Essendo la matrice A simmetrica si ha che ${}^tQAP = 0$ è lo stesso che ${}^tPAQ = 0$ e questo dice che $Q \in p$.

Definizione 9.3.2 Sia \mathcal{C} una conica non degenera contenuta in \mathbb{P}^2 . Siano $P, Q \in \mathbb{P}^2$ e siano p e q le rispettive polari rispetto alla conica \mathcal{C} . I punti P, Q si dicono coniugati rispetto a \mathcal{C} se $Q \in p$ e quindi $P \in q$.

• Sia $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con P interno alla conica. Allora la polare p di P rispetto a \mathcal{C} è la retta passante per P_1 e P_2 , vedi fig. 9.12. Infatti osserviamo che r_1 è la polare di P_1 e r_2 è la polare di P_2 e il punto P appartiene sia a r_1 che a r_2 . Dal teorema di reciprocità ne segue che $P_1 \in p$ e $P_2 \in p$.

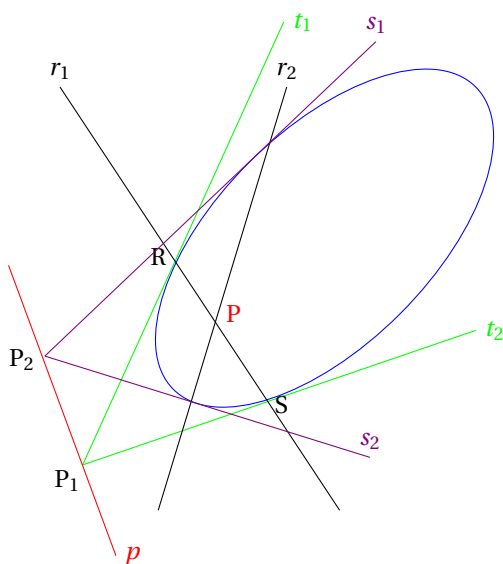


Figura 9.12: p : polare di P rispetto a \mathcal{C}

Esempio 9.3.3 Determinare l'equazione della polare di $P = (-2, 3)$ rispetto alla conica di equazione $x^2 + 2y^2 - 2xy + 2y - 1 = 0$.

La matrice associata alla conica è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Inoltre le coordinate omogenee del punto P sono $(1, -2, 3)$. Sappiamo che la polare di P ha equazione $p: {}^tQAX = 0$ e quindi

$$(1 \quad -2 \quad 3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

e quindi $p: 2x_0 - 5x_1 + 9x_2 = 0$, in coordinate affini $p: 5x - 9y - 2 = 0$.

Definizione 9.3.4 Sia \mathcal{C} una conica non degenera contenuta in \mathbb{P}^2 . Il centro di \mathcal{C} è il polo della retta all'infinito.

Definizione 9.3.5 Sia \mathcal{C} una conica non degenera contenuta in \mathbb{P}^2 di centro C . Una retta passante per il centro è detta diametro della conica.

Osservazione 9.3.6 Dal teorema di reciprocità ne segue che i diametri di una conica non degenera \mathcal{C} sono le polari dei punti all'infinito.

Osservazione 9.3.7 Siano d_1 e d_2 due diametri distinti. Allora $C = d_1 \cap d_2$. In particolare se come d_1 e d_2 prendiamo le polari dei punti all'infinito dell'asse x e dell'asse y , rispettivamente, allora essi hanno equazione

$$d_1 : a_{01}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \text{ e } d_2 : a_{02}x_0 + a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = 0$$

Osservazione 9.3.8 Se la conica \mathcal{C} è una parabola il centro è improprio, esso è il punto all'infinito della parabola.

Definizione 9.3.9 Sia \mathcal{C} una conica non degenera e siano d_1 e d_2 due diametri distinti. Essi si dicono coniugati se il polo di d_1 appartiene a d_2 e il polo di d_2 appartiene a d_1 .

Definizione 9.3.10 Sia \mathcal{C} una conica non degenera. Gli assi di \mathcal{C} sono due diametri coniugati e ortogonali tra loro.

Sia $D = (0, l, m)$ il polo di un diametro d e quindi l'equazione di esso è $d : (a_{01}l + a_{02}m)x_0 + (a_{11}l + a_{12}m)x_1 + (a_{12}l + a_{22}m)x_2 = 0$. Sia \bar{d} il diametro coniugato di d , allora il suo polo $\bar{D} = (0, -(a_{12}l + a_{22}m), a_{11}l + a_{12}m)$. Poichè d e \bar{d} sono ortogonali allora

$$a_{12}l^2 + (a_{22} - a_{11})ml - a_{12}m^2 = 0. \quad (9.45)$$

Ne segue che esistono due assi a meno che \mathcal{C} non sia la circonferenza.

Facciamo vedere che gli assi di una conica a centro \mathcal{C} sono le rette per il centro e con vettori direttori gli autovettori della sottomatrice

$$A_{00} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Dimostrazione Siano λ_1, λ_2 autovalori di A_{00} e siano v_1, v_2 i relativi autovettori. Se $v_1 = (l, m)$ è l'autovettore relativo all'autovalore λ_1 ne segue che

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{cases} a_{11}l + a_{12}m = \lambda_1 l \\ a_{12}l + a_{22}m = \lambda_1 m \end{cases} \quad (9.46)$$

Facendo il prodotto in croce ne segue che

$$a_{11}\lambda_1 lm + a_{12}\lambda_1 m^2 - a_{12}\lambda_1 l^2 - a_{22}\lambda_1 lm = 0$$

ovvero

$$a_{12}l^2 + (a_{22} - a_{11})ml - a_{12}m^2 = 0.$$

Capitolo 10

Forme bilineari e Forme quadratiche

10.1 Forme bilineari

Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione, $\dim V = n \geq 1$. Un'applicazione

$$b: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

è detta *forma bilineare* su V se soddisfa le seguenti due proprietà

1. $b(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha b(u_1, v) + \beta b(u_2, v)$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e per ogni $u_1, u_2, v \in V$
2. $b(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha b(u, v_1) + \beta b(u, v_2)$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e per ogni $u_1, u_2, v \in V$

Esempio 10.1.1 Sia $A \in M_3(\mathbb{K})$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia

$$\begin{aligned} b: \mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3 &\rightarrow \mathbb{K} \\ (X, Y) &\rightarrow X \cdot A \cdot Y \end{aligned}$$

Tale forma b è bilineare. Se in particolare $A = I_3$ allora b è detta *forma bilineare standard*.

Vogliamo far vedere che è sempre possibile, fissata una base in V , associare a una forma bilineare b una matrice.

Fissiamo una base in V , per esempio la base canonica $\{e_1, \dots, e_n\}$. Siano $u, v \in V$ due qualunque vettori di V , $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $v = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. Possiamo quindi identificare u con la n -upla $X = (x_1, \dots, x_n)$ e v con $Y = (y_1, \dots, y_n)$. Allora

$$b(u, v) = b(X, Y) = b\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j b(e_i, e_j) = {}^t X \cdot A \cdot Y,$$

dove A è la matrice quadrata di ordine n le cui entrate $a_{ij} = b(e_i, e_j)$.

Definizione 10.1.2 Sia $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineare su V e sia A la matrice associata a b in una qualche base di V . Il rango di b , $rg(b) = rg(A)$. La forma bilineare b si dice *degenere* se $rg(b) < dimV$; b si dice *non-degenere* se $rg(b) = dimV$; b si dice *simmetrica* se $b(u, v) = b(v, u)$ per ogni $u, v \in V$, ovvero, se la matrice A è simmetrica; b si dice *antisimmetrica* se $b(u, v) = -b(v, u)$ per ogni $u, v \in V$, ovvero, se la matrice A è antisimmetrica.

Vogliamo ora vedere come cambia la matrice associata a una forma bilineare se cambia la base.

Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione, $dimV = n \geq 1$ e sia $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineare. Siano $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_n\}$ due basi di V e siano $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ le matrici associate alla forma bilineare b nella base $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $\{f_1, \dots, f_n\}$, rispettivamente. Siano $u, v \in V$ due qualunque vettori di V . Allora nella base \mathbf{e} i vettori si scrivono come $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $v = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ e nella base \mathbf{f} si scrivono come $u = \sum_{i=1}^n x'_i f_i$, $v = \sum_{i=1}^n y'_i f_i$. Sia $M = M_{\mathbf{e}\mathbf{f}}(id)$ la matrice i cui vettori colonna sono le coordinate dei vettori f_i nella base \mathbf{e} si ha quindi che $X = MX'$ e $Y = MY'$. Allora

$$b(u, v) = {}^t X' \cdot B \cdot Y' = {}^t X \cdot A \cdot Y = {}^t (MX') \cdot A \cdot (MY') = {}^t X' \cdot ({}^t M A M) \cdot Y'$$

e quindi

$$B = {}^t M A M.$$

Definizione 10.1.3 Siano $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Si dice che la matrice A è *congruente* alla matrice B se esiste una matrice invertibile M tale che $B = {}^t M A M$.

Osservazione 10.1.4 Si verifica facilmente che la relazione di congruenza è una relazione di equivalenza.

Vogliamo ora considerare solo forme bilineari simmetriche. Diamo la nozione di vettori ortogonali.

Definizione 10.1.5 Sia $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica e sia $v \in V$. Un vettore $u \in V$ si dice *ortogonale* (o anche perpendicolare) a v se $b(v, u) = 0$.

Definizione 10.1.6 Sia $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica e sia $S \subset V$ un sottoinsieme di V . Sia

$$S^\perp := \{u \in V \mid b(v, u) = 0 \text{ per ogni } v \in S\}$$

tale insieme è detto insieme dei vettori ortogonali a S .

Osservazione 10.1.7 S^\perp è un sottospazio vettoriale di V .

Definizione 10.1.8 Siano U, W sottospazi di V . Si dice che U e W sono ortogonali se $U \subset W^\perp$. Dalla simmetria di b segue che $W \subset U^\perp$.

Esempio 10.1.9 Sia $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Sia $U \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio generato dal vettore $u_1 = (1, 1, 1)$. Calcolare U^\perp . Ricordiamo che

$$\begin{aligned} U^\perp &:= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid b(v, u) = 0 \text{ per ogni } u \in U\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid b(v, u_1) = 0\}. \end{aligned}$$

Poichè

$$b(v, u_1) = {}^t X A u_1 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6x + 3z$$

ne segue che $U^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + z = 0\}$

Definizione 10.1.10 Sia $v \in V$. Si dice che il vettore v è *isotropo* rispetto alla forma bilineare simmetrica b se $b(v, v) = 0$, ovvero se $v \in L(v)^\perp$.

Osservazione 10.1.11 Si vede facilmente che

1. $\vec{0}$ è un vettore isotropo
2. Se v è isotropo allora anche kv è isotropo, con $k \in \mathbb{K}$

Lemma 10.1.12 Sia $v \in V$ un vettore non isotropo, allora $V = L(v) \oplus L(v)^\perp$.

Dimostrazione Per ogni $w \in V$ consideriamo lo scalare $\frac{b(w, v)}{b(v, v)}$. Il vettore $w - \frac{b(w, v)}{b(v, v)} v \in L(v)^\perp$. Infatti

$$b(v, w - \frac{b(w, v)}{b(v, v)} v) = b(v, w) - \frac{b(w, v)}{b(v, v)} b(v, v) = 0.$$

Quindi

$$w = \frac{b(w, v)}{b(v, v)} v + w - \frac{b(w, v)}{b(v, v)} v$$

e pertanto si scrive come somma di un vettore in $L(v)$ e un vettore in $L(v)^\perp$. Inoltre $L(v) \cap L(v)^\perp = \{\vec{0}\}$ e quindi si ha l'asserto. \square

10.2 Forme quadratiche

Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione, $\dim V = n \geq 1$. Sia $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica su V . La *forma quadratica* associata a b è l'applicazione

$$\begin{aligned} q : V &\rightarrow \mathbb{K} \\ v &\rightarrow b(v, v) \end{aligned}$$

Se fissiamo una base in V e se $X = (x_1, \dots, x_n)$ sono le coordinate di v in tale base e A è la matrice associata a b nella base fissata allora $q(X) = {}^t X \cdot A \cdot X = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$.

Proposizione 10.2.1 *Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione, $\dim V = n \geq 1$. Sia $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica su V e sia q la forma quadratica associata a b . Allora q soddisfa le seguenti condizioni*

$$i) \quad q(kv) = k^2 q(v), \text{ per ogni } k \in \mathbb{K} \text{ e per ogni } v \in V$$

$$ii) \quad 2b(v, w) = q(v+w) - q(v) - q(w)$$

Dimostrazione La condizione *i*) segue dalla definizione di q . Per la condizione *ii*) basta esplicitare $q(v+w) - q(v) - q(w)$ e usare la definizione di q . \square

Da questa proposizione segue che q individua univocamente b poichè b si esprime tramite q . Quindi su V , assegnare b , oppure assegnare q è la stessa cosa.

Esempio 10.2.2 Sia b la forma bilineare simmetrica su \mathbb{R}^3 così definita:

$$b(x, y) = 2x_1 y_1 + x_2 y_2 + 2x_3 y_3 + x_2 y_1 + x_3 y_1 + x_1 y_2 + x_3 y_2 + x_1 y_3 + x_2 y_3.$$

Determinare la forma quadratica q associata a b e scriverne la matrice associata. La forma quadratica associata a b è

$$q(X) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3$$

La matrice associata a q è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

10.3 Diagonalizzazione delle forme quadratiche

Vogliamo provare che ogni forma bilineare simmetrica ammette una base diagonalizzante. Si ha il seguente teorema

Teorema 10.3.1 *Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione, $\dim V = n \geq 1$. Sia $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica su V . Allora esiste una base di V diagonalizzante per b . Equivalentemente, ogni matrice simmetrica $A \in M_n^s(\mathbb{K})$ è congruente a una matrice diagonale.*

Dimostrazione La dimostrazione è per induzione sull'intero n . Per $n = 1$ il teorema è ovvio. Supponiamo l'asserto vero per $n - 1$ e verifichiamolo per n . Osserviamo che, poichè la forma b è non nulla, esistono $v, w \in V$ tali che $b(v, w) \neq 0$. Facciamo vedere che uno dei vettori $v, w, v + w$ è non isotropo. Infatti se v, w sono isotropi, ovvero $b(v, v) = 0 = b(w, w)$, si ha che $b(v + w, v + w) = b(v, v) + b(w, w) + 2b(v, w) = 2b(v, w) \neq 0$ e quindi $v + w$ è non isotropo. Quindi in V riusciamo sempre a trovare un vettore non isotropo sia esso v . Dal Lemma 10.1.12, sappiamo che $V = L(v) \oplus L(v)^\perp$ e quindi $\dim L(v)^\perp = n - 1$. Sia $b' = b|_{L(v)^\perp}$. Per ipotesi induttiva esiste in $L(v)^\perp$ una base diagonalizzante per b' sia essa $\{c_2, \dots, c_n\}$, ovvero $b'(c_i, c_j) = 0$ per $i \neq j$. Poichè $v \notin L(v)^\perp$ allora l'insieme $\{v, c_2, \dots, c_n\}$ è una base per V che diagonalizza b . Basta far vedere che $b(v, c_i) = 0$ per $i = 2, \dots, n$, ma questo è ovvio poichè $c_i \in L(v)^\perp$. Inoltre $b(c_i, c_j) = b'(c_i, c_j) = 0$ per $i \neq j$. \square

10.3.1 Diagonalizzazione di una forma quadratica col metodo di Lagrange

Un altro modo per provare il Teorema 10.3.1 è quello di "selezionare", in modo successivo, dei quadrati; questo è anche noto come metodo di Lagrange.

Teorema 10.3.2 *Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione, $\dim V = n \geq 1$. Sia $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica su V . Allora esiste una base di V diagonalizzante per b .*

Dimostrazione Sia A la matrice associata a b nella base canonica $\{e_1, \dots, e_n\}$. La dimostrazione è fatta per induzione sull'intero n . Per $n = 1$ il teorema è ovvio. Supponiamo l'asserto vero per $n - 1$.

Osserviamo che è possibile trovare una base di V $\{v_1, \dots, v_n\}$ tale che $b(v_1, v_1) \neq 0$. Infatti se

- se $a_{11} = b(e_1, e_1) \neq 0$ allora come base prendiamo $\{e_1, \dots, e_n\}$.
- se $a_{11} = b(e_1, e_1) = 0$ e $a_{ii} = b(e_i, e_i) \neq 0$ per qualche i allora come base prendiamo $\{e_i, e_2, \dots, e_{i-1}, e_1, e_{i-1}, \dots, e_n\} = \{c_1, \dots, c_n\}$ e rispetto a tale base $b(c_1, c_1) \neq 0$.
- se $a_{ii} = b(e_i, e_i) = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$ allora, essendo la forma b non nulla, per qualche $i \neq j$ $b(e_i, e_j) \neq 0$, sia per esempio $b(e_1, e_2) \neq 0$. In questo caso come base prendiamo $\{e_1 + e_2, e_2, \dots, e_n\} = \{c_1, \dots, c_n\}$ e rispetto a tale base $b(c_1, c_1) \neq 0$.

Sia $q : V \rightarrow \mathbb{K}$ la forma quadratica associata a b e supponiamo di aver scelto una base rispetto alla quale $a_{11} \neq 0$ e siano x_1, \dots, x_n le coordinate rispetto a tale base. Scriviamo la forma quadratica

$$q(x) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 + q'(x_2, \dots, x_n)$$

Dall'ipotesi induttiva sappiamo che esiste una base diagonalizzante per q' , sia essa $\{c_2, \dots, c_n\}$ e sia

$$q'(y_2, \dots, y_n) = \sum_{j=2}^n \beta_j y_j^2$$

Il cambio di coordinate

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_i = x_i \text{ per } i = 2, \dots, n \end{cases}$$

dà che

$$q(y) = \frac{1}{a_{11}}y_1^2 + \sum_{j=2}^n \beta_j y_j^2$$

Quindi esiste una base diagonalizzante per q . □

Esempio 10.3.3 In \mathbb{R}^3 si consideri la seguente forma quadratica

$$q(X) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + \frac{28}{5}x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$$

Determinare una forma canonica di q . Poichè $a_{11} = 2 \neq 0$ allora scriviamo

$$q(x) = \frac{1}{2}(2x_1 - x_2 - 2x_3)^2 + q'(x_2, x_3)$$

da cui segue che $q'(x_2, x_3) = \frac{5}{2}x_2^2 + \frac{18}{5}x_3^2 + 6x_2x_3$. Ora scriviamo

$$q'(x_2, x_3) = \frac{5}{2}x_2^2 + \frac{18}{5}x_3^2 + 6x_2x_3 = \frac{2}{5}\left(\frac{5}{2}x_2 + 3x_3\right)^2 + q''(x_3)$$

da cui segue che $q''(x_3) = 0$ e quindi il cambio di coordinate

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ y_2 = \frac{5}{2}x_2 + 3x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

dà la seguente forma canonica $q(y) = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{2}{5}y_2^2$.

Esempio 10.3.4 In \mathbb{R}^3 si consideri la seguente forma quadratica

$$q(X) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2x_3$$

Determinare una forma canonica di q . Poichè $a_{ii} = 0$ per ogni $i = 1, 2, 3$ allora facciamo un cambio di coordinate in modo tale che $a_{11} \neq 0$, ossia sostituiamo il vettore e_1 con in vettore $e_1 + e_2$ e quindi il cambio di coordinate è

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 - x_1 \text{ e pertanto} \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

$$q(y) = 2y_1^2 + 2y_1y_2 + 3y_1y_3 - y_2y_3 = \frac{1}{2}\left(2y_1 + y_2 + \frac{3}{2}y_3\right)^2 + q'(y_2, y_3)$$

da cui segue che $q'(y_2, y_3) = -\frac{1}{2}y_2^2 - \frac{9}{8}y_3^2 - \frac{5}{2}y_2y_3$. Ora scriviamo

$$q'(y_2, y_3) = -2\left(-\frac{1}{2}y_2 - \frac{5}{4}y_3\right)^2 + q''(y_3)$$

da cui segue che $q''(y_3) = 2y_3^2$ e quindi il cambio di coordinate

$$\begin{cases} z_1 = 2y_1 + y_2 + \frac{3}{2}y_3 \\ z_2 = -\frac{1}{2}y_2 - \frac{5}{4}y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$$

dà la seguente forma canonica $q(z) = \frac{1}{2}z_1^2 - 2z_2^2 + 2z_3^2$.

Dal Teorema 10.3.1 segue che, a secondo se il campo \mathbb{K} è algebricamente chiuso o meno possiamo scegliere una base diagonalizzante rispetto alla quale la matrice associata alla forma b sia una matrice diagonale particolare e precisamente si hanno i seguenti risultati che distinguono il caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dal caso \mathbb{K} algebricamente chiuso.

Teorema 10.3.5 (Sylvester) *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione $n \geq 1$ e sia $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica su V . Allora esiste una base di V rispetto alla quale la matrice associata a b in tale base è la seguente matrice diagonale*

$$\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad (10.1)$$

dove r è il rango della forma bilineare b . L'intero p dipende solo dalla forma b e non dalla base rispetto alla quale la matrice associata a b è la matrice (10.1).

Dimostrazione Dal teorema 10.3.1 sappiamo che esiste una base $\{f_1, \dots, f_n\}$ rispetto alla quale la la forma quadratica q è della forma

$$q(x) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2$$

dove x_1, \dots, x_n sono le coordinate di un vettore x nella base $\{f_1, \dots, f_n\}$. Il numero dei coefficienti $a_{ii} \neq 0$ diversi da zero è uguale al rango di b , sia esso r . Supponiamo, a meno di scambiare l'ordine dei vettori della base $\{f_1, \dots, f_n\}$, che

$$\begin{aligned} a_{ii} &> 0 && \text{per } 1 \leq i \leq p \\ a_{jj} &< 0 && \text{per } p+1 \leq j \leq r \\ a_{tt} &= 0 && \text{per } r+1 \leq t \leq n \end{aligned}$$

Poichè $a_{ii} > 0$ per $1 \leq i \leq p$ allora possiamo scrivere

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \alpha_i^2 && \text{per } 1 \leq i \leq p \\ a_{jj} &= -\alpha_j^2 && \text{per } p+1 \leq j \leq r \end{aligned}$$

con α_i opportuni numeri reali positivi per $i = 1, \dots, r$.

Come base per V prendiamo $\{g_1, \dots, g_n\}$, dove $g_i = \frac{1}{\alpha_i} f_i$ per $i = 1, \dots, r$ e $g_i = f_i$ per $i = r+1, \dots, n$. La matrice associata a b nella base $\{g_1, \dots, g_n\}$ è la matrice (10.1). Infatti $b(g_i, g_i) = b(\frac{1}{\alpha_i} f_i, \frac{1}{\alpha_i} f_i) = \frac{1}{\alpha_i^2} b(f_i, f_i) = \frac{a_{ii}}{\alpha_i^2}$ e quindi

$$\begin{aligned} b(g_i, g_i) &= 1 && \text{per } 1 \leq i \leq p \\ b(g_i, g_i) &= -1 && \text{per } p+1 \leq i \leq r \\ b(g_i, g_i) &= 0 && \text{per } r+1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dunque in tale base

$$q(v) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 \quad (10.2)$$

dove $v = y_1 g_1 + \cdots + y_n g_n$.

Facciamo ora vedere che l'intero p non dipende dalla base $\{g_1, \dots, g_n\}$. Supponiamo che esista un'altra base $\{w_1, \dots, w_n\}$ rispetto alla quale la forma quadratica associata a b si esprime come

$$q(v) = z_1^2 + \cdots + z_t^2 - z_{t+1}^2 - \cdots - z_r^2 \quad (10.3)$$

dove $v = z_1 w_1 + \cdots + z_n w_n$. Provare che $t = p$. Se $t \neq p$, possiamo supporre che $t < p$. Consideriamo i sottospazi $U = \langle g_1, \dots, g_p \rangle$ e $W = \langle w_{t+1}, \dots, w_n \rangle$. Sappiamo che $\dim U + \dim W = p + n - t > n$ essendo $t < p$ e quindi, dalla relazione di Grassmann si ha che $\dim(U \cap W) \geq 1$. Esiste quindi $v \in U \cap W$ con $v \neq \vec{0}$. Poichè $v \in U$ e $v \in W$ allora $v = x_1 g_1 + \cdots + x_p g_p$ e $v = z_1 w_{t+1} + \cdots + z_n w_n$ e quindi $q(v) = y_{11}^2 + \cdots + y_{pp}^2 > 0$ e $q(v) = -z_{t+1}^2 - \cdots - z_r^2 < 0$, che è una contraddizione e quindi $t = p$. \square

L'intero p è detto *indice di positività*. L'intero $r - p$ è detto *indice di negatività*. La coppia $(p, r - p)$ è detta *segnatura* di b e di q .

Teorema 10.3.6 *Sia V uno spazio vettoriale su un campo algebricamente chiuso \mathbb{K} con $\dim V = n \geq 1$ e sia $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica su V . Allora esiste una base di V rispetto alla quale la matrice associata a b in tale base è la seguente matrice diagonale*

$$\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0_{n-r} \end{pmatrix} \quad (10.4)$$

dove 0_{n-r} è la matrice quadrata nulla di ordine $n - r$ e r è il rango di b .

Dimostrazione Dal teorema 10.3.1 sappiamo che esiste una base $\{f_1, \dots, f_n\}$ rispetto alla quale la forma quadratica q è della forma

$$q(x) = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

dove x_1, \dots, x_n sono le coordinate di un vettore x nella base $\{f_1, \dots, f_n\}$. Il numero dei coefficienti $a_{ii} \neq 0$ diversi da zero è uguale al rango di b . Supponiamo, a meno di scambiare l'ordine dei vettori della base $\{f_1, \dots, f_n\}$, che

$$\begin{aligned} a_{ii} &> 0 && \text{per } 1 \leq i \leq p \\ a_{jj} &< 0 && \text{per } p+1 \leq j \leq r \\ a_{tt} &= 0 && \text{per } r+1 \leq t \leq n \end{aligned}$$

Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tali che $\alpha_i^2 = a_{ii}$ per $i = 1, \dots, r$, questo possiamo farlo poichè \mathbb{K} è algebricamente chiuso. Come base per V prendiamo $\{g_1, \dots, g_n\}$, dove $g_i = \frac{1}{\alpha_i} f_i$ per $i = 1, \dots, r$ e $g_i = f_i$ per $i = r+1, \dots, n$. La matrice associata a b nella base $\{g_1, \dots, g_n\}$ è la matrice (10.4). Infatti $b(g_i, g_i) = b(\frac{1}{\alpha_i} f_i, \frac{1}{\alpha_i} f_i) = \frac{1}{\alpha_i^2} b(f_i, f_i) = \frac{a_{ii}}{\alpha_i^2}$ e quindi

$$\begin{aligned} b(g_i, g_i) &= 1 && \text{per } 1 \leq i \leq r \\ b(g_i, g_i) &= 0 && \text{per } r+1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dunque $\{g_1, \dots, g_n\}$ è la base cercata. \square

Definizione 10.3.7 Sia q una forma quadratica su uno spazio vettoriale reale V . Si dice che q è *definita positiva* se $q(v) > 0$ per ogni $v \neq 0$; si dice che q è *definita negativa* se $q(v) < 0$ per ogni $v \neq 0$; si dice che q è *semidefinita positiva* se $q(v) \geq 0$ per ogni $v \neq 0$; si dice che q è *semidefinita negativa* se $q(v) \leq 0$ per ogni $v \neq 0$; si dice che q è *indefinita* se non è né semidefinita positiva né semidefinita negativa.

Definizione 10.3.8 Sia $M_n^s(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici simmetriche reali di ordine n . Una matrice simmetrica $A \in M_n^s(\mathbb{R})$ si dice *definita positiva* (rispettivamente *semidefinita positiva*, *definita negativa*, *semidefinita negativa*, *indefinita*) se la corrispondente forma quadratica è definita positiva (rispettivamente semidefinita positiva, definita negativa, semidefinita negativa, indefinita).

In particolare, dal teorema di Sylvester 10.3.5 segue che se $A \in M_n^s(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica reale definita positiva, essa è congruente alla matrice identica I_n e quindi esiste una matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che $A = {}^t P I_n P = {}^t P P$. Vale il seguente corollario

Corollario 10.3.9 Una matrice simmetrica $A \in M_n^s(\mathbb{R})$ è definita positiva se e solo se esiste una matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che $A = {}^t P P$.

Definizione 10.3.10 Sia V uno spazio vettoriale reale. Una forma bilineare simmetrica definita positiva su V si dice *prodotto scalare*.

Vogliamo ora dare un criterio per stabilire se una data matrice simmetrica reale è definita positiva o negativa. Data $A \in M_n^s(\mathbb{R})$ consideriamo le sottomatrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \dots, A_n = A$$

e denotiamo con $D_i = \det(A_i)$. D_i sono detti *minori principali* della matrice A . Vale il seguente

Teorema 10.3.11 Sia $A \in M_n^s(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica.

- 1) A è definita positiva se e solo se tutti i suoi minori principali D_1, D_2, \dots, D_n sono positivi.
- 2) A è definita negativa se e solo se

$$D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0, \dots$$

Dimostrazione Dimostriamo la 1). La dimostrazione è per induzione sull'intero n . Se $n = 1$ l'affermazione è ovviamente vera. Supponiamo che $n > 1$ e A è definita positiva. Proviamo che tutti i suoi minori principali D_1, D_2, \dots, D_n sono positivi.

Se A è definita positiva allora ${}^t x A x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ e quindi se $x = e_1$, con e_1 un vettore della base canonica di \mathbb{R}^n , si ha che ${}^t e_1 A e_1 > 0$, ovvero $a_{11} = {}^t e_1 A e_1 > 0$. Si consideri la seguente matrice unitriangolare

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdot & \cdot & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad (10.5)$$

Dalla dimostrazione di Lagrange del teorema (10.3.2), segue che la matrice

$${}^t C A C = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a'_{11} & \cdot & \cdot & a'_{1\ n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a'_{n-1\ 1} & \cdot & \cdot & a'_{n-1\ n-1} \end{pmatrix}$$

dove $A' = (a'_{ij}) \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica. Sia ${}^t x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, {}^t X_2)$, dove ${}^t X_2 = (x_2, \dots, x_n)$. Poichè

$${}^t x ({}^t C A C) x = a_{11} x_1^2 + {}^t X_2 A' X_2 \quad (10.6)$$

e poichè ${}^t C A C$ è definita positiva, ne segue che anche A' è definita positiva. Per ipotesi induttiva i minori principali D'_1, \dots, D'_{n-1} sono positivi. Osserviamo che i minori principali di A coincidono con quelli di ${}^t C A C$ poichè C è unitriangolare. Allora per $i = 2, \dots, n$ si ha

$$D_i = a_{11} D'_{i-1} > 0. \quad (10.7)$$

Viceversa se tutti i minori principali sono positivi in particolare $a_{11} \neq 0$ e quindi si può considerare la matrice ${}^t C A C$ con C la matrice definita in 10.5. Da (10.7) ne segue che i minori principali di A' sono

$$D'_i = \frac{D_{i+1}}{D_1} \quad i = 1, \dots, n-1$$

e poichè $D_i > 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$ ne segue che A' è definita positiva. Da 10.6 ne segue che ${}^t C A C$ è definita positiva e quindi anche A è definita positiva.

Per la dimostrazione di 2) basta sostituire A con $-A$ in 1). □

Data una matrice simmetrica $A \in M_n(\mathbb{K})$ vogliamo descrivere un altro modo, per trovare una matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tale che ${}^t P A P$ sia una matrice diagonale. Cominciamo con la seguente osservazione:

Osservazione 10.3.12 Le operazioni elementari sulle colonne di una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ si ottengono moltiplicando a destra A per la trasposta della corrispondente matrice elementare. Se scriviamo $A = (A^1, A^2, \dots, A^n)$ dove con A^i si indica la i -esima colonna di A e se facciamo, per esempio, la seguente operazione che manda $A^2 \rightarrow kA^1 + A^2$

$$A = (A^1, A^2, \dots, A^n) \implies (A^1, kA^1 + A^2, \dots, A^n)$$

questo è lo stesso che moltiplicare A, a destra, per ${}^tR_{21}(k)$, ovvero

$$A \cdot {}^tR_{21}(k) = (A^1, kA^1 + A^2, \dots, A^n).$$

Dimostrazione La matrice tA ha come righe le colonne di A e le operazioni elementari sulle righe di tA si ottengono per moltiplicazione a sinistra per la corrispondente matrice elementare; per esempio l'operazione che manda $({}^tA)_2 \rightarrow ({}^tA)_2 + k({}^tA)_1$ si ottiene come

$$R_{21}(k) \cdot {}^tA \tag{10.8}$$

e quindi se ne facciamo la trasposta della matrice (10.8) si ha l'operazione sulle corrispondenti colonne di A, e poichè ${}^t(R_{21}(k) \cdot {}^tA) = A \cdot {}^tR_{21}(k)$ si ha la tesi. \square

Dall'osservazione precedente segue che, data $A \in M_n(\mathbb{K})$, se vogliamo trovare una matrice invertibile P tale che

$${}^tP \cdot A \cdot P = D$$

con D matrice diagonale si procede come segue:

Consideriamo la matrice (A, I_n) ; moltiplichiamo per matrici elementari R^1, \dots, R^s per ottenere una matrice strettamente triangolare superiore

$$(R^s \dots R^1 \cdot A, R^s \dots R^1 \cdot I_n)$$

Per avere zeri al di sopra della diagonale principale della matrice $R^s \dots R^1 \cdot A$ dobbiamo moltiplicare a destra per la matrice ${}^tR^1 \dots {}^tR^s$, e quindi $D = R^s \dots R^1 \cdot A \cdot {}^tR^1 \cdot \dots \cdot {}^tR^s = (R^s \dots R^1) \cdot A \cdot {}^t(R^s \dots R^1) = {}^t(R^s \dots R^1) \cdot A \cdot {}^t(R^s \dots R^1)$ e dunque la matrice P cercata è proprio $P = {}^t(R^s \dots R^1)$, che è invertibile essendo la trasposta di un prodotto di matrici elementari.

Esempio 10.3.13 Determinare la matrice P tale che tPAP sia una matrice diagonale, dove A è la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Affianchiamo alla matrice A la matrice identica e facciamo operazioni elementari sulle righe, e le stesse operazioni sulle corrispondenti colonne, fino a ottenere, a sinistra, una matrice diagonale e la matrice che resta a destra è tP .

$$(A, I_3) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 + \frac{3}{2}R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{4} & \frac{7}{2} & \vdots & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 2 & \vdots & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{C_2 \rightarrow C_2 + \frac{3}{2}C_1 \\ C_3 \rightarrow C_3 - C_1}} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{4} & \frac{7}{2} & \vdots & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 2 & \vdots & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{4} & \frac{7}{2} & \vdots & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{59}{2} & \vdots & 8 & 7 & \frac{5}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow 7R_2 + \frac{5}{2}R_3} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{4} & \frac{7}{2} & \vdots & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{295}{4} & \vdots & 8 & 7 & \frac{5}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{C_3 \rightarrow 7C_2 + \frac{5}{2}C_3} \\ & \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{4} & 0 & \vdots & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{295}{4} & \vdots & 8 & 7 & \frac{5}{2} \end{array} \right) = (D, {}^tP) \end{aligned}$$

e dunque

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 8 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

10.3.2 Esercizi

1. Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^3 riferito alla base canonica, si consideri la forma bilineare simmetrica b così definita

$$b(x, y) = x_1 y_1 + 5x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 3x_1 y_3 + 3x_3 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2.$$

- (a) Scrivere la matrice A associata a b e calcolarne il rango.
 - (b) Scrivere la forma quadratica q associata a b .
 - (c) Diagonalizzare q .
2. In \mathbb{R}^3 si consideri la seguente forma quadratica

$$q(X) = 5x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 4x_1 x_2 + 6x_1 x_3$$

- (a) Diagonalizzare q .
 - (b) Trovare una base diagonalizzante per q .
 - (c) Trovare la base rispetto alla quale q ha la forma canonica di Sylvester.
3. Si consideri la seguente matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -8 \\ -4 & 1 & 7 \\ -8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Trovare una matrice invertibile P tale che tPAP è una matrice diagonale.
- (b) Trovare la segnatura della forma quadratica definita dalla matrice A.

4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare la matrice P tale che tPAP sia una matrice diagonale.

5. Si consideri la seguente forma quadratica

$$\begin{aligned} q: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\rightarrow 3x_1^2 - 8x_1x_2 + 3x_2^2 \end{aligned}$$

- (a) Diagonalizzare q .
- (b) Determinare il relativo cambio di coordinate.
- (c) Dire se q è definita positiva o definita negativa, o semi-definita positiva, o semi-definita negativa, o se è indefinita.

10.4 Classificazione proiettiva delle coniche

L'equazione di una conica \mathcal{C} in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è della forma

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{00}x_0^2 = 0 \quad (10.9)$$

con a_{11}, a_{22}, a_{12} non tutti nulli, dove (x_0, x_1, x_2) sono le coordinate omogenee in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. In forma matriciale essa la scriviamo

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = {}^tXAX. \quad (10.10)$$

Se sostituiamo in (10.10) X con MX' , dove $M \in GL_n(\mathbb{R})$, si ottiene

$${}^tX'BX'$$

con $B = {}^tMAM$. Le matrici A e B hanno lo stesso rango.

Osserviamo che in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ una conica è il luogo di zeri di una forma quadratica con matrice associata la matrice A. Dal teorema di Sylvester segue che in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ esistono cinque tipi di coniche proiettivamente non equivalenti tra loro. Infatti vale il seguente teorema

Teorema 10.4.1 Una conica \mathcal{C} in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è proiettivamente equivalente a una delle seguenti coniche di equazione:

1. $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ conica generale

1a. $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ conica generale a punti non reali

2. $x_0^2 - x_1^2 = 0$ conica degenera

2a. $x_0^2 + x_1^2 = 0$ conica degenera

3. $x_0^2 = 0$ conica doppiamente degenera

Le coniche nella lista sono a due a due non proiettivamente equivalenti.

Dimostrazione Come già detto, dal teorema di Sylvester segue che ogni conica in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è proiettivamente equivalente a una delle cinque coniche date. Per dimostrare che esse sono a due a due proiettivamente non equivalenti basta osservare che due coniche nella lista o hanno rango diverso oppure se hanno lo stesso rango il supporto è diverso. Esempio il supporto della conica in 1a. è l'insieme vuoto, mentre la 1. ha supporto non vuoto. Le coniche 2. e 2a. hanno supporto costituito o da due rette distinte o da un solo punto. \square

10.5 Quadriche in \mathbb{R}^3

Una quadrica \mathcal{Q} in \mathbb{R}^3 è l'insieme degli zeri di un polinomio $p(x, y, z) \in \mathbb{R}[x, y, z]$ di grado due. Messi da parte i casi particolari, tali luoghi sono superfici in \mathbb{R}^3 che sono esempi di varietà non lineari in \mathbb{R}^3 .

Esempio 10.5.1 Sia $C = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$, $R \in \mathbb{R}_+$ un numero reale positivo. La *superficie sferica* di centro C e raggio R è l'insieme dei punti di \mathbb{R}^3 che hanno la stessa distanza R dal punto C fissato. In termini di coordinate

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + (z - c_3)^2 = R^2\}$$

e dunque

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2c_1x - 2c_2y - 2c_3z + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - R^2 = 0 \quad (10.11)$$

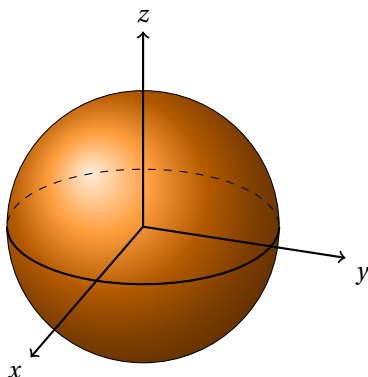


Figura 10.1: Superficie sferica di centro l'origine

10.6 Equazione generale di una quadrica in \mathbb{R}^3

Consideriamo un polinomio di grado due a coefficienti reali nelle indeterminate x_1, x_2, x_3 , sia esso

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + \\ &= 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 + 2a_{03}x_3 + a_{00} \end{aligned} \quad (10.12)$$

con $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$, non tutti nulli e indichiamo con \mathcal{Q} il luogo di zeri di tale polinomio ossia

$$\mathcal{Q} := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x_1, x_2, x_3) = 0\}$$

\mathcal{Q} è detto *supporto* della quadrica definita da $F(x_1, x_2, x_3)$. Osserviamo che se $G(x_1, x_2, x_3) = kF(x_1, x_2, x_3)$ con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ il supporto della quadrica definita da $G(x_1, x_2, x_3)$ è lo

stesso di quello definito da $F(x_1, x_2, x_3)$. Indichiamo che $[F(x_1, x_2, x_3)]$ la classe dei polinomi della forma $kF(x_1, x_2, x_3)$ con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$. Definiamo quindi una \mathcal{Q} come la classe $[F(x_1, x_2, x_3)]$.

Definizione 10.6.1 Sia \mathcal{Q} una quadrica di \mathbb{R}^3 definita dal polinomio (10.12). Il polinomio $F(x_1, x_2, x_3)$ ha una componente omogenea di grado 2

$$q(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

che è detta la forma quadratica della quadrica e si indica con $A_{00} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ la matrice simmetrica associata alla forma quadratica.

Possiamo associare al polinomio $F(x_1, x_2, x_3)$ come in (10.12) la seguente matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (10.13)$$

allora il polinomio $F(x_1, x_2, x_3)$ può essere scritto come

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (10.14)$$

o in forma matriciale

$$F = {}^t X A X \quad (10.15)$$

dove

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

La matrice A è detta *matrice simmetrica completa* associata alla quadrica \mathcal{Q} .

Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'isometria dello spazio. Se indichiamo con x_1, x_2, x_3 le coordinate di \mathbb{R}^3 e con x'_1, x'_2, x'_3 le nuove coordinate date da f allora si ha

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + c_{13}x'_3 + d_1 \\ x_2 = c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + c_{23}x'_3 + d_2 \\ x_3 = c_{31}x'_1 + c_{32}x'_2 + c_{33}x'_3 + d_3 \end{cases} \quad (10.16)$$

e

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

è una matrice ortogonale.

Applicando l'isometria f alla quadrica, l'equazione della quadrica diventa:

$${}^tX'{}^t\tilde{C}A\tilde{C}X' = 0 \quad (10.17)$$

dove

$$X' = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

e

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ d_2 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ d_3 & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}. \quad (10.18)$$

Definizione 10.6.2 Data una quadrica \mathcal{Q} di equazione

$${}^tXAX = 0$$

allora il rango di \mathcal{Q} , $rg(\mathcal{Q}) = rg(A)$. La quadrica \mathcal{Q} è detta

- (i) *non degenera*, se $rg(\mathcal{Q}) = 4$
- (ii) *semplicemente degenera* se $rg(\mathcal{Q}) = 3$
- (iii) *doppiamente degenera* se $rg(\mathcal{Q}) = 2$
- (iv) *triplamente degenera* se $rg(\mathcal{Q}) = 1$

Definizione 10.6.3 Sia \mathcal{Q} una quadrica di equazione

$${}^tXAX = 0$$

e sia A_{00} la matrice della forma quadratica di \mathcal{Q} .

- (i) Se \mathcal{Q} è *non degenera*, ossia $rg(\mathcal{Q}) = rg(A) = 4$, allora \mathcal{Q} si dice:
 - (i.1) *quadrica a centro* se $rg(A_{00}) = 3$. In tal caso la forma quadratica $q(x_1, x_2, x_3)$ di \mathcal{Q} è non degenera e \mathcal{Q} si dice:
 - (i.1.a) *ellissoide* se $q(x_1, x_2, x_3) = 0$ ammette la sola soluzione reale banale;
 - (i.1.b) *iperboloide* se $q(x_1, x_2, x_3) = 0$ ammette soluzioni reali non nulle;
 - (i.2) *paraboloide* se $rg(A_{00}) = 2$;
- (ii) Se \mathcal{Q} è *semplicemente degenera*, ossia $rg(\mathcal{Q}) = 3$, si dice
 - (ii.a) *cono*, se $rg(A_{00}) = 3$;
 - (ii.b) *cilindro*, se $rg(A_{00}) < 3$;
- (iii) Se \mathcal{Q} è *doppiamente degenera*, ossia $rg(\mathcal{Q}) = 2$, allora si hanno *due piani distinti*;
- (iv) Se \mathcal{Q} è *triplamente degenera*, ossia $rg(\mathcal{Q}) = 1$, allora si hanno *due piani coincidenti*.

10.6.1 Forma canonica metrica di quadriche non degeneri

Nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 con coordinate x, y, z , il teorema di classificazione delle quadriche euclidee dice che ogni quadrica non degenera di \mathbb{R}^3 a punti reali è congruente a una delle seguenti 5 forme canoniche

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a \geq b \geq c > 0$, *ellissoide*)
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a \geq b > 0, c > 0$, *iperboloide iperbolico, o a una falda*)
3. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a > 0, b \geq c > 0$, *iperboloide ellittico, a a due falde*)
4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$ ($a \geq b > 0$, *paraboloide ellittico*)
5. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$ ($a, b > 0$, *paraboloide iperbolico*)

- **Ellssoide:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, le sue equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x = a \cos u \sin v \\ y = b \sin u \sin v \\ z = c \cos v \end{cases} \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

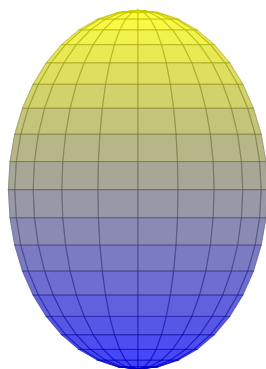


Figura 10.2: Ellissoide

- **Iperboloide iperbolico:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, le sue equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x = a \cosh u \sin v \\ y = b \cosh u \sin v \\ z = c \sinh u \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$$

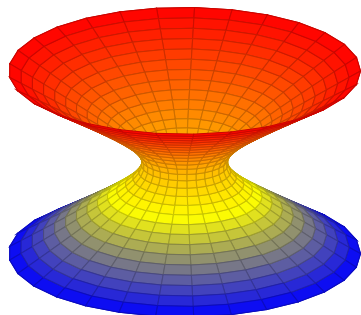


Figura 10.3: Iperboloide iperbolico (o a una falda)

- **Iperboloide ellittico:** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, le sue equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x = a u \cos v \\ y = b u \sin v \\ z = \pm c \sqrt{1 + u^2} \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$$

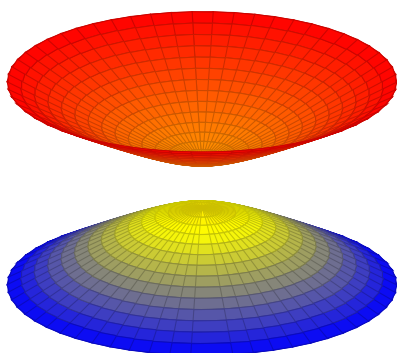


Figura 10.4: Iperboloide ellittico (o a due falde)

- **Paraboloide iperbolico:** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$, le sue equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

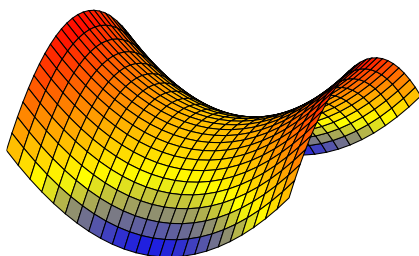


Figura 10.5: Paraboloide Iperbolico

- **Paraboloide ellittico:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$, le sue equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

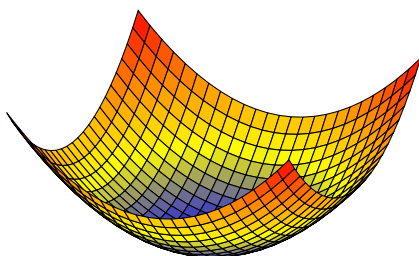


Figura 10.6: Paraboloide ellittico

10.6.2 Alcune considerazioni

- ELLISSOIDE: $\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

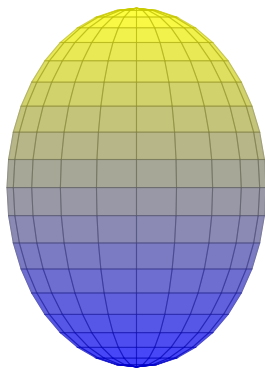


Figura 10.7: Ellissoide

Se $a = b = c$ allora \mathcal{Q} è una superficie sferica di centro l'origine e raggio a .

Poichè nell'equazione di un ellissoide generale compaiono solo i quadrati delle indeterminate x, y, z , si ha che \mathcal{Q} è una superficie simmetrica rispetto all'origine, agli assi coordinati e ai piani coordinati che sono detti rispettivamente *centro di simmetria*, *assi di simmetria* e *piani di simmetria* dell'ellissoide.

L'intersezione di \mathcal{Q} con gli assi di simmetria sono detti *vertici* dell'ellissoide e sono i sei punti di coordinate $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$.

I segmenti che congiungono l'origine con i sei vertici dell'ellissoide sono detti *semiassi* dell'ellissoide.

L'ellissoide è una superficie limitata essendo delimitata dai piani di equazioni cartesiane $x = \pm a$, $y = \pm b$, $z = \pm c$. Si deduce quindi che l'ellissoide non contiene rette.

Osserviamo che l'intersezione dell'ellissoide con i piani coordinati (che sono piani principali o di simmetria) sono delle ellissi dette *ellissi principali*. Esse hanno equazione:

$$(i) \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = x = 0$$

$$(ii) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = y = 0$$

$$(iii) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = z = 0$$

- IPERBOLOIDE ELLITTICO: $\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

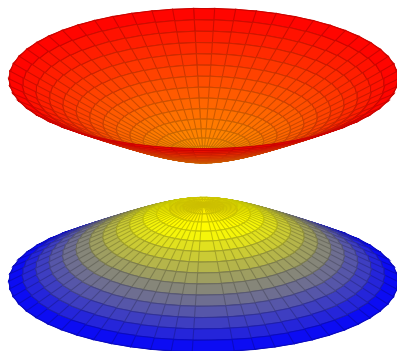


Figura 10.8: Iperboloide ellittico (o a due falde)

Poichè nell'equazione di un iperboloide ellittico compaiono solo i quadrati delle indeterminate x, y, z , si ha che \mathcal{Q} è una superficie simmetrica rispetto all'origine, agli assi coordinati e ai piani coordinati.

L'iperboloide ellittico possiede un solo asse reale, esso è l'asse x e la sua intersezione con l'iperboloide ellittico è il punto di coordinate $(\pm a, 0, 0)$. L'intersezione degli altri due assi con l'iperboloide ellittico è vuota e quindi sono detti assi immaginari. Quindi l'iperboloide ellittico possiede due soli vertici, $(\pm a, 0, 0)$.

Osserviamo che l'intersezione dell'iperboloide ellittico con il piano di simmetria $x = 0$ è vuota (non ha punti reali), mentre l'intersezione dell'iperboloide ellittico con i piani di simmetria $y = 0$ e $z = 0$ sono iperboli generali.

Inoltre osserviamo che l'iperboloide ellittico non ha supporto nello spazio definito da $|x| < a$, mentre se $x = h$ con $|h| > a$ allora l'intersezione dell'iperboloide ellittico col piano $x = h$ è un'ellisse di equazione $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 - \frac{h^2}{a^2} = x - h = 0$. L'iperboloide ellittico è costituito da due componenti disgiunte. Se $x = \pm a$ allora si hanno i due vertici.

- IPERBOLOIDE IPERBOLICO: $\mathcal{Q}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

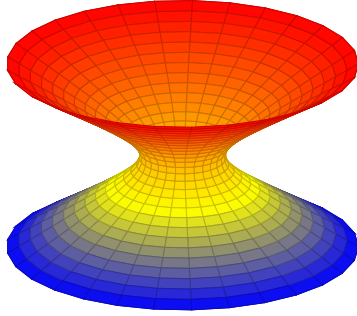


Figura 10.9: Iperboloide iperbolico (o a una falda)

Poichè nell'equazione di un iperboloide iperbolico compaiono solo i quadrati delle indeterminate x, y, z , si ha che \mathcal{Q} è una superficie simmetrica rispetto all'origine, agli assi coordinati e ai piani coordinati.

L'iperboloide iperbolico possiede due assi reali, essi sono l'asse x e l'asse y e la loro intersezione con l'iperboloide iperbolico sono i punti di coordinate $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$. L'intersezione dell'altro asse z con l'iperboloide iperbolico è vuota e quindi esso è detto asse immaginario.

L'intersezione di \mathcal{Q} con il piano $z = 0$, ovvero $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = z = 0$, è un'ellisse detta *ellisse di gola*. In realtà l'intersezione di \mathcal{Q} con il piano $z = h$, con $h \in \mathbb{R}$ qualunque sono ellissi: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 - \frac{h^2}{c^2} = z - h = 0$ i cui semiassi crescono al crescere di $|h|$ e quindi si estende indefinitivamente.

L'intersezione di \mathcal{Q} con gli altri due piani principali ovvero il piano $x = 0$, e il piano $y = 0$ sono le iperboli

$$(i) \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = x = 0$$

$$(ii) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = y = 0$$

Se si interseca col piano $x = h$ con $h \in \mathbb{R}$ si hanno sempre iperboli generali che diventano degeneri per $h = \pm a$ in tal caso si hanno due coppie di rette passanti dai due vertici $(\pm a, 0, 0)$ dell'iperboloide $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = x - a = 0$, $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = x + a = 0$. Dunque l'iperboloide iperbolico contiene rette. Vedremo che esso ha due schiere di rette. Infatti se riscriviamo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ come $1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$ allora $(1 - \frac{x}{a})(1 + \frac{x}{a}) = (\frac{y}{b} - \frac{z}{c})(\frac{y}{b} + \frac{z}{c})$. e dunque le rette

$$(1 + \frac{x}{a}) = t(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}) \quad \text{e} \quad (1 - \frac{x}{a}) = \frac{1}{t}(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}), \quad \text{con } t \in \mathbb{R}^*$$

e

$$(1 + \frac{x}{a}) = s(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}) \quad \text{e} \quad (1 - \frac{x}{a}) = \frac{1}{s}(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}), \quad \text{con } s \in \mathbb{R}^*,$$

appartengono all'iperboloide iperbolico. Si hanno quindi *due schiere di rette* al variare di $t \in \mathbb{R}^*$ e di $s \in \mathbb{R}^*$.

Teorema 10.6.4 *Sia \mathcal{Q} una quadrica non degenera. Allora \mathcal{Q} è congruente a una delle quadriche in 10.6.1.*

Dimostrazione Sia \mathcal{Q} una quadrica di \mathbb{R}^3 definita dal polinomio

$$\begin{aligned} F(x, y, z) = & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ & + 2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{03}z + a_{00} \end{aligned} \quad (10.19)$$

Il polinomio $F(x, y, z)$ ha una componente omogenea di grado 2, ovvero

$$q(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

e indichiamo con $A_{00} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ la matrice simmetrica associata alla forma quadratica $q(x, y, z)$. Sia $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq 3}$ la matrice associata a \mathcal{Q} allora

$$F(x, y, z) = (1, x, y, z)A^t(1, x, y, z) \quad (10.20)$$

Se la forma quadratica $q(x, y, z)$ è non degenera, ovvero $rg(A_{00}) = 3$ e se indichiamo con λ_i , $i = 1, 2, 3$ gli autovalori di A_{00} allora, a meno di moltiplicare il tutto per -1 , la sua segnatura può essere

- (3, 0) e quindi $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$ (a meno di un cambio di coordinate), oppure
- (2, 1) e quindi $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 < 0$ (a meno di un cambio di coordinate).

Se indichiamo con (x', y', z') le coordinate che trasformano $q(x, y, z)$ in forma canonica allora

$$F(x', y', z') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + ax' + by' + cz' + d$$

per opportuni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Si effettua una opportuna traslazione degli assi e si perviene alla forma canonica desiderata.

Abbiamo quindi che

- **Ellissoide:** $rg(A_{00}) = 3$, autovalori di A_{00} concordi. Inoltre
 - se $det(A) < 0$ Ellissoide reale;
 - se $det(A) > 0$ Ellissoide immaginario.
- **Iperboloide:** $rg(A_{00}) = 3$, autovalori di A_{00} discordi. Inoltre
 - se $det(A) < 0$ Iperboloide ellittico;
 - se $det(A) > 0$ Iperboloide iperbolico.

- **Paraboloide:** $rg(A_{00}) = 2$, cioè un autovalore di A_{00} è zero. Inoltre

se $\det(A) < 0$ Paraboloide ellittico;

o anche se i due autovalori non nulli di A_{00} sono concordi

se $\det(A) > 0$ Paraboloide iperbolico;

o anche se i due autovalori non nulli di A_{00} sono discordi.

In generale se \mathcal{Q} è una quadrica di \mathbb{R}^3 definita dal polinomio

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{03}z + a_{00} \quad (10.21)$$

e se indichiamo con $q(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ la forma quadratica associata alla quadrica \mathcal{Q} e con $A_{00} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ la matrice simmetrica associata a $q(x, y, z)$. Sia $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq 3}$ la matrice associata a \mathcal{Q} allora

$$F(x, y, z) = (1, x, y, z)A^t(1, x, y, z) \quad (10.22)$$

Vogliamo vedere quali sono gli invarianti di \mathcal{Q} .

- **Invarianti**

$\det(A)$; $rg(A)$; sono invarianti di \mathcal{Q} .

Osserviamo che il polinomio caratteristico di A_{00} ,

$$p_{A_{00}}(\lambda) = -\lambda^3 + \text{Tr}(A_{00})\lambda^2 - (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)\lambda + \det(A_{00})$$

con $\lambda_i, i = 1, 2, 3$, autovalori di A_{00} .

Poichè A_{00} è congruente a $B_{00} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ ne segue che gli altri invarianti

di \mathcal{Q} sono:

$\det(A_{00})$; $rg(A_{00})$; $\text{Tr}(A_{00})$; segno degli autovalori di A_{00} ;

Esempio 10.6.5 Si consideri la quadrica \mathcal{Q} di equazione

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 4x - 2 = 0$$

Determinare il tipo di quadrica e ridurre tale quadrica a forma canonica.

La matrice simmetrica associata a \mathcal{Q} è

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Poichè $\det(A) = 2(-6) = -12$ si ha che $rg(\mathcal{Q}) = 4$ e quindi la quadrica è non degenera. Poichè $\det(A_{00}) = 2$ si ha che la quadrica è a centro. Inoltre poichè la forma quadratica di \mathcal{Q} , $q((x, y, z)) = x^2 + y^2 + 2z^2$ è non degenera e gli autovalori di $q((x, y, z))$

($\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$) sono tutti concordi, quindi \mathcal{Q} è un *ellissoide*. Poichè la forma quadratica $q((x_1, x_2, x_3))$ è in forma canonica, basta fare un'opportuna traslazione per eliminare i termini lineari. Osserviamo che la segnatura di A_{00} è $(3, 0)$. A meno di scambiare tra di loro le coordinate si ordinano gli autovalori in modo tale che $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$, ovvero si considera il cambio di coordinate

$$\begin{cases} x' = z \\ y' = y \\ z' = x \end{cases}$$

e quindi la quadrica nelle nuove coordinate diventa

$$2x'^2 + y'^2 + z'^2 + 4z' - 2 = 0$$

Se indichiamo con $B = (b_{ij})$ la matrice associata a \mathcal{Q} e se si considera la seguente traslazione

$$\begin{cases} x' = z_1 - \frac{b_{01}}{2\lambda_1} \\ y' = z_2 - \frac{b_{02}}{2\lambda_2} \\ z' = z_3 - \frac{b_{03}}{2\lambda_3} \end{cases}$$

poichè $b_{03} = 4, \lambda_3 = 1, b_{021} = b_{02} = 0$,

$$\begin{cases} x' = z_1 \\ y' = z_2 \\ z' = z_3 - 2 \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione della quadrica si ha $2z_1^2 + z_2^2 + (z_3 - 2)^2 + 4(z_3 - 2) - 2 = 0$ da cui si ottiene la forma canonica

$$2z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 6 = 0. \tag{10.23}$$

Modo semplice per scrivere forma canonica senza

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10.6.3 Forma canonica metrica di quadriche semplicemente degeneri

Le equazioni cartesiane delle quadriche semplicemente degeneri sono:

$$\bullet \quad x^2 + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 \quad \text{con } a, b > 0 \quad (\text{Cono})$$

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a \geq b > 0$ (Cilindro ellittico)
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a, b > 0$ (Cilindro iperbolico)
- $ay^2 = x$ con $a > 0$ (Cilindro parabolico)
- **Cono:** $x^2 + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$, ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = ua \sin v \\ z = bu \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$$

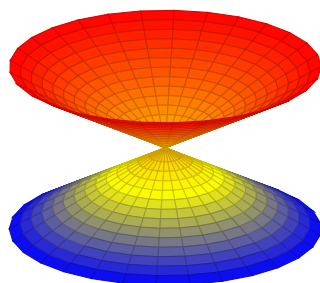


Figura 10.10: Cono

Se facciamo l'intersezione col piano $z = 0$ abbiamo l'ellisse che si riduce a un punto $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, (l'origine) che è detto *vertice del cono*.

Se facciamo l'intersezione con il piano $x = 0$ o con il piano $y = 0$ abbiamo iperboli degeneri

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \text{ ovvero } \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 0, \text{ coppie di rette per il vertice}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \text{ ovvero } \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 0, \text{ coppie di rette per il vertice.}$$

Più in generale se facciamo l'intersezione con un piano del fascio avente come asse l'asse z si hanno sempre coppie di rette per il vertice del cono. Ognuna di queste rette è detta *generatrice del cono*.

Se facciamo l'intersezione con i piani $z = h$, $h \in \mathbb{R}^*$ abbiamo ellissi generali, una qualunque di queste ellissi è detta *direttrice* del cono. Infatti essa è intersecata in un solo punto da ogni generatrice del cono.

Se facciamo l'intersezione con i piani $x = h$, $h \in \mathbb{R}^*$ o con i piani $y = k$, $k \in \mathbb{R}^*$ abbiamo iperboli generali.

In realtà ci sono anche piani la cui intersezione con il cono sono parabole.

- **Cilindro ellittico:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, le sue equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x = a \cos v \\ y = b \sin v \\ z = u \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$$

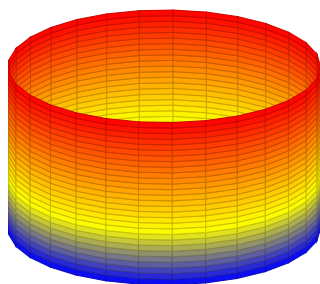


Figura 10.11: Cilindro ellittico

- **Cilindro iperbolico:** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, le sue equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x = \pm a \cosh v \\ y = b \sinh v \\ z = u \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

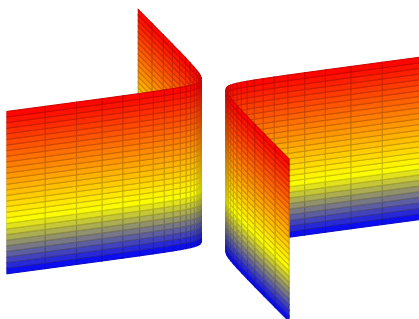


Figura 10.12: Cilindro iperbolico

- **Cilindro parabolico:** $y^2 = x$, le sue equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x = v^2 \\ y = v \\ z = u \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$$

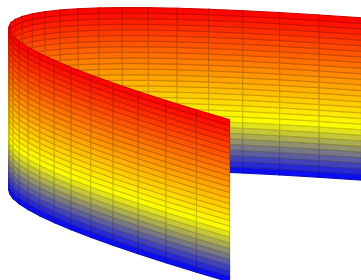


Figura 10.13: Cilindro parabolico

Osserviamo che

- **Cono:** $rg(A) = 3 = rg(A_{00})$, autovalori di A_{00} discordi.
- **Cilindro:** $rg(A) = 3$, $rg(A_{00}) = 2$. Inoltre
 - se $I_2 > 0$ cilindro ellittico;
 - se $I_2 < 0$ cilindro iperbolico;
 - se $I_2 = 0$ cilindro parabolico;

10.6.4 Quadriche doppiamente degeneri

Le quadriche doppiamente degeneri in forma canonica metrica sono:

- $x^2 - \frac{y^2}{a^2} = 0$ con $a > 0$ (Due Piani incidenti)
- $x^2 - a^2 = 0$, con $a > 0$ (Due Piani paralleli)
- **Due Piani incidenti:** $x^2 - \frac{y^2}{a^2} = 0$

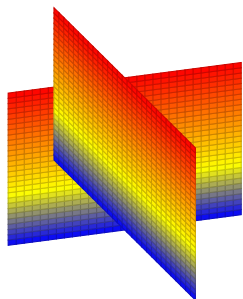


Figura 10.14: due piani incidenti

le sue equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x = \pm \frac{v}{a} \\ y = v \\ z = u \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

- **Due Piani paralleli:** $x^2 - a^2 = 0$,

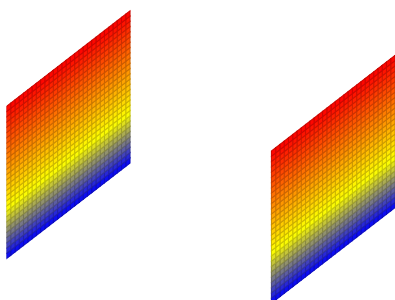


Figura 10.15: due piani paralleli

le sue equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x = \pm a \\ y = v \\ z = u \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

10.6.5 Quadriche triplamente degeneri

Le quadriche triplamente degeneri hanno forma canonica metrica: $x^2 = 0$.

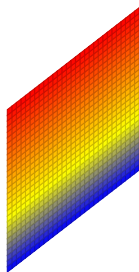


Figura 10.16: due piani coincidenti

10.6.6 Schema per la classificazione delle quadriche

(1) $\det(A) \neq 0$

(a) $\det(A_{00}) \neq 0$

(i) $\det(A) < 0$

- autovalori di A_{00} concordi \rightarrow *ellissoide reale*
- autovalori di A_{00} non concordi \rightarrow *iperboloide ellittico*

(ii) $\det(A) > 0$

- autovalori di A_{00} concordi \rightarrow *ellissoide complesso*
- autovalori di A_{00} non concordi \rightarrow *iperboloide iperbolico*

(b) $\det(A_{00}) = 0$

(i) $\det(A) < 0 \rightarrow$ *paraboloide ellittico*

(ii) $\det(A) > 0 \rightarrow$ *paraboloide iperbolico*

(2) $rg(A) = 3$

(a) $\det(A_{00}) \neq 0 \rightarrow$ *cono*

(b) $\det(A_{00}) = 0 \rightarrow$ *cilindro*

se $I_2 > 0$ cilindro ellittico;

se $I_2 < 0$ cilindro iperbolico;

se $I_2 = 0$ cilindro parabolico;

dove $I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3$ con $\lambda_i, i = 1, 2, 3$, autovalori di A_{00} .

(3) $rg(A) = 2 \rightarrow$ *due piani distinti*

(4) $rg(A) = 1 \rightarrow$ *due piani coincidenti*

Capitolo 11

Appendice

11.1 Campi

Definizione 11.1.1 Sia \mathbb{K} un insieme non vuoto su cui sono definite due operazioni binarie, quella di somma

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$$

$$(a, b) \rightarrow a + b$$

e quella di prodotto

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$$

$$(a, b) \rightarrow a \cdot b$$

La terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ è detta *campo* se sono soddisfatti i seguenti assiomi:

- C1) $(a + b) + c = a + (b + c)$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{K}$ (*proprietà associativa*)
- C2) $a + b = b + a$ per ogni $a, b \in \mathbb{K}$ (*proprietà commutativa*)
- C3) esiste $0 \in \mathbb{K}$ tale che $a + 0 = a$ per ogni $a \in \mathbb{K}$ (0 è detto *elemento neutro della somma*)
- C4) per ogni $a \in \mathbb{K}$ esiste l'opposto, ossia esiste $a' \in \mathbb{K}$ tale che $a + a' = 0$ (l'opposto di a viene denotato con $-a$)
- C5) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{K}$ (*proprietà associativa*)
- C6) $a \cdot b = b \cdot a$ per ogni $a, b \in \mathbb{K}$ (*proprietà commutativa*)
- C7) esiste $1 \in \mathbb{K}$ tale che $a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in \mathbb{K}$ (1 è detto *elemento neutro del prodotto* o anche *unità*)
- C8) per ogni $a \in \mathbb{K}$ con $a \neq 0$ esiste l'inverso, ossia esiste $a^* \in \mathbb{K}$ tale che $a \cdot a^* = a^* \cdot a = 1$ (l'inverso di a viene denotato con a^{-1})
- C9) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{K}$ (*proprietà distributiva*).

Esempio 11.1.2 L'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali, l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali sono esempi di campo con le usuali operazioni di somma e di prodotto.

Daremo un altro esempio di campo, quello dei numeri complessi.

11.1.1 I numeri complessi

Consideriamo l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ e definiamo su esso due operazioni, una di somma e una di prodotto.

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d) \qquad (a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

Osserviamo che $(\mathbb{R}^2, +)$ è un gruppo abeliano rispetto alla somma.

Si verifica facilmente che per il prodotto vale la proprietà associativa, commutativa e la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma.

- La coppia $(1, 0)$ è l'elemento neutro rispetto al prodotto.
- Se $(a, b) \neq (0, 0)$ allora l'inverso di (a, b) rispetto al prodotto è la coppia $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$.

La terna $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ è un campo detto campo dei *numeri complessi* e viene denotato con \mathbb{C} .

Osservazione 11.1.3 Se identifichiamo $a \in \mathbb{R}$ con la coppia $(a, 0) \in \mathbb{C}$ si vede che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Osservazione 11.1.4 La coppia $(0, 1)$ viene denotata con la lettera i e viene detta *unità immaginaria*. Osserviamo che $i^2 = -1$. Infatti $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \equiv -1$.

Osservazione 11.1.5 Il polinomio $x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ non ha radici in reali. Ma se consideriamo $x^2 + 1 \in \mathbb{C}[x]$ esso ha radici in \mathbb{C} , esse sono $i, -i$.

Teorema 11.1.6 (*Teorema fondamentale dell'algebra*) Ogni polinomio non costante a coefficienti in \mathbb{C} ha una radice in \mathbb{C} . Ossia \mathbb{C} è algebricamente chiuso.

Osservazione 11.1.7 Dal Teorema 11.1.6 segue ogni polinomio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ non costante ha un fattore lineare $x - a$, dove $a \in \mathbb{C}$ è una radice di $p(x)$. Quindi gli unici polinomi irriducibili in $\mathbb{C}[x]$ sono i polinomi lineari. Ne segue quindi che ogni polinomio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ è un prodotto di fattori lineari

Osservazione 11.1.8 Data una coppia $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, osserviamo che $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + ib$. Dunque ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$ lo scriviamo come $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, a è detto *parte reale* di z e viene denotato con $a = \operatorname{Re}(z)$, b è detto *parte immaginaria* di z e viene denotato con $b = \operatorname{Im}(z)$.

11.1.2 Rappresentazione geometrica dei numeri complessi

Da un punto di vista geometrico, fissato un riferimento cartesiano ortonormale in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, è possibile stabilire una corrispondenza *uno a uno* tra $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e \mathbb{C} .

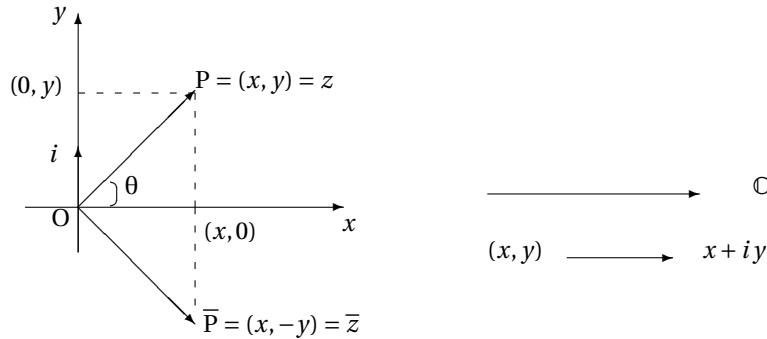


Fig. 11.1.2

I punti sull'asse delle x sono detti *reali*. I punti sull'asse delle y sono detti *immaginari puri*.

Dato $z = x + iy \in \mathbb{C}$, il numero complesso $\bar{z} = x - iy$, (simmetrico di z rispetto all'asse x) è detto *complesso coniugato* di z .

La lunghezza del vettore \vec{OP} , $|\vec{OP}| = \rho$ è detto *modulo* di z e l'angolo θ che il vettore \vec{OP} forma con il semiasse positivo delle x è detto *argomento* di z . Dunque al numero complesso z possiamo associare una coppia (ρ, θ) .

Osservazione 11.1.9 Se $z \leftrightarrow (\rho, \theta)$ e $z' \leftrightarrow (\rho', \theta')$ allora

$$z = z' \text{ se e solo se } \rho = \rho' \wedge \theta = \theta + 2k\pi$$

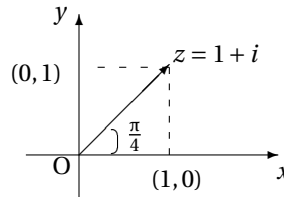
Osservazione 11.1.10 Dalla figura in 11.1.2 si ha che $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$ e quindi

$$z = x + iy = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

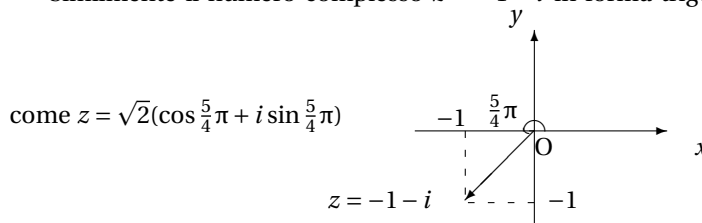
Quest'ultima espressione è detta *forma trigonometrica* di z .

Esempio 11.1.11 Scrivere il numero complesso $z = 1 + i$ in forma trigonometrica. Osserviamo che $\rho = \sqrt{2}$ e l'angolo che esso individua con l'asse positivo delle x è $\frac{\pi}{4}$

e quindi $z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$



Similmente il numero complesso $z = -1 - i$ in forma trigonometrica si scrive



Osservazione 11.1.12 Se i numeri complessi li scriviamo in forma trigonometrica è molto facile calcolarne il prodotto. Sia

$$z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2),$$

allora

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \tag{11.1}$$

Infatti

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 + i^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= \rho_1 \rho_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)] \\ &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

Esercizio 11.1.13 Sia $z_1 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$, $z_2 = \sqrt{2}(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi)$, allora

$$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2}^2 (\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi) + i \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi)) = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2$$

Teorema 11.1.14 (De Moivre) Sia $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ e sia n un intero positivo. Allora

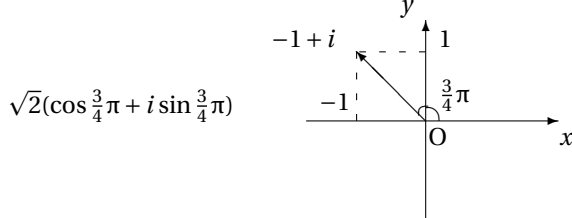
$$z^n = \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \tag{11.2}$$

Dimostrazione La dimostrazione si fa per induzione su n . La (11.2) vale per $n = 2$, (vedi (11.1)). Supponiamo che la relazione (11.2) sia vera per $n - 1$ e dimostriamo che essa vale per ogni n . Infatti

$$\begin{aligned} z^n &= z^{n-1} \cdot z = \rho^{n-1} (\cos((n-1)\theta) + i \sin((n-1)\theta)) \cdot \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \end{aligned}$$

nella penultima uguaglianza si è usata l'ipotesi induttiva, mentre nell'ultima uguaglianza si è usata la regola del prodotto. \square

Esercizio 11.1.15 Calcolare $(-2 + 2i)^4$. Basta calcolare $(-1 + i)^4$. Scriviamo $-1 + i$ in forma trigonometrica. Poiché $\rho = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ e $\theta = \frac{3}{4}\pi$ si ha che $-1 + i =$



e dunque

$$\begin{aligned} (-1 + i)^4 &= ((\sqrt{2})^4 (\cos 4 \frac{3}{4}\pi + i \sin 4 \frac{3}{4}\pi))^{-1} = 2^2 (\cos(3\pi) + i \sin(3\pi)) \\ &= 2^2 (-1 + 0) = -2^2. \end{aligned}$$

Pertanto $(-2 + 2i)^4 = 2^4 (-1 + i)^4 = -2^6 = -64$

Osservazione 11.1.16 Se $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \neq 0$ allora è anche facile calcolare l'inverso

$$z^{-1} = \rho^{-1} [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]$$

Esercizio 11.1.17 Calcolare $(-1 + i)^{-1}$.

Scriviamo $-1 + i$ in forma trigonometrica. Abbiamo visto che $-1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi)$ e dunque

$$\begin{aligned} (-1 + i)^{-1} &= (\sqrt{2}(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi))^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos(-\frac{3}{4}\pi) + i \sin(-\frac{3}{4}\pi)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos(\frac{3}{4}\pi) - i \sin(\frac{3}{4}\pi)) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \end{aligned}$$

La regola (11.1), del prodotto tra numeri complessi, a volte può essere utilizzata per calcolare il valore di certe funzioni trigonometriche.

Esercizio 11.1.18 Calcolare $\sin \frac{\pi}{12}$.

Osserviamo che $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. Sia $z_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$, $z_2 = \cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})$, allora

$$z_1 \cdot z_2 = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$$

D'altra parte $z_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = \cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ da cui segue che

$$z_1 \cdot z_2 = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} + (\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4})i$$

e dunque $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

11.1.3 Esercizi

1. Scrivere in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi:
 $1 + i, -1 + i, \sqrt{3} + i, 1 - i\sqrt{3}$
2. Calcolare la seguente espressione e scrivere il risultato in forma trigonometrica:
 $\frac{10-5i}{3-i} - \frac{1+8i}{1+3i}$
3. Calcolare $(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^{40}$

11.2 Applicazioni e Relazioni

Definizione 11.2.1 Siano A e B due insiemi non vuoti. Il *prodotto cartesiano* di A e B , $A \times B$ è l'insieme delle coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$; in simboli:

$$A \times B := \{(a, b) \in A \times B \mid a \in A, b \in B\}$$

Esempio 11.2.2 Se $A := \{a, b\}$ e $B := \{1, 2, 3\}$ allora

$$A \times B := \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), \}$$

Osserviamo che se $A \neq B$ il prodotto cartesiano $A \times B \neq B \times A$.
 Vogliamo ora dare il concetto di applicazione.

Definizione 11.2.3 Siano A e B due insiemi non vuoti. Una *funzione* (o *applicazione*) da A in B , $f : A \rightarrow B$, è una legge che associa a ogni $a \in A$ uno e un solo elemento $b \in B$ e si scrive $b = f(a)$.

L'insieme A è detto il *dominio* di f e l'insieme B è detto il *codominio* di f . L'*immagine* di f , denotata con $f(A)$ è il seguente sottoinsieme di B

$$f(A) := \{b \in B \mid b = f(a) \text{ per qualche } a \in A\}$$

Per ogni $C \subset B$, la *controimmagine* di C è denotata con $f^{-1}(C)$ ed è così definita

$$f^{-1}(C) := \{a \in A \mid f(a) \in C\}$$

Osservazione 11.2.4 Una funzione f la possiamo pensare come un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$, $f \subset A \times B$ tale che per ogni $a \in A$ esiste un unico $b \in B$ tale che la coppia $(a, b) \in f$ e scriviamo $b = f(a)$.

Esempio 11.2.5 Sia $A = \{-1, 1, 2\}$ e sia $f = \{(-1, -1), (1, 1), (2, 2)\} \subset A \times A$. Allora f è un'applicazione di A in A . Usando la notazione $f : A \rightarrow A$, la legge che definisce f è la seguente: $f(a) = a$. Tale applicazione è detta applicazione identica e viene denotata con $id_A : A \rightarrow A$.

Esempio 11.2.6 Sia $A = \{-1, 1, 2\}$ e sia $B = \{1, 3, 4\}$. Allora $f = \{(-1, 1), (1, 1), (2, 4)\}$ è un'applicazione di A in B poiché per ogni $a \in A$ esiste un unico $b \in B$ tale che $(a, b) \in f$. Usando la notazione $f : A \rightarrow B$, la legge che definisce f è la seguente: $f(a) = a^2$.

Definizione 11.2.7 Un'applicazione $f : A \rightarrow B$ è detta *iniettiva* se $x \neq y$ implica che $f(x) \neq f(y)$.

Osservazione 11.2.8 Un modo equivalente per dire che un'applicazione f è iniettiva è il seguente: f è iniettiva se $f(x) = f(y)$ implica $x = y$.

Esempio 11.2.9 L'applicazione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 3x + 1$ è iniettiva. Infatti da $f(x) = f(y)$ ne segue che $3x + 1 = 3y + 1$ e quindi $x = y$.

Definizione 11.2.10 Un'applicazione $f : A \rightarrow B$ è detta *suriettiva* se per ogni $b \in B$ esiste $a \in A$ tale che $f(a) = b$. Equivalentemente: se $f^{-1}(b) \neq \emptyset$, per ogni $b \in B$.

Esempio 11.2.11 L'applicazione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definita da $f(x) = x^2$ è suriettiva. Infatti per ogni $y \in \mathbb{R}^+$ esiste $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = y$.

Esempio 11.2.12 L'applicazione $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{se } x \text{ é pari} \\ x+1 & \text{se } x \text{ é dispari} \end{cases}$$

è suriettiva.

Sia $n \in \mathbb{Z}$ (codominio). Se n è pari allora $2n, n-1 \in f^{-1}(n)$. Se n è dispari allora $n-1 \in f^{-1}(n)$ e quindi per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $f^{-1}(n) \neq \emptyset$.

Osserviamo che tale applicazione non è iniettiva. Infatti si ha $f(4) = 2 = f(1)$.

Definizione 11.2.13 Un'applicazione $f : A \rightarrow B$ è detta *biiettiva* se f è sia iniettiva che suriettiva.

Diamo ora la definizione di composizione di applicazioni.

Definizione 11.2.14 Siano $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ due applicazioni. L'applicazione $g \circ f$ è l'applicazione di A in C definita nel seguente modo:

$$(g \circ f)(a) := g(f(a)) \quad \text{per ogni } a \in A.$$

Osserviamo che per poter definire $g \circ f$ occorre che il dominio di g contenga l'immagine di f .

Esempio 11.2.15 Siano $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ le applicazioni così definite

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{se } x \text{ é pari} \\ x+1 & \text{se } x \text{ é dispari} \end{cases}$$

$g(x) = 2x$. Poiché il dominio di g contiene l'immagine di f possiamo definire $g \circ f$. Essa è l'applicazione di \mathbb{Z} in \mathbb{Z} così definita:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} g\left(\frac{x}{2}\right) & \text{se } x \text{ é pari} \\ g(x+1) & \text{se } x \text{ é dispari} \end{cases} = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ é pari} \\ 2(x+1) & \text{se } x \text{ é dispari} \end{cases}$$

Similmente possiamo definire $f \circ g$. Essa è l'applicazione di \mathbb{Z} in \mathbb{Z} così definita: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = x$.

Vogliamo ora vedere quale legame esiste tra l'iniettività delle applicazioni f e g e quella di $g \circ f$. Così pure vedremo, tra gli esercizi, che la composizione di applicazioni suriettive è suriettiva e la composizione di applicazioni biiettive è biiettiva.

Teorema 11.2.16 *Siano $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ due applicazioni iniettive. Provare che l'applicazione $g \circ f$ è iniettiva.*

Dimostrazione La composizione $g \circ f$ è un'applicazione di A in C . Dobbiamo provare che se $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ allora $x = y$. Da $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ ne segue che $g(f(x)) = g(f(y))$, da cui, utilizzando l'iniettività di g , ne segue che $f(x) = f(y)$. Quest'ultima uguaglianza implica che $x = y$, essendo f iniettiva. \square

Definizione 11.2.17 Siano $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ due applicazioni. Se l'applicazione $g \circ f = id_A$ si dice che f è un'inversa destra di g e che g è un'inversa sinistra di f . Se si ha inoltre che $f \circ g = id_B$ si dice che f è un'inversa bilatera di g .

Esempio 11.2.18 Consideriamo l'applicazione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definita da $f(x) = x^2$. Tale applicazione ammette come inversa destra le seguenti applicazioni $g, h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, dove $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = -\sqrt{x}$.

Vogliamo ora dare una caratterizzazione delle applicazioni iniettive, suriettive e biiettive. Abbiamo il seguente teorema:

Teorema 11.2.19 *Sia $f : A \rightarrow B$ un'applicazione. Si ha:*

- (i) f è iniettiva se e solo se f ammette un'inversa sinistra.
- (ii) f è suriettiva se e solo se f ammette un'inversa destra.
- (iii) f è biiettiva se e solo se f ammette un'inversa bilatera. In questo caso l'inversa bilatera è unica.

Dimostrazione (i) Supponiamo che f ammetta un'inversa sinistra, sia essa $g : B \rightarrow A$. Si ha dunque che $g \circ f = id_A$. Se $f(x) = f(y)$ allora applicando g si ha che $g(f(x)) = g(f(y))$ da cui segue che $x = y$, essendo $g \circ f = id_A$.

Viceversa supponiamo che f sia iniettiva e facciamo vedere che esiste un'inversa sinistra di f . Dobbiamo quindi costruire un'applicazione $g : B \rightarrow A$ tale che $g \circ f = id_A$. Sia $b \in B$. Se $b \in f(A)$ allora essendo f iniettiva ne segue che esiste un unico $a \in A$ tale che $f(a) = b$, poniamo quindi $g(b) = a$. Se $b \in B - f(A)$ allora poniamo $g(b) = a_0$, con $a_0 \in A$. Si verifica facilmente che $g \circ f = id_A$.

(ii) Supponiamo che f ammetta un'inversa destra, sia essa $g : B \rightarrow A$. Si ha dunque che $f \circ g = id_B$. Facciamo vedere che per ogni $b \in B$ esiste $a \in A$ tale che $f(a) = b$. Prendiamo come $a = g(b)$.

Viceversa supponiamo che f sia suriettiva e facciamo vedere che esiste un'inversa destra di f . Dobbiamo quindi costruire un'applicazione $g : B \rightarrow A$ tale che $f \circ g = id_B$. Sia $b \in B$. Allora essendo f suriettiva ne segue che esiste almeno un $a \in A$ tale che $f(a) = b$, poniamo quindi $g(b) = a$. Si verifica facilmente che $f \circ g = id_B$.

(iii) La prima parte segue da (i) e (ii). Resta da dimostrare la seconda parte. Sia g un'inversa sinistra di f , ossia $g \circ f = id_A$, e sia h un'inversa destra di f , ossia $f \circ h = id_B$. Allora si ha che $g = g \circ id_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = id_A \circ h = h$. \square

Definizione 11.2.20 Una *relazione* (o una *relazione binaria*) R su un insieme non vuoto A è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times A$. Se la coppia $(a, b) \in R$ noi scriviamo aRb e diciamo che a è in relazione con b .

Esempio 11.2.21 Sia $A = \{-1, 2, 3\}$ e sia $R = \{(-1, -1), (2, -1), (2, 2), (3, 3)\}$. R è una relazione su A .

Esempio 11.2.22 Sia A un insieme non vuoto. Ogni applicazione di A in A è una relazione su A .

Osservazione 11.2.23 Non tutte le relazioni sono applicazioni. Nell'esempio 11.1.2 abbiamo che $(2, -1)$ e $(2, 2)$ appartengono entrambe a R e quindi R non può essere un'applicazione poiché per un'applicazione l'elemento b della coppia (a, b) deve essere unico.

Esempio 11.2.24 In \mathbb{R} definiamo la seguente relazione $R: xRy$ se e solo se $x \leq y$.

Definizione 11.2.25 Sia A un insieme non vuoto. Sia R una *relazione* su A . Diciamo che R è

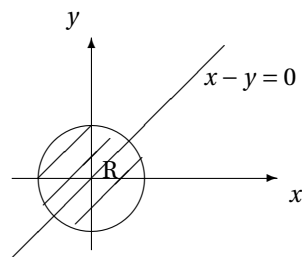
- (1) *riflessiva*: se aRa per ogni $a \in A$;
- (2) *simmetrica*: se aRb implica bRa ;
- (3) *transitiva*: se aRb e bRc implica aRc ;
- (4) *antisimmetrica*: se aRb e bRa implica $a = b$.

Osservazione 11.2.26 La relazione nell'esempio 11.2.21 è una relazione riflessiva, transitiva, ma non è simmetrica. La relazione nell'esempio 11.2.24 è riflessiva, antisimmetrica, transitiva, ma non è simmetrica.

Per relazioni definite nell'insieme dei numeri reali c'è un modo geometrico che ci permette di decidere se la relazione R è riflessiva o simmetrica. Precisamente: essere riflessiva è lo stesso che dire che la bisettrice del primo e terzo quadrante è tutta contenuta in R . L'essere simmetrica vuol dire che se $(x, y) \in R$ anche il suo simmetrico rispetto alla retta $x - y = 0$ sta in R .

Esempio 11.2.27 Sia $R \subset \mathbb{R}$ il seguente sottoinsieme

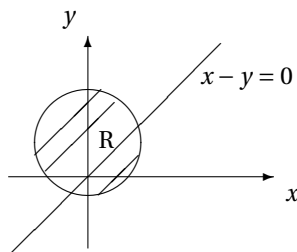
$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$



Tale relazione non è riflessiva poiché la retta $x - y = 0$ non è tutta contenuta in R . Essa è invece una relazione simmetrica in quanto il sottoinsieme $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è simmetrico rispetto alla retta $x - y = 0$.

Esempio 11.2.28 Sia $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ il seguente sottoinsieme

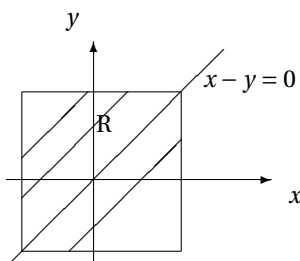
$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + (y - 1)^2 \leq 3\}$$



Tale relazione non è riflessiva (la retta $x - y = 0$ non è tutta contenuta in R), nè simmetrica (il sottoinsieme R , che è un cerchio in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, non è simmetrico rispetto alla retta $x - y = 0$ poiché non ha il centro sulla retta $x - y = 0$).

Esempio 11.2.29 Sia $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ il seguente sottoinsieme

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \max(|x|, |y|) \leq 1\}$$



Tale relazione non è riflessiva poiché la retta $x - y = 0$ non è tutta contenuta in R . Essa è invece una relazione simmetrica in quanto il sottoinsieme $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è simmetrico rispetto alla retta $x - y = 0$.

Noi siamo interessati a relazioni che hanno particolari proprietà, in particolare siamo interessati a relazioni di equivalenza.

Definizione 11.2.30 Sia A un insieme non vuoto. Sia R una *relazione* su A . Diciamo che R è una *relazione di equivalenza* se R gode della proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Esempio 11.2.31 In \mathbb{Z} definiamo la seguente relazione:

$$\{nRm \text{ se e solo se } n - m = 2k \text{ per qualche } k \in \mathbb{Z}\}$$

Si verifica facilmente che R è una relazione di equivalenza.

Esempio 11.2.32 Sia \mathcal{R} l'insieme delle rette del piano. In \mathcal{R} definiamo la seguente relazione:

$$\{rRs \text{ se e solo se la retta } r \text{ è parallela alla retta } s, \text{ con } r, s \in \mathcal{R}\}$$

Si verifica facilmente che R è una relazione di equivalenza.

Definizione 11.2.33 Sia A un insieme non vuoto e sia R una relazione di equivalenza su A . Per ogni $a \in A$ l'insieme

$$[a]_R := \{x \in A \mid xRa\}$$

è detto *classe di equivalenza* di a .

Esempio 11.2.34 In \mathbb{Z} consideriamo la relazione di equivalenza definita in 11.2.31, ovvero

$$\{nRm \text{ se e solo se } n - m = 2k, \text{ per qualche } k \in \mathbb{Z}\}$$

Osserviamo che: $[0]_R = 2\mathbb{Z}$, l'insieme degli interi pari; $[1]_R = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 1 = 2k\}$, l'insieme degli interi dispari.

Una relazione di equivalenza definisce una partizione dell'insieme su cui essa è definita. Gli elementi della partizione sono precisamente le classi di equivalenza. Cominciamo col vedere cosa si intende per partizione di un insieme.

Definizione 11.2.35 Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ una collezione di sottoinsiemi di un insieme non vuoto A . $\{A_i\}_{i \in I}$ è detta *partizione* di A se:

- (1) $A_i \neq \emptyset$ per ogni $i \in I$;
- (2) $A = \bigcup A_i$;
- (3) $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$.

11.2.1 Esercizi

1. Dire quali delle seguenti applicazioni di \mathbb{Z} in \mathbb{Z} è iniettiva, suriettiva, biiettiva:

1a.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ è pari} \\ 2x-1 & \text{se } x \text{ è dispari} \end{cases}$$

1b.

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \text{ è pari} \\ 2x & \text{se } x \text{ è dispari} \end{cases}$$

1c.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ è pari} \\ \frac{x-1}{2} & \text{se } x \text{ è dispari} \end{cases}$$

2. Siano $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ due applicazioni suriettive. Provare che l'applicazione $g \circ f$ è suriettiva.
3. Siano $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ due applicazioni biettive. Provare che l'applicazione $g \circ f$ è biettiva.
4. Siano $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ due applicazioni. Provare che l'applicazione g è suriettiva se $g \circ f$ è suriettiva.
5. Siano $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ e $h : C \rightarrow D$ applicazioni. Provare che l'applicazione $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, ovvero la composizione di applicazioni gode della proprietà associativa.
6. Sia A un insieme non vuoto e sia $P(A)$ l'insieme delle parti di A . In $P(A)$ definiamo la seguente relazione: XRY se e solo se $X \subseteq Y$. Dire di quali proprietà gode la relazione R .
7. Nell'insieme \mathbb{Z} definiamo le seguenti relazioni:
 - (a) xRy se e solo se $y = 3x$;
 - (b) xRy se e solo se $x > y$;
 - (c) xRy se e solo se il massimo comune divisore tra x e y è 1.

Dire, giustificando la risposta, di quali proprietà gode la relazione R .

8. Nell'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiamo la seguente relazione:

$\{ARB \text{ se e solo se essi hanno la stessa distanza dall'origine, con } A, B \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$

Verificare che tale relazione è di equivalenza e determinare le classi di equivalenza individuate da essa.

9. Sia A un insieme non vuoto e sia R una relazione di equivalenza su A . Verificare che $\{[a]_R\}_{a \in A}$ è una partizione di A .

11.3 Induzione Matematica

L'induzione matematica è una tecnica di dimostrazione molto importante che può essere usata per dimostrare che una certa proposizione $P(n)$ è vera per ogni intero positivo n . Essa non è uno strumento per scoprire nuove formule o teoremi ma può essere usata per dimostrare risultati ottenuti in altri modi. Tale tecnica si fonda sul seguente assioma relativo agli interi:

11.3.1 Assioma del Buon Ordinamento :

Ogni sottoinsieme non vuoto S di \mathbb{Z}^+ ha un minimo, ossia esiste un $n_0 \in S$ tale che $n_0 \leq s$ for all $s \in S$.

Tale assioma del buon ordinamento da luogo a due diverse forme di induzione matematica.

Teorema 11.3.1 (*Induzione Matematica 1^a forma*) Sia $P(n)$ una proposizione sugli interi positivi. Supponiamo che

- (i) $P(1)$ è vera;
- (ii) Per ogni intero positivo m , se $P(m)$ è vera allora $P(m + 1)$ è vera.

Allora $P(n)$ è vera per ogni intero positivo n .

Dimostrazione Supponiamo che $P(n)$ sia falsa per qualche intero positivo n . Sia $S = \{n \in \mathbb{Z}^+ \mid P(n) \text{ è falsa}\}$. Allora S è un sottoinsieme non vuoto di \mathbb{Z}^+ . Dall'assioma del buon ordinamento ne segue che S ha minimo e sia esso n_0 . Poiché $P(1)$ è vera ne segue che $n_0 \neq 1$. Quindi $n_0 - 1$ è un intero positivo e inoltre $P(n_0 - 1)$ è vera essendo $n_0 - 1 < n_0$. Da (ii) si ha che $P(n_0 - 1 + 1)$ è vera, ossia $P(n_0)$ è vera e ciò contraddice il fatto che $n_0 \in S$. Poiché l'aver supposto $P(n)$ falsa per qualche n ha dato luogo a una contraddizione si ha che $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$. \square

Osservazione 11.3.2 Una dimostrazione per induzione consiste quindi di 2 passi:

- I) *Primo passo dell'induzione* Si verifica che $P(1)$ è vera.
- II) *Passo induttivo* Si dimostra per un intero positivo m arbitrario che se $P(m)$ è vera allora $P(m + 1)$ è vera.

Esempi di dimostrazioni fatti usando l'induzione matematica:

Esempio 11.3.3 Usare l'induzione matematica per dimostrare che

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Dimostrazione Noi prendiamo come $P(n)$ l'affermazione:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

e vogliamo dimostrare che ciò è vero per ogni intero positivo n .

Primo passo dell'induzione Dobbiamo verificare che $P(1)$ è vera.

$P(1) : 1 = 1^2$ che è certamente vero.

Passo induttivo Assumiamo $P(m)$ vera per qualche intero positivo arbitrario m e usiamo tale ipotesi per dimostrare che $P(m+1)$ è vera. In altre parole noi assumiamo che

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2m - 1) = m^2$$

e da ciò vogliamo dedurre che

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2m + 1) = (m + 1)^2$$

Poiché assumiamo che $P(m)$ è vera abbiamo che

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2m + 1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2m - 1) + (2m + 1) = m^2 + (2m + 1) = (m + 1)^2.$$

Essendo $P(1)$ è vera e poiché l'implicazione $P(m) \implies P(m + 1)$ è vera si ha che $P(n)$ è vera per ogni intero positivo n . \square

Esempio 11.3.4 Usare l'induzione matematica per dimostrare che se A è un insieme finito di cardinalità n allora A ha 2^n sottoinsiemi.

Dimostrazione Noi prendiamo come $P(n)$ l'affermazione: Un insieme con n elementi ha 2^n sottoinsiemi.

Primo passo dell'induzione: $P(1)$ è vera poiché un insieme con un elemento ha $2^1 = 2$ sottoinsiemi, precisamente l'insieme vuoto e l'insieme stesso.

Passo induttivo: Assumiamo che $P(m)$ è vera per qualche intero positivo arbitrario m e usiamo tale ipotesi per dimostrare che $P(m + 1)$ è vera. In altre parole noi assumiamo che un insieme con m elementi ha 2^m sottoinsiemi e da ciò vogliamo dedurre che un insieme con $m + 1$ elementi ha 2^{m+1} sottoinsiemi. Per dimostrare ciò sia A l'insieme con $m + 1$ elementi, siano essi a_1, \dots, a_{m+1} . Dunque $A = A' \cup \{a_{m+1}\}$, dove $A' = \{a_1, \dots, a_m\}$. I sottoinsiemi di A si possono ottenere nel seguente modo. Per ogni sottoinsieme C di A' ci sono due sottoinsiemi di A , precisamente C e $C \cup \{a_{m+1}\}$. Questi sono tutti i sottoinsiemi distinti di A . Poiché abbiamo 2^m sottoinsiemi di A' i sottoinsiemi di A saranno $2 \cdot 2^m = 2^{m+1}$. Quindi per induzione si ha che $P(n)$ è vera per ogni intero positivo n . \square

C'è un'altra forma di Induzione Matematica che risulta spesso utile nelle dimostrazioni. Essa differisce dalla prima forma per quanto riguarda il passo induttivo. Precisamente abbiamo:

Teorema 11.3.5 (*Induzione Matematica, 2^a forma*) Sia $P(n)$ una proposizione sugli interi positivi. Supponiamo che

(i) $P(1)$ è vera;

(ii) Per ogni intero positivo m , se $P(k)$ è vera per tutti gli interi positivi $k < m$, allora $P(m)$ è vera.

Allora si ha che $P(n)$ è vera per ogni intero positivo n .

La dimostrazione è simile a quella data per la 1^a forma e quindi viene omessa.

Un esempio di dimostrazione in cui viene usata la seconda forma dell'Induzione Matematica è la dimostrazione del *Teorema fondamentale dell'Aritmetica*.

11.3.2 Esercizi

1. Dimostrare che

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Dimostrare che

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Usare l'induzione matematica per dimostrare che

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

4. Usare l'induzione matematica per dimostrare che $n < 2^n$ per ogni intero positivo n .
5. Usare l'induzione matematica per dimostrare che $2^n < n!$ per ogni intero positivo n con $n \geq 4$.
6. Usare l'induzione matematica per dimostrare che 3 divide $n^3 + 2n$ per ogni intero non negativo n .

11.4 Gruppo delle permutazioni

Sia $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un insieme finito di n elementi. X può essere messo in corrispondenza 1 a 1 con l'insieme $\{1, \dots, n\}$. Un'applicazione biunivoca di X in se stesso è detta *permutazione*. La notazione usata è quella di una tabella in cui sulla prima riga ci sono gli elementi del dominio e sulla seconda riga le immagini di tali elementi via f

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$$

Denotiamo con S_n l'insieme di tutte le permutazioni su n elementi. Osserviamo che la cardinalità, $|S_n|$, di S_n è precisamente $n!$.

Infatti data un'applicazione $f \in S_n$ noi conosciamo f se conosciamo le immagini di tutti gli elementi $\{1, \dots, n\}$. Dato 1, $f(1)$ lo posso scegliere esattamente in n modi in $\{1, \dots, n\}$. Per l'elemento 2 ci sono esattamente $n - 1$ modi di scegliere $f(2) \in \{1, \dots, n\}$ (questo perché f è biunivoca). Per l'elemento 3 ci sono esattamente $n - 2$ modi di scegliere $f(3) \in \{1, \dots, n\}$ e così via fino ad avere un solo modo di scegliere $f(n) \in \{1, \dots, n\}$.

Dunque in definitiva le applicazioni biunivoche $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ sono $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$ e dunque la cardinalità di S_n , $|S_n| = n!$.

Esempio 11.4.1 Sia $n = 3$. Le permutazioni su 3 elementi sono precisamente 6. Se le indichiamo con σ_i , per $i = 1, \dots, 6$, si ha

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vediamo un modo semplice per comporre due permutazioni. Consideriamo, per esempio $\sigma_3, \sigma_6 \in S_3$.

$$\sigma_3 \circ \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Si vede facilmente che $\sigma_3 \circ \sigma_6 \neq \sigma_6 \circ \sigma_3$.

Vediamo ora un modo semplice per trovare l'inversa di una permutazione f :

- Si scambiano le righe
- Si ordinano le colonne in modo tale che $f(x_i) = 1$ sia al primo posto, $f(x_j) = 2$ sia al secondo posto e così di seguito.

Esempio 11.4.2 Siano $f \in S_5$.

$$\begin{aligned} f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} &\xRightarrow{\text{scambio di righe}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{scambio di colonne}} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = f^{-1} \end{aligned}$$

All'insieme S_n è possibile dare la struttura di gruppo e l'operazione è quella di composizione. (S_n, \circ) è detto *gruppo simmetrico* su n elementi.

Per avere una notazione più semplice per una permutazione faremo vedere che è possibile scriverla come prodotto di cicli disgiunti. Partiamo con un esempio, ossia consideriamo le seguenti permutazioni

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Vediamo che con σ_1 :

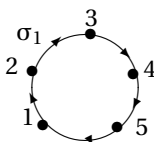


Figura 11.1: $\sigma_1 = (12345)$ è un ciclo

in questo caso scriviamo semplicemente $\sigma_1 = (12345)$ e tale permutazione è detto *ciclo*.

Con σ_2 si ha che

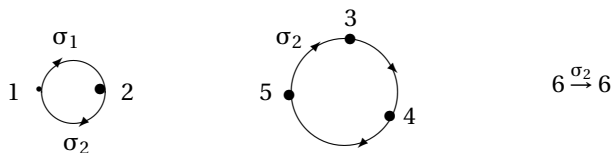


Figura 11.2: $\sigma_2 = (12)(345)$ è un prodotto di 2 cicli disgiunti

in questo caso scriviamo semplicemente $\sigma_2 = (12)(345)(6) = (12)(345)$, ossia σ_2 è prodotto di 2 cicli disgiunti, i cicli di lunghezza 1 non si scrivono.

In generale per scrivere una permutazione f come prodotto di cicli disgiunti si fa la seguente cosa:

$$1 \rightarrow f(1) \rightarrow f(f(1)) \rightarrow f(f(f(1))) \rightarrow \dots \rightarrow f^{k-1}(1) \rightarrow 1$$

Infatti poiché $f^k(1) \in \{1, 2, \dots, n\}$ esisterà un valore di k che mi da 1.

Ora si ritorna a f e si parte da $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ con $i \notin \{1, f(1), \dots, f^{k-1}(1)\}$ e si rifà la stessa cosa di prima, ossia

$$i \rightarrow f(i) \rightarrow f(f(i)) \rightarrow f(f(f(i))) \rightarrow \dots \rightarrow f^{s-1}(i) \rightarrow i$$

e si va avanti fino a che non si sono esauriti tutti i valori di $\{1, 2, \dots, n\}$

Quindi otteniamo che

$$f = (1, f(1), \dots, f^{k-1}(1))(i, f(i), \dots, f^{s-1}(i)) \dots (\dots)$$

Ogni permutazione della forma $(1, f(1), \dots, f^{k-1}(1))$ è detto ciclo di *lunghezza* k .

Definizione 11.4.3 Due cicli si dicono *disgiunti* se gli insiemi costituiti dagli elementi dei due cicli sono insiemi disgiunti. Una permutazione è detta *ciclica* se essa è un ciclo.

Osserviamo che in S_3 tutte le permutazioni sono cicliche. Infatti gli elementi di S_3 scritti in forma ciclica sono

$$S_3 = \{id, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

Scriviamo S_4 con notazione più semplice

$$S_4 = \{id, (12), (13), (14), (23), (24), (34), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), (1234), (13)(24), (1243), (14)(23), (1423), (12)(34), (1324), (1342), (1432)\}$$

Definizione 11.4.4 Una permutazione è detta *trasposizione* se essa scambia solo due elementi tra loro e lascia fissi tutti i restanti elementi.

Osservazione 11.4.5 Ogni permutazione può essere scritta come prodotto di trasposizioni, anche se tale scrittura non è unica. Per esempio

$$\sigma = (145236) = (16)(13)(12)(15)(14)$$

Definizione 11.4.6 A ogni permutazione σ possiamo associare un intero, detto *segno della permutazione*, che viene denotato con $sign(\sigma)$. Esso è così definito

$$sign(\sigma) := \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma = \text{prodotto di un numero pari di trasposizioni} \\ -1 & \text{se } \sigma = \text{prodotto di un numero dispari di trasposizioni} \end{cases}$$

Esempio 11.4.7 Si considerino le seguenti permutazioni:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = (1523)$$

Allora $\sigma_1 = (12453) = (13)(15)(14)(12)$ e pertanto $sign(\sigma_1) = 1$ essendo σ_1 prodotto di un numero pari di trasposizioni. Se scriviamo σ_2 come prodotto di trasposizioni abbiamo $\sigma_2 = (1523) = (13)(12)(15)$ allora $sign(\sigma_2) = -1$ essendo σ_2 prodotto di un numero dispari di trasposizioni.

Bibliografia

- [1] T.M. Apostol: Calcolo, volume secondo Geometria, Boringhieri
- [2] G. Campanella: Esercizi di Algebra Lineare e Geometria, Aracne
- [3] C. Ciliberto: Appunti di Algebra Lineare, Unitor
- [4] F. Flamini, A. Verra: Matrici e Vettori. Corso di base di geometria e algebra lineare, Carocci
- [5] W.K. Nicholson: Algebra lineare. Dalle applicazioni alla teoria, McGraw-Hill
- [6] E. Sernesi.: Geometria 1, Bollati Boringhieri, seconda edizione, 2000

Indice analitico

- Affinità, 156
- Algoritmo di Gram-Schmidt, 121
- Algoritmo per calcolare A^{-1} , 31
- Algoritmo per selezionare una base da un sistema di generatori, 50
- Angolo convesso, 114
 - tra due piani, 146
 - tra due rette, 146
 - tra una retta e un piano, 147
- Applicazione, 228
 - biiettiva, 229
 - iniettiva, 229
 - suriettiva, 229
- Applicazione lineare, 62
 - nullità di, 64
 - proprietà delle, 65
 - rango di, 64
- Asintoto dell'iperbole, 174
- Assi di una conica, 189
- Assioma del Buon Ordinamento, 235
- Autospazio, 81
 - generalizzato, 99
- Autovalore, 81
 - molteplicità algebrica di un, 86
 - molteplicità geometrica di un, 86
- Autovettore, 81
- Base, 48
 - canonica di \mathbb{R}^n , 48
 - complemento di una, 51
 - diagonalizzante, 81
 - duale, 78
 - ortonormale, 123
- Blocco di Jordan, 92
- Cambi di base, 69
- Campo, 223
 - dei complessi, 224
- centro della conica, 188
- Classe di equivalenza, 233
- Classificazione proiettiva delle coniche, 203
- Cofattore, 36
- Combinazione lineare di vettori, 47
- Conica, 166
 - affinemente equivalente, 166
 - assi di una, 176
 - centro, 168
 - classe di equivalenza, 170
 - degenere, 168
 - ellisse, 170
 - invarianti ortogonali, 174
 - iperbole, 170
 - isometrica o congruente, 166
 - matrice associata alla, 166
 - non-degenere, 168
 - parabola, 170
 - rango della, 168
 - supporto, 166
- Determinante, 36
 - regola di Sarrus, 35
 - significato geometrico del, 41

- sviluppo di Laplace del, 36
- Diametri
coniugati, 189
- Diametro
di una conica, 188
- Dimensione
di uno spazio vettoriale, 50
- Distanza
di due rette sghembe, 145
di un punto da un piano, 142
di un punto da una retta, 144
- Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,
118
- Disuguaglianza Triangolare, 119
- Eccentricità, 182
della parabola, 174
di un'ellisse, 173
di un'iperbole, 174
- Eliminazione di Gauss, 21
- Endomorfismo, 63
autoaggiunto, 127
ciclico, 94
diagonalizzabile, 81
simmetrico, 128
- Fascio di coniche, 183
- Forma bilineare
antisimmetrica, 192
degenere, 192
non-degenere, 192
simmetrica, 192
- Forma canonica di Jordan, 92
- Forma quadratica, 194
definita, 199
diagonalizzazione di una , 195
indefinita, 199
segnatura di una, 198
semidefinita, 199
- Forme bilineari, 191
- Funzionale lineare, 78
coordinato, 79
- Fuoco
di un'ellisse, 173
di un'iperbole, 174
- Gruppo
delle affinità, 157
delle traslazioni, 157
simmetrico, 239
- Induzione Matematica, 235
- Insieme ortogonale, 119
- Insieme ortonormale, 119
- Invarianti per similitudine, 85
- Isometria, 162
- Matrice, 15
a scala per righe, 17
antisimmetrica, 17
associata a un'applicazione
lineare, 66
associata a una conica, 166
associata a una quadrica, 206
congruente, 192
del cambio di base, 69
diagonale, 17
diagonalizzante, 81
elementare, 20
hermitiana, 149
identità, 17
inversa, 32
invertibile, 31
minori principali, 199
nilpotente, 93
indice di nilpotenza, 93
quadrata, 16
rango per colonne di, 56
rango per righe di, 24
simile, 74
simmetrica, 17
trasposta, 16
triangolare, 17
unitaria, 152
unitriangolare, 17
- matrice ortogonale, 123
- Nucleo di un'applicazione lineare, 63
- Omotetia, 159
- Permutazione, 238
ciclica, 239
segno di una, 240
- Piano(i), 131

- paralleli, 132
- paralleli agli assi coordinati, 133
- ampliato, 169
- equazione cartesiana di un, 132
- equazione vettoriale di un, 131
- equazioni parametriche di un, 131
- ortogonali, 142
- Pivot, 22, 23
- Polinomio caratteristico, 82
- radici del, 82
- Prodotto cartesiano, 228
- Prodotto hermitiano standard in \mathbb{C}^n , 150
- proprietà del, 151
- Prodotto scalare standard in \mathbb{R}^n , 111
- proprietà del, 111
- Prodotto tra matrici, 18
- proprietà del, 19
- Prodotto vettoriale
- proprietà del, 114
- Proiezione ortogonale di un vettore, 113
- punti base del
- fascio di coniche, 183
- Quadratica, 205, 206
- cilindro, 207
- cono, 207
- direttrice del, 217
- generatrice del, 217
- vertice del, 217
- doppiamente degenerare, 207
- ellissoide, 207
- assi di simmetria, 211
- centro di simmetria, 211
- ellissi principali, 211
- piani di simmetria, 211
- semiassi, 211
- vertici, 211
- equazione generale, 205
- iperboloide, 207
- ellittico, o a due falde, 208
- iperbolico, o a una falda, 208
- iperboloide iperbolico, o a una falda
- ellise di gola, 213
- schiere di rette, 214
- matrice associata alla, 206
- non degenerare, 207
- paraboloide, 207
- ellittico, 208
- iperbolico, 208
- rango, 207
- semplicemente degenerare, 207
- superficie sferica, 205
- supporto, 205
- triplamente degenerare, 207
- Rappresentazione geometrica dei numeri complessi, 225
- Relazione, 231
- di equipollenza, 8
- di equivalenza, 232
- Relazione di Grassmann, 53
- Retta(e), 129
- incidenti, 132
- direzione della, 130
- equazione vettoriale della, 130
- equazioni cartesiane della, 130
- equazioni parametriche della, 130
- parallele, 131
- parallele agli assi coordinati, 134
- sghembe, 132
- rette
- ortogonali, 141
- Riferimento affine, 156
- Riferimento ortonormale, 161
- Simbolo di Kronecker, 78
- Sistema di equazioni lineari
- omogeneo
- soluzioni base del, 31
- Sistema di equazioni lineari, 25
- colonna dei termini noti del, 27
- colonna delle incognite del, 27
- compatibile, 27
- equivalente, 27
- forma matriciale del, 27
- incompatibile, 27
- matrice completa del, 27

- matrice dei coefficienti del, 26
- omogeneo, 30
 - autosoluzioni del, 30
- Regola di Cramer per, 40
- Sottospazio
 - invariante, 94
 - radice, 99
- Sottospazio(i), 46
 - vettoriale, 46
 - banale, 46
 - equazioni parametriche e cartesiane di, 51
 - generato da un insieme finito di vettori, 47
 - intersezione di, 47
 - somma di, 48
 - somma diretta di, 48
 - supplementari, 48
- Spazio
 - affine, 155
 - dei vettori geometrici, 9
 - Euclideo, 161
 - generato dalle colonne di una matrice, 55
 - generato dalle righe di una matrice, 55
 - isomorfo, 66
 - vettoriale, 11, 45
 - duale, 78
- Teorema
 - fondamentale dell'algebra, 224
 - De Moivre, 226
 - del rango, 56
 - della nullità più il rango, 64
 - dello sviluppo di Fourier, 120
 - di Binet, 39
 - di Pitagora, 120
 - di Rouché-Capelli, 57
 - Spettrale, 128
- Teorema di
 - Sylvester, 197
- Traslazione, 157
- Trasposizione, 240
- Vertice
 - di un'ellisse, 173
 - di un'iperbole, 173
- Vettore
 - isotropo, 193
 - ortogonale, 192
- Vettore(i)
 - angolo convesso tra, 114, 119
 - applicato, 7
 - colonna, 18
 - coordinate di un, 49
 - direttore, 130
 - equipollente, 7
 - geometrico, 8
 - linearmente dipendenti, 48
 - linearmente indipendenti, 48
 - lunghezza di un, 112, 117
 - normale a un piano, 141
 - ortogonalità tra, 113, 119, 151
 - radice, 99
 - riga, 18