PROVA PARZIALE DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (Maggio 2005)

1) Sia dato l'insieme $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Siano A, B, C i seguenti sottoinsiemi:

$$A = \{1, 2\}\,; \quad B = \{2, 3, 4\}\,; \quad C = \{4, 5, 6\}$$

i) Individuare il sottoinsieme $\{A \cap B\} \cup \{B \cap C\}$
ii) Verificare la formula di De Morgan utilizzando due dei sottoinsiemi dati.
iii) Dire se A, B, C costituiscono una partizione di Ω.

Sia $\mathcal{P}(\Omega)$ (insieme delle parti di Ω) l'algebra totale su Ω.
i) Calcolare la cardinalità $|\mathcal{P}(\Omega)|$ di $\mathcal{P}(\Omega)$.
ii) Calcolare $|\mathcal{P}_2(\Omega)|$; dove $\mathcal{P}_2(\Omega)$ indica l'insieme i cui elementi sono tutti i possibili sottoinsiemi di Ω contenenti esattamente due elementi di Ω.

Si consideri lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, dove P e' la misura di probabilità uniforme.
i) Dire se A e B sono eventi indipendenti; dire se B e C sono eventi indipendenti.
ii) Calcolare $P(C|B)$.
iii) Calcolare $P(A \cup B)$ utilizzando la formula di inclusione esclusione.

2) In un sacchetto vi sono 3 palline, 2 bianche ed 1 nera. Si estrae una pallina a caso dal sacchetto; se questa e' bianca si lancia una moneta onesta, se e' nera si lancia una moneta truccata che ha probabilità $\frac{3}{4}$ di dare come risultato testa.
i) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina nera.
ii) Calcolare la probabilità di ottenere testa condizionata al fatto che e' stata estratta una pallina nera.
iii) Calcolare la probabilità di ottenere testa.
iiii) Calcolate la probabilità di aver estratto una pallina nera condizionata al fatto che il risultato del lancio della moneta e' testa.

3) Discutere i seguenti quesiti:
i) In un sacchetto vi sono 10 palline, 4 bianche e 6 nere. Se ne estraggono 5 senza rimpiazzo. Calcolare la probabilità che (esattamente) tre di esse siano nere. Calcolare la probabilità che almeno una sia bianca.
ii) In un sacchetto vi sono 10 palline, 4 bianche e 6 nere. Se ne estraggono 5 con rimpiazzo. Calcolare la probabilità che (esattamente) tre di esse siano nere.
iii) Calcolare $\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 3^k 7^{5-k}$
iiii) Verificare l'identità $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

SOLUZIONI

1) i) $A \cap B = \{2\}$; $B \cap C = \{4\}$; $\Rightarrow \{2\} \cup \{4\} = \{2, 4\}$.
ii) Ad esempio $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$; infatti $A \cap B = \{2\}$ e quindi $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c = \{1, 3, 4, 5, 6\}$. Dall'altra parte $A^c = \{3, 4, 5, 6\}$ e $B^c = \{1, 5, 6\}$ quindi $A^c \cup B^c = \{1, 3, 4, 5, 6\}$.
iii) No in quanto ad esempio $A \cap B \neq \emptyset$.

i) $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^6$ gli elementi di $\mathcal{P}(\Omega)$ sono infatti in corrispondenza biunivoca con le stringhe di lunghezza 6 costituite da 0 ed 1.
ii) $|\mathcal{P}_2(\Omega)| = \binom{6}{2} = 15$ sono infatti in corrispondenza biunivoca con le stringhe di lunghezza 6 costituite da 0 ed 1 contenenti esattamente due 1.

i) $P(A \cap B) = 1/6$, $P(A) = 1/3$ e $P(B) = 1/2$ quindi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ gli eventi sono indipendenti. $P(B \cap C) = 1/6$, $P(C) = 1/2$ e $P(B) = 1/2$ quindi $P(B \cap C) \neq P(C)P(B)$, gli eventi non sono indipendenti.
ii) $P(C/B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{|C \cap B|}{|B|} = 1/3$
iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/3 + 1/2 - 1/6 = 2/3$.

2) i) Numero dei casi favorevoli su quelli possibili 1/3.
ii) Avendo estratto la pallina nera si lancia la moneta truccata che da testa con probabilitá 3/4.
iii) Utilizzando il teorema della probabilita totale $P(T) = P(T/N)P(N) + P(T/B)P(B) = \frac{3}{4}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{7}{12}$
iiii) Dalla formula di Bayes $P(N?T) = \frac{P(T?N)P(N)}{P(T)} = \frac{3}{7}$.

3) i) Utilizzando la distribuzione ipergeometrica $\frac{\binom{6}{3}\binom{4}{2}}{\binom{10}{5}}$. La seconda probabilita richiesta si ottiene come $1 - P(nessuna - bianca)$ ed utilizzando la distribuzione ipergeometrica $1 - \frac{\binom{6}{5}}{\binom{10}{5}}$.
ii) Le estrazioni sono indipendenti e quindi $\binom{5}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^3$
iii) Utilizzando la formula del binomio di Newton

$$\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 3^k 7^{5-k} = (7+3)^5 = 100000$$

iiii) segue dal seguente calcolo

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}$$