ESERCIZI DI PROCESSI STOCASTICI - SECONDA PARTE

Fabio Antonelli

1. Siano μ, ν e ρ tre misure finite sullo stesso spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{F})$

   (a) Dimostrare che se $\nu << \mu$ e $\mu << \rho$ allora anche $\nu << \rho$ e si ha
   $$\frac{d\nu}{d\rho} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\rho}$$

   (b) Dimostrare che se $\mu \equiv \nu$, allora
   $$\frac{d\mu}{d\nu} = \Big(\frac{d\nu}{d\mu}\Big)^{-1}$$

2. Siano T_1 e T_2 i tempi di vita di due macchinari. T_1 e T_2 sono indipendenti e identicamente distribuiti secondo una legge esponenziale condizionatamente ad un parametro Λ, che a sua volta segue una legge $\Gamma(2, 2)$.

   (a) Calcolare la legge di T_1.

   (b) Calcolare la legge congiunta di (T_1, T_2).

   (c) Supponiamo ora di dover stabilire se vendere o meno il secondo macchinario, decidendo sulla base del tempo di vita del primo.

   Se il secondo macchinario non viene venduto si perde un costo di produzione pari ad 1, altrimenti si perde una somma aleatoria C, che vale 2, se il secondo macchinario si rompe prima del tempo $t_0 = 4$, 0 altrimenti.

   Sapendo che il primo macchinario ha avuto durata $t_1 = 10$, usando come criterio di decisione il confronto tra il valor medio di C ed il costo di produzione (pari ad 1), dire se conviene vendere il secondo macchinario.

3. Dimostrare la seguente forma della formula di Bayes. Data una sotto $\sigma-$algebra $\mathcal{G}$
$$P(G|A) = \frac{\int_G P(A|\mathcal{G})dP}{\int_\Omega P(A|\mathcal{G})dP}.$$

4. Sia B un evento tale che $P(B) > 0$. Si definisca una probabilità P_1 come
$$P_1(A) = P(A|B)$$
Dimostrare che per una qualsiasi sotto $\sigma-$algebra $\mathcal{G}$ si ha
$$P_1(A|\mathcal{G}) = \frac{P(A \cap B|\mathcal{G})}{P(B|\mathcal{G})}$$
tranne che su un insieme di probabilità 0 rispetto P_1.

5. Dimostrare che se $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$ e $E(X^2) < +\infty$, allora
$$E[(X - E(X|\mathcal{G}_2))^2] \leq E[(X - E(X|\mathcal{G}_1))^2]$$
ovvero la dispersione di X attorno alla sua media condizionata diventa più piccola come la $\sigma-$algebra cresce.

6. Dimostrare che se definiamo $Var(X|\mathcal{G}) = E[(X - E(X|\mathcal{G}))^2]$, allora vale la seguente
$$Var(X) = Var(X|\mathcal{G}) + Var(E(X|\mathcal{G})).$$

7. Sia $\{\Delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. indipendenti con media 0 e si costruisca una seconda successione
$$X_1 = \Delta_1,\ X_{n+1} = X_n + \Delta_{n+1} f(X_1, \ldots, X_n),$$
con una funzione f Boreliana scelta in maniera tale che tutte le X_n risultino integrabili.

Dimostrare che X_n è una martingala.

8. Sia $\{Y_n\}$ una catena di Markov a stati finiti ($|E| = m$). con matrice di transizione $\mathcal{P} = (p_{ij})$ e sia il vettore $(\pi_1, \ldots, \pi_m)$ un autovettore destro corrispondente all'autovalore λ per $\mathcal{P}$, ovvero
$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij}\pi_j = \lambda\pi_i.$$

Si definisca $X_n = \dfrac{\sum_{k=1}^m \pi_k \mathbf{1}_{\{Y_n=k\}}}{\lambda^n}$, dimostrare che X_n è una martingala rispetto a $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$.

9. Sia $\{Z_n\}$ una successione di v.a. indipendenti tali che

$$Z_n = \begin{cases} a_n & \text{con prob.} \quad \frac{1}{2n^2} \\ 0 & \text{con prob.} \quad 1 - \frac{1}{n^2} \\ -a_n & \text{con prob.} \quad \frac{1}{2n^2} \end{cases}$$

dove $a_1 = 2$ ed $a_n = 4\sum_{j=1}^{n-1} a_j$. Dimostrare che $Y_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} Z_j$ definisce una martingala tale che esiste $\lim\limits_{\to+\infty} Y_n$, ma non è L^1 limitata.

10. Sia $\{Z_n\}$ una successione di v.a. indipendenti nonnegative e sia $N(t) = \max\{n : Z_1 + \cdots + Z_n \le t\}$ per $t \ge 0$. Dimostrare che $N(t) + 1$ è un tempo di arresto rispetto a $\mathcal{G}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$.

11. Sia $\{X_n\}$ una submartingala e siano σ e τ due tempi di arresto tali che $0 \le \sigma \le \tau \le N$ per qualche $N \in \mathbb{N}$ con probabilità 1. Dimostrare che

$$E(X_0) \le E(X_\sigma) \le E(X_\tau) \le E(X_N)$$

12. Siano $X_1, X_2, \dots$ v.a. indipendenti con media 1.

Dimostrare che $Z_n = X_1 X_2 \dots X_n$ è una martingala.

13. Si consideri lo spazio di probabilità $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(R), \mathrm{e}^{-\lambda x} dx)$ con $\lambda > 0$. Denotiamo con $\mathcal{G}_n$ la filtrazione generata dagli intervalli

$$(0,1], (1,2], \dots, (n-1, n], (n, +\infty)$$

e $\mathcal{G}_0 = \{\mathbb{R}^+, \emptyset\}$ e si consideri una funzione misurabile f ed integrabile secondo la probabilità $d\mu(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} dx$. Calcolare $E(f|\mathcal{G}_n)$. Calcolare $E(x^3|\mathcal{G}_n)$.

14. Sia $\{X_n\}$ una successione di v.a. i.i.d $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Dimostrare che

$$\exp(S_n - \frac{\sigma^2}{2} n)$$

è una martingala. E' anche una martingala limitata in L^1?

15. Sia $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una successione di v.a. i.i.d tali che

$$X_n \begin{cases} 1 & p < \frac{1}{2} \\ -1 & 1-p \end{cases}$$

e sia $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$. Si definisca la martingala di De Moivre:

$$Y_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}.$$

Dimostrare che Y_n è una martingala e la si usi per dimostrare che

$$P\Big(\max_{0 \leq k \leq n} S_k \geq x\Big) \leq \left(\frac{p}{q}\right)^x.$$

Da quest'ultima disuguaglianza concludere che

$$E(\sup_{k \geq 0} S_k) \leq \frac{p}{q-p}.$$

16. Sia S_n una passeggiata aleatoria semplice simmetrica, $S_0 = 0$. Per ognuna delle seguenti v.a. dire se è un tempo di arresto

$$U = \min\{n \geq 5 : S_n = S_{n-5} + 5\}, \; V = U - 5, \; W = \min\{n : S_n = 1\}.$$

17. La ricchezza di una compagnia di assicurazione dopo n anni di investimenti è rappresentata dalla successione di v.a. $\{Y_n\}$. Ogni anno la compagnia riceve un totale di P euro per il pagamento delle polizze (costante) e all'anno n paga C_n euro per la copertura degli infortuni, perciò

$$Y_{n+1} = Y_n + P - C_{n+1}.$$

Supponiamo che le v.a. $\{C_n\}$ siano i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ e che $P > \mu$.

(a) Calcolare la funzione generatrice dei momenti $M(t)$ di $P - C_1$.

(b) Trovare t tale che $M(t) = 1$ e dimostrare che il processo definito da $Z_n = \min(\exp(tY_n), 1)$ è una supermartingala.

(c) Usando il teorema opzionale, dimostrare che la probabilità di bancarotta della compagnia soddisfa

$$P(Y_n \leq 0 \text{ per qualche } n) \leq \exp\Big(\frac{-2(P-\mu)Y_0}{\sigma^2}\Big).$$

18. Dare un esempio di una martingala non limitata in L^1.

19. Sia $\{X_i\}_{i\geq 1}$ una successione di v.a. i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$ per ogni $i \geq 1$ e sia $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$, $S_0 = 0$. Scelti $a < 0 < b$ numeri reali, sia $\tau = \inf\{n : S_n = a \,\text{oppure}\, S_n = b\}$.

(a) dimostrare che τ è un tempo di arresto;

(b) Dire, giustificando la risposta, se è possibile calcolare $E(\mathrm{e}^{\tau/2})$ ed in caso calcolarla.

20. Sia $\{X_i\}$ una successione di v.a. i.i.d. con $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Sia $a > 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $S_0 = 0$ e $\tau = \inf\{n : S_n = a\} \wedge 100$. Dire, giustificando la risposta, se $Y_{n\wedge\tau}$ è una martingala, dove

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} |S_{i-1}| X_i$$

21. Si consideri lo spazio di probabilità $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, dove λ indica la misura di Lebesgue, sul quale consideriamo la seguente filtrazione

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 &= \{\emptyset, [0,1]\} \\ &\vdots \\ \mathcal{D}_n &= \sigma\Big(\{[0, \frac{1}{2^n}), [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}), \ldots, [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, 1]\}\Big) \end{aligned}$$

per $n \geq 1$ e sia $f(x) = x^2$

(a) Dimostrare che $f_n = E(f|\mathcal{D}_n)$ definisce una martingala;

(b) dire se f_n è una martingala limitata in L^1, giustificando la risposta;

(c) calcolare f_n.

22. Sia $\{X_i\}_{i\geq 1}$ una successione di Bernoulliane i.i.d. a valori in $\{0,1\}$ e sia $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

    (a) Dimostrare che $Y_n = S_n - \frac{n}{2}$ è una martingala.

    (b) Dimostrare che $S_n(S_n - n) + \frac{n(n-1)}{4}$ è una martingala (suggerimento: usare il punto precedente).

23. Dimostrare la versione debole della disuguaglianza massimale di Doob.

24. Dare la definizione ed un esempio di supermartingala.

25. Sia $\{X_i\}_{i\geq 1}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 0, varianza 1, momento terzo nullo e $E(|X_i|^3) < +\infty$ per ogni i, e $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

    Dimostrare che

    $$Y_n = S_n^3 - 3\sum_{i=1}^{n} S_{i-1}$$

    è una martingala.

26. Dimostrare il teorema di decomposizione di Doob per le submartingale.

27. Dare la definizione di tempo di arresto e darne un esempio.

28. Sia $\{X_i\}_{i\geq 1}$ una successione di v.a. i.i.d. $X_i = \begin{cases} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{cases}$ per ogni $i \geq 1$ e sia $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $S_0 = 0$. Per ogni $t \in \mathbb{R}^+$, definiamo

$$Y_n = \left(\frac{2}{\mathrm{e}^t + 1}\right)^n \mathrm{e}^{tS_n}$$

(a) dimostrare che Y_n è una martingala;

(b) Dire se è una martingala limitata in L^1 o meno. (giustificando la risposta)

29. Si consideri lo spazio di probabilità $([0, +\infty), \mathcal{B}([0, +\infty), \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2}dx)$, sul quale consideriamo la seguente filtrazione

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 &= \{\emptyset, [0, +\infty)\} \\ \mathcal{D}_1 &= \sigma\Big(\{[0, 1), [1, +\infty)\}\Big) \\ &\vdots \\ \mathcal{D}_n &= \sigma\Big(\{[0, \frac{1}{n}), [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}), \ldots, [\frac{n^2-1}{n}, n), [n, +\infty)\}\Big) \end{aligned}$$

e la funzione $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

(a) Dimostrare che $f_n = E(f|\mathcal{D}_n)$ definisce una martingala;

(b) dire se f_n è una martingala limitata in L^1, giustificando la risposta;

(c) calcolare f_n.

30. Sia $\{X_i\}_{i\geq 1}$ una successione di v.a. i.i.d. con $E(X_i) = 0$ e si definiscano $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $S_0 = 0$, $\Sigma_n = \sum_{i=1}^{n} S_{i-1}X_i$.

(a) S_n è una martingala, lo è anche Σ_n? In caso qual è la sua media?

(b) Se si è risposto affermativamente alla prima domanda, qual è la media di Σ_n se $E(X_i) = \mu \neq 0$?

31. Sia $\{A_n\}_n$ una succesione non decrescente di v.a. ($A_n \leq A_{n+1}$ q.o.), che è anche una martingala. Dimostrare che la successione è costante ($\mathcal{F}_0$ è triviale).

32. Sia definita la seguente successione di v.a. per $n \geq 1$

$$X_n = \begin{cases} 2^n & \frac{1}{2n^2} \\ 0 & 1 - \frac{1}{n^2} \\ -2^n & \frac{1}{2n^2} \end{cases}$$

e sia $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(a) Dimostrare che S_n è una martingala.

(b) Dire, giustificando la risposta, se $\{S_n\}_n$ è una martingala limitata in L^1?

33. Sia $\{X_i\}_{i\geq 1}$ una successione di Bernoulliane i.i.d. a valori in $\{-1, 1\}$ e siano $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Dimostrare che

$$Y_n = \frac{\cos[\lambda(S_n - \frac{1}{2}(b-a))]}{(\cos\lambda)^n}$$

è una martingala, per qualsiasi scelta di $a, b \in \mathbb{R}$ e λ tale che $\cos\lambda \neq 0$.

34. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità e $\{B_i\}_{i\geq 1}$ una famiglia di insiemi di $\mathcal{F}$. Se $\mathcal{A} = \sigma(B_1, \ldots, B_n)$, cos'è

$$P(B_1 \cup B_2 \cup B_3 | \mathcal{A})?$$

35. Sia X una v.a. distribuita secondo un'esponenziale di parametro 1. Se $X = x$, allora Y è distribuita secondo una Gaussiana di media 1 e varianza x.

(a) Calcolare la densità congiunta di X ed Y.

(b) Calcolare la densità di Y.

36. Sia $X \sim \exp(\lambda)$ e per $X = x$, allora $Y|X = x \sim \Gamma(x, 2)$. Quanto vale $E(Y)$?

37. Siano $\{X_i\}$ ed $\{Y_i\}$ due successioni indipendenti di Bernuoulliane (0,1) indipendenti e sia $Y_0 = 0$ e $S_n^X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

   (a) Qual è la distribuzione di S_n^X?

   (b) Definiamo
$$\Sigma_n = \sum_{i=1}^{S_n^X} Y_i$$
   calcolare $E(\Sigma_n)$.

38. Sullo spazio di probabilità $([0,1), \mathcal{B}([0,1)), dx)$ definiamo la filtrazione
$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= \{\emptyset, [0,1)\} \\ \mathcal{A}_1 &= \sigma(\{[0, \frac{1}{3}), [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\}) \\ &\vdots \\ \mathcal{A}_k &= \sigma(\{[0, \frac{1}{3^k}), \ldots, [\frac{3^k-2}{3^k}, \frac{3^k-1}{3^k})\}), \end{aligned}$$
calcolare $E(x^2|\mathcal{A}_k)$.

39. Sia $\{X_i\}$ una successione di v.a. i.i.d con $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ e $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Sappiamo che S_n è una martingala e sia $\{Y_i\}$ così definita
$$Y_i = \begin{cases} 10 & \text{se } S_{i-1} > 5 \\ 2 & \text{se } S_{i-1} \leq 5 \end{cases}$$
il processo $\Sigma_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i X_i$ è una martingala?