

ESAME DI EFM 3-7-2012

1) Si trovi la soluzione del seguente problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & |x| > 2, \\ u = 2 \cos \theta + 3 \sin \theta & |x| = 2, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0 \end{cases}$$

dove $x \in \mathbb{R}^2$ e (ρ, θ) sono le coordinate polari. Si determini il valore di $\sup_{|x| > 2} u(x)$.

2) Si determini la soluzione del seguente problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = 1, \\ u(1, t) = 1 + e^{-t}, \\ u(x, 0) = \sin 2\pi x. \end{cases}$$

3) Si trovi la soluzione del seguente problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = e^{-t} \sin x, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = \sin x, \\ u_t(x, 0) = e^{-x}, \\ u(0, t) = 0. \end{cases}$$

4) Utilizzando il metodo delle caratteristiche si trovi una soluzione locale del seguente problema in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x_2^2 u_{x_1} + \frac{x_1}{2x_2} u_{x_2} = u + 1, \\ u(1, x_2) = x_2. \end{cases}$$

SOLUZIONI

Si prega di segnalarmi eventuali errori.

1) Utilizzando il metodo di separazione di variabili in coordinate polari si ottiene la famiglia di funzioni armoniche

$$A + B \log \rho + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n (a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta) + \rho^{-n} (c_n \sin n\theta + d_n \cos n\theta).$$

Le condizioni del problema ci impongono $A = B = a_n = b_n = 0$ ed inoltre $c_1 = 6$, $d_1 = 4$ e tutti gli altri c_n e d_n nulli.

In definitiva

$$U = \frac{6 \sin \theta + 4 \cos \theta}{\rho} = \frac{6y + 4x}{x^2 + y^2}.$$

Poiché la u si annulla all'infinito per ogni $\epsilon > 0$ esiste un R tale che $|u|(x) \leq \epsilon$ per ogni x tale che $|x| \geq R$. Scegliendo ϵ piccolo a sufficienza il problema il sup della soluzione sul dominio illimitato coincide con $\sup_{2 < |x| < R} u(x)$. Il bordo di questa corona circolare è costituito da due circonferenze inoltre sappiamo che $\sup_{|x|=R} u(x) \leq \epsilon$. Quindi applicando il principio del massimo otteniamo che il valore richiesto coincide con

$$\begin{aligned} & \sup_{|x|=2} u(x) \\ &= \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} 2 \cos \theta + 3 \sin \theta \\ &= \sup_{\alpha \in [-1, 1]} 3\sqrt{1 - \alpha^2} + 2\alpha \end{aligned}$$

(la scelta del segno — davanti alla radice non e' rilevante ai fini del calcolo del massimo). Il massimo globale di quest'ultima funzione e' ottenuto nel punto interno di coordinata $\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$ ed il corrispondente valore del massimo e' $\sqrt{13}$.

2) Scriviamo la soluzione come $u = v + \bar{u}$ dove $\bar{u} := 1 + xe^{-t}$. Otteniamo che v risolve il problema

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = xe^{-t}, & 0 < x < 1, t > 0 \\ v(0, t) = v(1, t) = 0 \\ v(x, 0) = \sin(2\pi x) - x - 1. \end{cases}$$

Sviluppo il termine forzante in serie di Fourier di soli seni

$$xe^{-t} = \sum_n f_n(t) \sin n\pi x$$

dove

$$f_n(t) = 2e^{-t} \int_0^1 y \sin(n\pi y) dy = \frac{2e^{-t}(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Sviluppo anche il dato iniziale in serie di Fourier di soli seni

$$\begin{aligned} \sin(2\pi x) - 1 - x &= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\pi x) \\ &= -\frac{6}{\pi} \sin(\pi x) + \left(1 + \frac{1}{\pi}\right) \sin(2\pi x) - \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2(1 + 2(-1)^{n+1})}{n\pi} \sin(n\pi x). \end{aligned}$$

Cerco la soluzione della forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t) \sin(n\pi x).$$

Inserendo questa forma della soluzione nell'equazione si ottiene che i coefficienti a_n devono soddisfare le equazioni disaccoppiate

$$\begin{cases} \dot{a}_n(t) + (n\pi)^2 a_n(t) = f_n(t) \\ a_n(0) = b_n \end{cases}$$

la cui soluzione e'

$$a_n(t) = e^{-(n\pi)^2 t} \left(b_n + \int_0^t f_n(s) e^{(n\pi)^2 s} ds \right).$$

Con semplici integrazioni questa espressione può essere sviluppata ottenendo così infine la soluzione. Tralasciamo questi ultimi calcoli e li lasciamo al volenteroso lettore.

3) Scriviamo la soluzione come somma di due funzioni $u^1(x, t)$ ed $u^2(x, t)$ definite per $x \in \mathbb{R}$ ed antisimmetriche in x ossia tali che $u^i(x, t) = -u^i(-x, t)$. Se $u = u^1 + u^2$ la condizione $u(0, t) = 0$ sarà automaticamente soddisfatta. La funzione u^1 risolve il problema

$$\begin{cases} u_{tt}^1 - u_{xx}^1 = 0, & x \in \mathbb{R} \ t > 0 \\ u^1(x, 0) = \sin x, \\ u_t^1(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

dove

$$h(x) := \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ -e^x, & x \leq 0 \end{cases}$$

la cui soluzione ristretta al primo quadrante e'

$$u^1(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [\sin(x+t) + \sin(x-t)] + \frac{1}{2} (e^{t-x} - e^{-t-x}), & x > t \\ \frac{1}{2} [\sin(x+t) + \sin(x-t)] + \frac{1}{2} (e^{x-t} - e^{-t-x}), & x \leq t. \end{cases}$$

La funzione u^2 risolve il problema

$$\begin{cases} u_{tt}^2 - u_{xx}^2 = e^{-t} \sin x, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u^2(x, 0) = 0, \\ u_t^2(x, 0) = 0, \end{cases}$$

la cui soluzione e'

$$\begin{aligned} u^2(x, t) &= \frac{1}{2} \int_0^t ds \int_{x-s}^{x+s} dy e^{-s} \sin y \\ &= \frac{1}{4} \left[2 \sin x - e^{-t} (\cos(x-t) - \cos(x+t) + \sin(x+t) + \sin(x-t)) \right]. \end{aligned}$$

4) La condizione di applicabilità del metodo delle caratteristiche e'

$$\left(x_2^2, \frac{x_1}{2x_2} \right) \cdot (1, 0) = x_2^2 \neq 0$$

che e' soddisfatta per $x_2 > 0$. Le equazioni caratteristiche sono

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^2, \\ \dot{x}_2 = \frac{x_1}{2x_2}, \\ \dot{z} = z + 1. \end{cases}$$

Derivando la prima ed utilizzando la seconda si ottiene $\ddot{x}_1 = x_1$ il cui integrale generale e' $x_1(s) = c_1 e^s + c_2 e^{-s}$. Utilizzando la prima equazione si ottiene anche $x_2(s) = \sqrt{c_1 e^s - c_2 e^{-s}}$ notando che abbiamo scelto il segno + davanti alla radice poiché cerchiamo una soluzione locale ed il valore della funzione e' specificato per $x_2 > 0$. Infine la terza equazione può essere integrata indipendentemente ottenendo $z(s) = c e^s - 1$. Anche in questo caso la scelta del segno e' stata fatta ricordando che la soluzione locale sarà positiva. La condizione iniziale che dobbiamo imporre e' $x_1(0) = 1, x_2(0) = x_2^0$ e $z(0) = x_2^0$. Da questo otteniamo $c_1 = \frac{1+(x_2^0)^2}{2}, c_2 = \frac{1-(x_2^0)^2}{2}, c = 1+x_2^0$. dato un punto (x_1, x_2) nella regione nella quale sarà definita la soluzione locale, dobbiamo determinare x_2^0 ed s^* tali che $x_1(s^*) = x_1$ e $x_2(s^*) = x_2$. Con un pó di algebra si ottiene $x_2^0 = (1+x_2^4-x_1^2)^{\frac{1}{4}}$ ed $e^{s^*} = \frac{x_1+x_2^2}{1+(1+x_2^4-x_1^2)^{\frac{1}{2}}}$. la soluzione cercata sarà

$$u(x_1, x_2) = z(s^*) = \left[1 + (1+x_2^4-x_1^2)^{\frac{1}{4}} \right] \frac{x_1+x_2^2}{1+(1+x_2^4-x_1^2)^{\frac{1}{2}}} - 1.$$