

**ESAME DI EQUAZIONI DELLA FISICA MATEMATICA
(22-2-2011)**

1) Si consideri il piano \mathbb{R}^2 sul quale sono definite le coordinate polari (ρ, θ) . Si determini la funzione u che si annulla all'infinito e che soddisfa il seguente problema

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & |x| > 1 \\ u(x) = \sin(5\theta) + 3\cos(3\theta) - \sin\theta & |x| = 1 \end{cases}$$

Sia $B_1((5, 5))$ la palla di raggio 1 centrata in $(5, 5)$. Si calcoli

$$\int_{\partial B_1((5,5))} u(y) dS(y).$$

2) Si determini la soluzione in $(0, 1) \times (0, T)$ del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = x(1-x) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$$

Si calcoli $\max_{(x,t) \in [0,1] \times [0,T]} u(x, t)$.

3) Si trovi la soluzione del seguente problema con $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = e^{-t} \sin x \\ u(x, 0) = \sin x \\ u_t(x, 0) = xe^{-x^2} \end{cases}$$

Che tipo di simmetria soddisfa la soluzione?

4) Si determinino i punti $(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2$ per i quali e' possibile costruire una soluzione locale C^1 del seguente problema

$$\begin{cases} uu_{x_1} + (x_2 + 1)u_{x_2} = x_1 \\ u(x_1, 0) = 2x_1 \end{cases}$$

utilizzando il metodo delle caratteristiche e la si scriva.