ESAME DI EQUAZIONI DELLA FISICA-MATEMATICA 8-2-2011

1) Si determini la funzione $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ che si annulla all'infinito e che soddisfa

$$\begin{cases} \Delta v(x) = v(x) & |x| > R\,, \\ v(x) = 1 & |x| = R\,. \end{cases}$$

Si consideri inoltre la funzione $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ che soddisfa

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & |x| < R\,, \\ u(x) = 3x_1^3 - x_1 & |x| = R\,. \end{cases}$$

Si determinino $u(0)$ e $\max_{\{x:|x|\le R\}} u(x)$ (si lasci indicata l'eventuale soluzione dell'equazione di terzo grado richiesta).

2) Determinare la soluzione u in $(0,1)\times(0,T)$ del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = t\sin(3\pi x) \\ u(x,0) = 2\sin(\pi x) + \cos(3\pi x)\sin(2\pi x) + \sin(3\pi x)\cos(2\pi x)\,, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0\,. \end{cases}$$

3) Trovare la soluzione dell'equazione delle onde unidimensionale, con $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, che soddisfa le seguenti condizioni

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = \cos x \\ u_t(x,0) = xe^x \\ u_x(0,t) = 0\,. \end{cases}$$

4) Si consideri il problema di Cauchy per la funzione $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (x_1 + u)u_{x_1} + (x_2 + 1)u_{x_2} = u \\ u(x_1, 0) = x_1\,. \end{cases}$$

Si determinino i punti $(x_1, 0)$ per i quali e' possibile trovare una soluzione locale C^1 usando il metodo delle caratteristiche e la si scriva.