ESERCIZI E COMPLEMENTI SUL PROCESSO DI POISSON

1) Sia $N(t)$ un processo di Poisson di parametro λ e $T > 0$ un istante fissato. Dimostrare che il processo

$$W(t) = N(T+t) - N(T)\,, \qquad t \geq o\,,$$

e' anche esso un processo di Poisson indipendente da $(N(t))_{t\in[0,T]}$.

Soluzione: Per dimostrare che W e' un processo di Poisson dobbiamo verificare che esso soddisfa la definizione del processo di Poisson. Innanzi tutto abbiamo che $W(0) = N(T) - N(T) = 0$. Verifichiamo ora che W e' un processo ad incrementi indipendenti. Prendiamo due intervalli disgiunti (ma si puo generalizzare facilmente ad un qualunque numero finito) $I_1 := (t_a^1, t_b^1]$ e $I_2 := (t_a^2, t_b^2]$. Abbiamo che $W(I_1) = N(T + t_b^1) - N(T + t_a^1) = N(T + I_1)$ e $W(I_2) = N(T + t_b^2) - N(T + t_a^2) = N(T + I_2)$. Ma poiché anche gli intervalli $T + I_1$ e $T + I_2$ sono disgiunti (si noti che abbiamo usato la seguente simbologia $T + I := \{x \in \mathbb{R} : (x - T) \in I\}$) ed N e' ad incrementi indipendenti otteniamo che $W(I_1)$ e $W(I_2)$ sono due variabili casuali indipendenti fra loro.

Prendiamo ora $0 < s < t$ e consideriamo $W(t) - W(s) = N(T+t) - N(T+s)$. Poiché N e' un proceso di Poisson di parametro λ abbiamo che $W(t) - W(s)$ ha una distribuzione di Poisson di parametro $\lambda(t - s)$. Quindi W e' un processo di Poisson di parametro λ.

Per quanto riguarda l'indipendenza dobbiamo dimostrare che comunque presi n tempi $s_1, \ldots, s_n$ tali che $s_i \in [0, T]$ e comunque presi k tempi $t_1, \ldots, t_k$; le variabili casuali $N(s_1), \ldots, N(s_n)$ ele variabili casuali $W(t_1), \ldots, W(t_k)$ sono indipendenti tra loro. Questo segue dalla semplice osservazione che $W(t_i) = N(T + t_i) - N(T)$, $N(s_j) = N(s_j) - N(0)$, il fatto che gli intervalli $(T, T+t_i]$ e $(0, s_j]$ sono disgiunti e l'indipendenza degli incrementi del processo N.

2) Dato un processo di Poisson bidimensionale di parametro λ, si determini la distribuzione ed il valor medio della distanza dall'origine del punto piú vicino.

Soluzione: In modo informale un processo di Poisson bidimensionale (ma si puó generalizzare facilmente a qualunque dimensione) si puó definire come una misura di probabilitá su configurazioni di punti del piano tale che dati due sottoinsiemi misurabili $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $b \subseteq \mathbb{R}^2$ tali che $A \cap B = \emptyset$ allora le variabili casuali $N(A)$ ed $N(B)$ che rappresentano rispettivamente il numero di punti che appartengono all'insieme A ed il numero di punti che appartengono all'insieme B, sono tra di loro indipendenti. Inoltre dato il sottoinsieme A avente misura di Lebesgue $|A|$ la variabile casuale $N(A)$ ha una distribuzione di Poisson di parametro $\lambda|A|$.

Chiamiamo X la variabile casuale associata alla minima distanza dei punti del processo di Poisson rispetto all'origine. Abbiamo che

$$X > r \Leftrightarrow N(B_0(r)) = 0\,,$$

dove $B_0(r)$ e' la palla chiusa di raggio d centrata nell'origine. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X \leq r) = 1 - \mathbb{P}(N(B_0(r)) = 0)\\ &= 1 - e^{-\lambda\pi r^2}\,,\end{aligned}$$

da cui otteniamo che la variabile casuale X ha una densitá data da

$$f_X(r) = \frac{d}{dr}\left(1 - e^{-\lambda\pi r^2}\right) = 2\lambda\pi r e^{-\lambda\pi r^2}\,, \qquad r \geq 0\,.$$

Otteniamo quindi

$$\mathbb{E}\left(X\right) = \int_0^{+\infty} f_X(r) r dr = \int_0^{+\infty} 2\lambda\pi r^2 e^{-\lambda\pi r^2} dr\,. \tag{0.1}$$

Usando la paritá della funzione integranda otteniamo che il lato destro di (0.1) e' uguale a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\pi r^2 e^{-\lambda\pi r^2} dr\,. \tag{0.2}$$

Ricordiamo che una variabile casuale Gaussiana $\mathcal{N}(0,a)$ centrata di varianza a ha densitá

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{x^2}{2a}}\,,$$

e conseguentemente abbiamo che

$$a = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{x^2}{2a}} dx. \tag{0.3}$$

Scriviamo quindi (0.1) come

$$\sqrt{\lambda}\pi\sqrt{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} r^2 e^{-\lambda\pi r^2}\,,$$

ed usando (0.3) possiamo calcolarlo ottenendo $\left(2\sqrt{\lambda}\right)^{-1}$.

3) Sia dato un processo di Poisson N^2 bidimensionale (l'apice 2 stá ad indicare che e' un processo bidimensionale) di parametro λ sulla striscia

$$\{(x,y)\ : 0 \leq y \leq L\}\,.$$

Dimostrare che il processo N^1 che si ottiene proiettando i punti sull'asse delle x e' un proceso di Poisson di parametro λL.

Soluzione: Per chiarire bene cosa intendiamo per proiettare, diciamo che abbiamo un evento in $x \in \mathbb{R}$ del processo N^1 se e solo se esiste un $y \in [0,L]$ tale che (x,y) e' un elemento del processo N^2. Dati $(a,b]$ e $(c,d]$ due intervalli disgiunti di $\mathbb{R}$ dobbiamo dimostrare che $N^1((a,b])$ ed $N^1((c,d])$ sono variabili casuali di indipendenti. Questo segue direttamente dalle identitá

$$N^1((a,b]) = N^2((a,b]\times[0,L]), \qquad N^1((c,d]) = N^2((c,d]\times[0,L])\,, \tag{0.4}$$

ed il fatto che $\{(a,b]\times[0,L]\}\bigcap\{(c,d]\times[0,L]\} = \emptyset$. Rimane da dimostrare che la distribuzione di $N^1((a,b])$ e' una Poissoniana di parametro $\lambda L(b-a)$. Questo segue direttamente dalla prima uguaglianza in (0.4) ed il fatto che $\Big|(a,b]\times[0,L]\Big| = L(b-a)$.

4) Supponiamo di avere due processi di conteggio N^1 ed N^2 definiti su $\mathbb{R}^+$, tali che essi possono essere costruiti nello stesso spazio di probabilitá in modo tale che $N^1 \subseteq N^2$ (in questo caso si dice che il processo 2 domina stocasticamente il processo uno). Allora se indicchiamo τ^1 e τ^2 rispettivamente il primo tempo di arrivo del processo uno e del processo due, ossia

$$\tau^i := \inf \left\{ t \in \mathbb{R}^+ \ : \ t \in N^i \right\} , \qquad i = 1, 2,$$

abbiamo che $\mathbb{P}(\tau^2 > t) \leq \mathbb{P}(\tau^1 > t)$ per ogni $t > 0$.

Soluzione Ricordiamo che un processo di conteggio conta il numero di istanti aleatori che avvengono nell'asse temporale $\mathbb{R}^+$. La scrittura $N^1 \subseteq N^2$ indica il fatto che ogni istante aleatorio del processo uno e' anche un istante aleatorio del processo due.

Ad esempio consideriamo un processo di Poisson non omogeneo di parametro $\lambda(t)$, dove $\lambda(t)$ e' una funzione continua e limitata, $\sup_t \lambda(t) \leq M$. Allora se indichiamo con N^λ il processo di Poisson non omogeneo e con N^M un processo di Poisson omogeneo di parametro M e' possibile costruire i due processi in modo tale che $N^\lambda \subseteq N^M$. Infatti consideriamo il processo N^M ed indichiamo con $\underline{X} := (X_1, X_2, \ldots,)$ i suoi tempi di arrivo (ricordiamo in particolare che quindi loro sono ordinati $X_1 \leq X_2 \leq \ldots$). Consideriamo delle variabili casuali $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tali che

$$\mathbb{P}(Y_{i_1} = 1, \ldots, Y_{i_n} = 1, Y_{j_1} = 0, \ldots, Y_{j_k} = 0 | \underline{X}) = \prod_{l=1}^{n} \frac{\lambda(X_{i_l})}{M} \prod_{m=1}^{k} \left(1 - \frac{\lambda(X_{j_m})}{M} \right) .$$

per ogni collezione finita di variabili Y. Se ora costruiamo una nuova collezione $\underline{\tilde{X}}$ di tempi di arrivo selezionando alcuni dei tempi di arrivo di $\underline{X}$ secondo la regola che $X_i \in \underline{\tilde{X}} \leftrightarrow Y_i = 1$ allora otteniamo che il processo di conteggio determinato dai tempi di arrivo $\underline{\tilde{X}}$ e' distribuito come il processo di Poisson non omogeneo N^λ. Questo e' uno dei risultati illustrati nelle lezioni teoriche.

Tornando al caso generale se indichiamo con $\underline{X}^1$ e con $\underline{X}^2$ la collezione dei tempi di arrivo dei processi N^1 ed N^2 abbiamo per costruzione che

$$X_1^1 \geq X_1^2 \tag{0.5}$$

ed inoltre utilizzando le notazioni del testo dell'esercizio abbiamo che $\tau^1 = X_1^1$ e $\tau^2 = X_1^2$. Da (0.5) otteniamo immediatamente

$$\left\{ X_1^2 > t \right\} \subseteq \left\{ X_1^1 > t \right\}$$

e l'affermazione dele testo segue immediatamente.