

ESERCIZI DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

- 1) Qual'è la probabilità che lanciando n dadi a n facce non esca alcun 1? Studiare il comportamento asintotico di tale probabilità per n grande.
- 2) In un sacchetto vi sono 10 palline bianche; quante palline nere devo mettere nel sacchetto affinché la probabilità che estraendo (senza rimpiazzo) 2 palline esse siano entrambe nere, sia maggiore di $\frac{1}{2}$?
- 3) Sia Dato un mazzo di 40 carte. Supponiamo che esso sia mescolato in modo tale che ognuno dei possibili ordinamenti sia equiprobabile. Qual'è la probabilità che pescando le prime dieci carte nessuna di esse sia un asso?
- 4) Sia dato un mazzo di 52 carte (26 rosse e 26 nere). Supponiamo che esso sia mescolato in modo tale che ognuno dei possibili ordinamenti sia equiprobabile. Qual'è la probabilità che le carte siano ordinate in modo tale che ci sia un'alternanza di carte rosse e nere (o equivalentemente nessuna carta rossa o nera sia vicina ad un'altra rossa o nera)?
- 5) Calcolare in quanti modi è possibile alloggiare le famiglie A,B,C,D,E nei 5 piani di una palazzina in modo tale che le famiglie A e B non siano alloggiate su piani vicini.
- 6) In un sacchetto vi sono 4 palline bianche e 6 nere. Se ne estraggono 5 (senza rimpiazzo). Calcolare la probabilità che la prima pallina estratta sia bianca condizionata al fatto che l'ultima estratta è bianca.
- 7) Si lancia dieci volte una moneta onesta. Calcolare la probabilità che al quinto lancio si abbia una testa condizionata al fatto che il numero di teste totale ottenute è 3.
- 8) Sia Dato un mazzo di 40 carte. Supponiamo che esso sia mescolato in modo tale che ognuno dei possibili ordinamenti sia equiprobabile. Dire se gli eventi A (la prima carta è un asso) e B (l'ultima carta è un re) sono indipendenti.
- 9) Si effettua il seguente esperimento: dapprima si lancia una moneta onesta, se il risultato è testa allora si lancia un dado (onesto), se il risultato è croce allora si lanciano due dadi (onesti). Calcolare la probabilità di ottenere testa nel lancio della moneta condizionata al fatto che il risultato del lancio del(i) dado(i) è 4.
- 10) Sia dato lo spazio di probabilità $\Omega = \{0,1\}^{10}$ con la σ -algebra totale e misura di probabilità uniforme (un elemento $\omega \in \Omega$ è una sequenza lunga dieci di 0 e 1; $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{10})$ con ognuno degli ω_i che vale 1 o 0). Trovare la funzione di distribuzione di massa, il valor medio e la varianza delle seguenti variabili casuali:

$$a) \quad X = \sum_{i=1}^5 \omega_{2i-1} \omega_{2i}$$

$$b) \quad X = \sum_{i=1}^5 (\omega_{2i-1})^{(1+\omega_{2i})}$$

$$c) \quad X = \prod_{i=1}^{10} \omega_i^{(1+\omega_i)}$$

$$d) \quad X = \sum_{i=1}^5 \chi_{A_i}(\omega)$$

dove A_i sono gli eventi $A_i = \{\omega \in \Omega : \omega_i = \omega_{10-i}\}$.

11) In un sacchetto ci sono 5 palline bianche. Effettuo le seguenti operazioni ripetutamente: aggiungo una pallina rossa al sacchetto e estraggo a caso una delle palline presenti nel sacchetto. Smetto di ripetere tali operazioni la prima volta che estraggo una pallina rossa. Chiamo N la variabile casuale che corrisponde al numero di estrazioni fatte, determinarne la funzione di distribuzione di massa.

12) Sia Dato un mazzo di 40 carte. Supponiamo che esso sia mescolato in modo tale che ognuno dei possibili ordinamenti sia equiprobabile. Numeriamo le carte così mescolate dall'uno al quaranta in modo che l'uno corrisponda alla prima carta del mazzo ed il 40 all'ultima. Descrivere la funzione di distribuzione di massa della variabile casuale $N =$ "la posizione del quarto asso" (quarto rispetto all'ordinamento suddetto).

13) Date 5 urne A,B,C,D,E e tre palline numerate dall'uno al 3. Supponiamo equiprobabile ogni possibile configurazione in cui le palline possono essere disposte nelle urne. Calcolare la funzione di distribuzione di massa della variabile casuale $S =$ "somma dei numeri delle palline presenti nell'urna A".

14) Date 3 urne A,B,C e 5 palline indistinguibili calcolare la funzione di distribuzione di massa della variabile casuale $N_A =$ "numero di palline in A" assumendo che ognuna delle configurazioni possibili di palline nelle urne sia equiprobabile.

15) In un cassetto ci sono 5 paia di calzini, ogni paio di un colore diverso. Si prendono a caso 2 calzini: si consideri la variabile casuale $N =$ "numero di colori estratti". Si calcoli la funzione di distribuzione di massa il valor medio e la varianza di N .

16) Sia dato lo spazio di probabilit  finite $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ con spazio degli eventi costituito da tutti i possibili sottoinsiemi di Ω .

Dire per quale valore del parametro c la funzione

$$p(i) = ci \quad i = 1, 2, \dots, n$$

definisce una misura di probabilit  su Ω .

Calcolare i valori di aspettazione delle seguenti variabili casuali:

a) $X_1(i) = \frac{1}{i}$

b) $X_2(i) = \chi_A(i)$ dove χ_A e' la funzione caratteristica dell'insieme $A = \{1, 2, 3\}$.

c) $X_3(i) = 2^i$

17) Si lancia un dado onesto a sei facce. Successivamente si lancia una moneta onesta un numero di volte pari al risultato del lancio del dado. Sia D la variabile casuale che corrisponde al risultato del lancio del dado e sia T la variabile casuale corrispondente al numero di teste ottenute.

a) Calcolare la distribuzione di T .

b) Calcolare $P(D = 3 | T = 2)$.

c) Si scriva la rappresentazione naturale di T come somma aleatoria di variabili casuali indipendenti.

d) Calcolare il valore medio di T nei seguenti due modi: usando il teorema di partizione e usando c).

e) Usando c) calcolare la funzione generatrice dei momenti di T .

18) Le 40 carte di un mazzo vengono distribuite tra due giocatori in modo tale che ognuna delle possibili divisioni del mazzo in due mazzi costituiti da 20 carte ciascuno sia equiprobabile. Il mazzo di 40 carte contiene 4 assi. Sia

$N_A = \text{numero di assi in mano al giocatore } A,$

$N_B = \text{numero di assi in mano al giocatore } B$

a) Si determini la funzione di distribuzione della variabili casuali N_A e N_B

b) Calcolare i valori medi di N_A e di N_B

c) Si determini la funzione di distribuzione congiunta delle variabili casuali (N_A, N_B)

d) Calcolare la funzione di distribuzione della variabile N_A quando il mazzo e' costituito da $2n$ carte ($2n > 4$) ed il numero di assi rimane 4. Calcolarne il limite quando n tende ad infinito.

19). Siano $X_1, \dots, X_{2n}$ $n > 1$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite che assumono valori in $\{0, 1\}$ con funzione di distribuzione

$$P(X_i = 0) = 1 - p, \quad P(X_i = 1) = p, \quad p \in (0, 1) \quad (1)$$

(i) Sia

$$S_{2n} = \sum_{i=1}^{2n} X_i$$

Calcolare la funzione di distribuzione, la media $E(S_{2n})$ e la varianza $\text{Var}(S_{2n})$.

(ii) Sia

$$W_n = \sum_{i=1}^n X_{2i}$$

. Calcolare la funzione di distribuzione, la media $E(W_n)$ e la varianza $\text{Var}(W_n)$.

(iii) Sia $Y_n = X_1 + X_{2n}$. Calcolare la funzione di distribuzione, la media $E(Y_n)$ e la varianza $\text{Var}(Y_n)$.

(iv) Dire se S_{2n} , Y_n e W_n sono indipendenti.

(v) Si assuma $p = \frac{1}{4}$ e usando la disuguaglianza di Chebishev, si dica per quali valori di n risulta

$$P\left(\left|\frac{S_{2n}}{2n} - \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{40}\right) \geq \frac{4}{5}$$

e

$$P\left(\left|\frac{W_n}{n} - \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{40}\right) \geq \frac{4}{5}$$

(vi) Si discuta la convergenza della variabile aleatoria $\frac{W_n}{n}$ quando $n \rightarrow \infty$.

20). Siano X ed Y due variabili aleatorie con valori in $\{0, 1, 2\}$ la cui funzione di distribuzione congiunta e' descritta dalla seguente tabella.

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{1}{10}$
1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$

(2)

- (i) Calcolare le funzioni di distribuzioni marginali di X e di Y , le medie $E(X)$ ed $E(Y)$ e le varianze $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$.
- (ii) Dire se X ed Y sono indipendenti.
- (iii) Calcolare la funzione di distribuzione di $W = X + Y$ e di $Z = XY$ e calcolare le medie $E(Z)$ ed $E(W)$.
- (iv) Enunciare la disuguaglianza di Cauchy Schwartz e verificarla per X e Y .

21). Sia $\Omega = \{0, 1\}^6$ l'insieme di tutte le successioni lunghe 6 di 0 e di 1.

- (i) Calcolare la cardinalita' di Ω ,
- (ii) Calcolare il numero di successioni che iniziano con 1.
- (iii) Calcolare il numero di successioni che contengono esattamente due 1.
- (iv) Calcolare il numero di successioni che hanno un numero di 1 uguale al numero di 0 + 3.
- (v) Calcolare il numero di successioni che hanno un numero di 1 uguale al numero di 0 + 2.
- (vi) Calcolare il numero di successioni crescenti (prima appaiono tutti gli 0 e poi tutti gli 1)
- (vii) Calcolare il numero di successioni che contengono né due 1 né due 0 consecutivi.

22) Siano $X_1, \dots, X_n$ $n > 1$ variabili aleatorie indipendenti che assumono valori in $\{-1, 0, 1\}$ con funzione di distribuzione

$$P(X_i = 0) = p, \quad P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = \frac{1}{2}(1 - p), \quad p \in (0, 1)$$

Sia

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- (i) Calcolare $E(S_n)$ e $\text{Var}(S_n)$.
- (ii) Si assuma $p = \frac{1}{3}$ e si dica per quali valori di n risulta

$$P\left(-\frac{1}{30} < S_n < \frac{1}{30}\right) \geq 0.9$$

- (iii) Indicando con Y_0 il numero di 0 fino ad n e con Y_1 ed Y_{-1} il numero di ± 1 fino ad n , si calcoli al variare di p il

$$\max(P(Y_0 = k), P(Y_1 = k), P(Y_{-1} = k)), \quad k \in \{1, \dots, n\}$$

- (iv) Si calcoli la distribuzione del primo arrivo di 0.

- 23)** In un sacchetto sono contenute 10 palline, 6 bianche e 4 nere.
- A) Si estraggono successivamente 2 palline senza rimpiazzo, calcolare:
- A_1) La probabilit  che la seconda pallina estratta sia bianca.
- A_2) La probabilit  che la seconda pallina estratta sia bianca condizionata al fatto che la prima pallina estratta   nera. La probabilit  che la prima pallina estratta sia nera condizionata al fatto che la seconda pallina estratta   bianca.
- A_3) Indicando con N_B e con N_N rispettivamente le variabili casuali "numero di palline bianche estratte" e "numero di palline nere estratte", se ne calcolino le funzioni di distribuzione di massa, i valori medi, le varianze e la funzione di distribuzione di massa congiunta.
- B) Si estraggono successivamente con rimpiazzo n palline, calcolare:
- B_1) La probabilit  che la seconda pallina estratta sia bianca.
- B_2) La probabilit  che la seconda pallina estratta sia bianca condizionata al fatto che la prima pallina estratta   bianca.
- B_3) Indicando con $N_B(n)$ e con $N_N(n)$ rispettivamente le variabili casuali "numero di palline bianche estratte dopo n estrazioni" e "numero di palline nere estratte dopo n estrazioni", se ne calcolino i valori medi e le varianze, le funzioni di distribuzione di massa e la funzione di distribuzione di massa congiunta. Si discuta il comportamento asintotico per n grande di $\frac{N_B(n)}{n}$ e $\frac{N_N(n)}{n}$. Si dia una stima, usando la disuguaglianza di Cebichev, della probabilit  che $N_B(n) > \frac{4}{5}$.
- 24)** Una moneta onesta viene lanciata 5 volte. Sia $\Omega = \{0, 1\}^5$ lo spazio di probabilit  usato per rappresentare i possibili risultati dell'esperimento. Determinare la distribuzione delle variabili casuali

$$X_i = \frac{\omega_i}{1 + \sum_{j=1}^5 \omega_j}$$

Dire se le variabili X_i sono indipendenti.

Nel caso in cui i lanci siano n , calcolare distribuzione e valor medio della variabile casuale $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$; calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} E(S_n)$.

25) Sia dato un dado onesto a 6 facce.

- A) Calcolare la probabilit  che lanciando 2 volte il dado si ottenga come somma dei risultati 7.
- B) Calcolare la probabilit  che al secondo lancio si ottenga 3 condizionata al fatto che la somma dei risultati dei due lanci   7.
- C) Indicando con X_1 ed X_2 le variabili casuali associate ai risultati rispettivamente del primo e del secondo lancio, rappresentare tramite una tabella la funzione di distribuzione congiunta di X_1 ed X_2 , dire se sono indipendenti e calcolare $E(X_i)$ ($i=1,2$), $E(X_1 + X_2)$, $Var(X_i)$ ($i=1,2$), $Var(X_1 + X_2)$.
- D) Si lanci n volte il dado e si discuta la convergenza quando $n \rightarrow \infty$ della variabile casuale $S_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$; dove X_i   la variabile casuale associata al risultato del lancio i -esimo.
- E) Utilizzando la disuguaglianza di Chebysev si stimi quanto deve essere grande n affin  che si abbia $P(|S_n - \frac{7}{2}| > \frac{1}{6}) < \frac{1}{10}$.
- F) Si lancia il dado pi  volte fino alla prima volta che si ottiene un 6. Indicando con N la variabile casuale associata al numero di lanci effettuati, si calcoli la funzione di distribuzione di N , il valor medio e $P(N > 10)$.

26) Sia dato un sacchetto contenente 10 palline numerate dall'uno al dieci.
ESTRAZIONI SENZA RIMPIAZZO: A) Quanti sono i possibili risultati di 3 estrazioni successive senza rimpiazzo (considerando l'ordine importante)? B) Considerando ogni estrazione equiprobabile, qual è la probabilità che tutti i numeri estratti siano ≥ 5 ? C) Qual è la probabilità che i tre numeri estratti siano tre numeri crescenti consecutivi? D) Quanti sono i possibili risultati delle tre estrazioni se non si considera l'ordine di estrazione?

ESTRAZIONI CON RIMPIAZZO: A') Quanti sono i possibili risultati di tre estrazioni successive con rimpiazzo (considerando l'ordine importante)? B') Considerando ogni risultato equiprobabile qual è la probabilità che i tre numeri estratti siano tutti e tre uguali? qual è la probabilità che siano tutti e tre diversi?

27) Siano X_i variabili casuali di Bernoulli indipendenti ed identicamente distribuite che assumono il valore 1 con probabilità p ed il valore 0 con probabilità $1-p$ ($0 < p < 1$).

A) Calcolare la funzione di distribuzione, il valore medio e la varianza delle seguenti variabili casuali:

$$A_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad ; \quad B_n = \frac{1}{(\prod_{i=1}^n X_i) + 1} \quad ; \quad C_n = \sum_{i=1}^n (1 - X_i)^{X_i} \quad ;$$

$$D_n = \max\{X_1, \dots, X_n\} \quad ; \quad E_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}.$$

B) Calcolare la funzione generatrice dei momenti per A_n . C) Mostrare che D_n converge in media quadratica ed in probabilità ad 1 e che E_n converge in media quadratica ed in probabilità a 0. D) Rappresentare in una tabella la funzione di distribuzione congiunta delle variabili casuali X_1 ed $Y = X_1 \times X_2$. Dire se X_1 ed Y sono indipendenti.

28) Siano X_i , $i \in \mathbb{N}$, variabili casuali indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione $\mathbf{P}(X_i = 1) = p$; $\mathbf{P}(X_i = 0) = 1 - p$ e sia $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Si discutano i seguenti punti:

A) Calcolare $\mathbf{E}(S_n)$ e $\mathbf{Var}(S_n)$. Determinare la distribuzione di S_n e la funzione generatrice dei momenti $G_{S_n}(y) = \mathbf{E}(e^{yS_n})$.

B) Calcolare $\mathbf{P}\left(\{X_1 = 1 \cap X_2 = 0\} \mid S_n = 10\right)$, $n \geq 10$.

C) Dimostrare che le variabili casuali S_i costituiscono una catena di Markov e calcolare $\mathbf{P}(S_n = k | S_{n-1} = j)$ al variare di k e j .

D) Sia $M_n = \max_{i=1, \dots, n} X_i$; determinare la distribuzione di M_n e mostrare che quando n diverge M_n converge ad 1 in media quadratica ed in probabilità.

E) Sia $T = \inf\{i : S_i = 1\}$, determinare la distribuzione della variabile casuale T .

F) Utilizzando la disuguaglianza di Jensen dare una stima dal basso ($\geq$) di $\mathbf{E}\left(\log\left(\frac{1}{1+S_n}\right)\right)$.

G) Dare una stima dall'alto ($\leq$) di $\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} - p > \frac{1}{20}\right)$.

H) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} - p > \frac{1}{20}\right)$$

I) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\frac{S_n - np}{\sqrt{n}} > \frac{1}{20} \right)$$

29) Siano date due urne A e B. L'urna A contiene 5 palline nere e 5 bianche; l'urna B contiene 3 palline nere e 7 bianche. Si procede all'estrazione di una pallina nel seguente modo: dapprima si sceglie una delle due urne in modo equiprobabile e poi si procede all'estrazione di una delle palline contenute nell'urna prescelta scegliendo con uguale probabilità tra tutte quelle presenti.

i) Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia nera.

ii) Calcolare la probabilità che l'urna prescelta sia la B condizionata al fatto che la pallina estratta è nera.

iii) Sia X una variabile casuale che vale 1 se la pallina estratta è nera e zero altrimenti, ed Y una variabile casuale che vale 1 se l'urna prescelta è la A e zero altrimenti. Dire se le variabili X ed Y sono indipendenti e rappresentare in una tabella la loro distribuzione di probabilità congiunta.

Si procede ora invece estraendo una pallina dall'urna A ed una pallina dall'urna B.

i) Calcolare la probabilità che le palline estratte siano diverse.

ii) Procedendo ad estrazioni con rimpiazzo successive di questo tipo dire qual'è la distribuzione di probabilità della variabile casuale T=numero di estrazioni necessarie per ottenere una coppia di palline uguali.

30) In una fabbrica c'è una macchina che è soggetta ad aleatorie cadute di tensione nella potenza erogata. Queste cadute si verificano ogni ora indipendentemente con probabilità p .

(a). Si calcoli la distribuzione del numero di cadute di tensione avvenute nelle 24 ore di un giorno in cui la macchina è rimasta sempre accesa.

(b). Usando la distribuzione del numero di cadute, si calcoli la distribuzione del tempo in cui avviene una caduta di tensione per la prima volta. Si dica quanto deve essere p affinché in media la prima caduta di tensione non avvenga entro le 24 ore.

(c). Si calcoli la probabilità che la prima caduta di tensione avvenga alle 3 sapendo che la seconda avviene dopo 2 ore dalla prima.

(d). Si calcoli la distribuzione del tempo in cui avviene la seconda caduta di tensione.

(e). Si calcoli la probabilità che la prima caduta di tensione avvenga alle 3 sapendo che la seconda avviene alle 10.

31) Un'urna contiene 10 palline numerate da 1 a 10: si effettua l'estrazione di una pallina. Il giocatore A vince 1 euro se esce un numero pari altrimenti rimane con i soldi che ha. Invece il giocatore B vince 1 euro se esce un numero pari minore o uguale a 6, perde 1 euro se esce un numero dispari e rimane con i soldi che ha negli altri casi.

(a). Indicando con V_A e V_B rispettivamente le vincite/perdite dei giocatori A e B, calcolare la distribuzione congiunta di V_A e V_B . Dire se sono indipendenti.

(b) Calcolare la probabilità che V_A sia (strettamente) maggiore di V_B .

(c). Calcolare la distribuzione di $Z \equiv V_A + V_B$, Calcolare la media e la varianza di Z .

32) Un sacchetto contiene 10 palline bianche e 6 nere. Se ne estraggono 2 senza rimpiazzo.

(a). Calcolare la probabilità che siano entrambe nere. Calcolare la probabilità che la prima sia bianca e la seconda sia nera. Calcolare la probabilità che siano una bianca ed una nera.

(b). Calcolare la probabilità che la prima pallina estratta sia bianca condizionata al fatto che la seconda estratta è bianca.

(c). Indicando con N_B e con N_N rispettivamente il numero di palline bianche e di palline nere estratte, si calcoli la distribuzione congiunta e dire se sono indipendenti.

33) Due compagnie aeree partono per la stessa destinazione ogni giorno alla stessa ora. Ogni giorno 1000 passeggeri scelgono con probabilità $1/2$ una delle due compagnie. Dire quanti posti ogni compagnia deve fornire per avere almeno il 95 per cento di confidenza di non dover rifiutare dei passeggeri.

34) Sia $\alpha > 1$ e sia

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha - 1) \frac{1}{x^\alpha} & \text{se } x > 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Verificare che f è una densità.

(i) Calcolare la funzione di ripartizione.

(ii) Dimostrare che per $1 < \alpha \leq 2$ la media non esiste e si calcoli la media per ogni $\alpha > 2$.

(iii) Dimostrare che per $1 < \alpha \leq 3$ la varianza non esiste e si calcoli la varianza per ogni $\alpha > 3$.

35) Si illustri con esempi la nozione di convergenza in media quadratica e di convergenza in probabilità.

36) In un sacchetto vi sono dieci palline numerate dall'uno al dieci.

A) Se ne estraggono due senza rimpiazzo; calcolare la probabilità che:

- i) la somma dei risultati sia maggiore di tre
- ii) la somma dei risultati sia 10
- iii) il numero della seconda pallina estratta sia maggiore di quello della prima.
- iiii) non venga estratta la pallina con il numero 5

B) Se ne estraggono due con rimpiazzo; calcolare la probabilità che

- i) la somma dei risultati sia maggiore di tre
- ii) la somma dei risultati sia 10
- iii) il numero della seconda pallina estratta sia maggiore di quello della prima.
- iiii) non venga estratta la pallina con il numero 5

C) Si effettuano n estrazioni successive con rimpiazzo. Indichiamo con X_i la variabile casuale associata all'estrazione i -esima e con $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

- i) Calcolare $\mathbf{E}(S_n)$ e $\mathbf{Var}(S_n)$ (Indicare con $\sigma^2 = \mathbf{Var}(X_1)$).
- ii) Stimare quanto deve essere grande n affinché

$$\mathbf{P}\left(|S_n - \mathbf{E}(S_n)| \geq \frac{1}{10}\right) \leq \frac{1}{100}$$

37) Dare la definizione di variabile casuale continua e fornirne degli esempi. Calcolare valore di aspettazione e varianza degli esempi proposti (quando possibile).

38) In un sacchetto vi sono 10 palline numerate dall'uno al dieci.

A) Se ne estraggono due senza rimpiazzo. Calcolare la probabilità che entrambe abbiano un numero maggiore di 5. Calcolare la probabilità che il numero della seconda sia maggiore del numero della prima.

B) Se ne estraggono n con rimpiazzo. Sia X_i la variabile casuale associata al risultato dell'estrazione i -esima. Enunciare e dimostrare la legge dei grandi numeri per le variabili casuali X_i .

39) Siano X_i variabili casuali i.i.d. tali che $P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$ e $P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. Definiamo $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

A) Dimostrare che $P(S_{2n} = 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}(1 + \epsilon_n)$ dove ϵ_n è una successione tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_n = 0$ (Si ricordi che la formula di Stirling dice che $n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}(1 + \delta_n)$ con $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$).

B) Dimostrare, utilizzando le funzioni generatrici dei momenti, il teorema del limite centrale per le variabili X_i .

40) Siano $X_1, \dots, X_n$ variabili i.i.d con distribuzione uniforme nell'intervallo $[0, 10]$. Definiamo la variabile casuale Y come $Y = \min\{X_1, \dots, X_n\}$.

A) Trovare la funzione di distribuzione di Y e la corrispondente densità.

B) Calcolarne il valore medio.

41) Siano date le seguenti funzioni di variabile reale:

$$f_1(x) = \begin{cases} c_1 x \sin x & x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3)$$

$$f_2(x) = \begin{cases} c_2 e^x & x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4)$$

$$f_3(x) = \begin{cases} c_3 x^2 & x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (5)$$

Determinare i valori delle costanti c_1, c_2, c_3 affinché f_1, f_2 ed f_3 possano essere interpretate come densità di probabilità. Siano X_1, X_2 ed X_3 delle variabili casuali con densità rispettivamente f_1, f_2 ed f_3 , calcolare $E[X_1], E[X_2]$ ed $E[X_3]$.

Siano Y_i variabili casuali i.i.d. con densità f_3 . Utilizzando la disuguaglianza di Chebysev dare una stima dall'alto ($\leq$) della seguente probabilità

$$P\left(\left|\frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} Y_i - E[Y_1]\right| > \frac{1}{10}\right) \quad (6)$$

42) In un sacco contenente 20 pile scariche cadono 5 pile cariche. Calcolare la probabilità che estraendone 2 senza rimpiazzo queste siano entrambe cariche. Calcolare la probabilità che estraendone due senza rimpiazzo almeno una delle due sia carica. Quante pile cariche è necessario aggiungere al sacco affinché la probabilità che estraendone due senza rimpiazzo queste siano entrambe cariche, sia maggiore di $\frac{1}{2}$?

Ogni giorno una pila viene estratta dal sacco contenente 25 pile di cui solo 5 cariche, viene inserita all'interno di un apparecchio elettrico ed a fine giornata viene rimessa all'interno del sacco. Calcolare la distribuzione della variabile casuale $T = \text{primo giorno di funzionamento dell'apparecchio}$. Indicando con $N(n)$ la variabile casuale associata al numero di giorni in cui l'apparecchio ha funzionato in n giorni complessivi, si calcoli la distribuzione della variabile casuale $N(n)$, il suo valore medio e la sua varianza. Si discuta il comportamento asintotico della variabile casuale $\frac{N(n)}{n}$ per n grande.

43) Consideriamo un cubo a 6 facce ognuna delle quali può essere colorata utilizzando 6 colori diversi. Supponendo che ognuna delle colorazioni possibili sia equiprobabile calcolare

- La probabilità che tutte le facce abbiano lo stesso colore.
- La probabilità che tutte le facce abbiano colori diversi.
- La probabilità che la faccia superiore sia di colore 1 condizionata al fatto che tutte le facce abbiano colori diversi.
- La probabilità che vi siano solo 2 colori.
- La probabilità che le facce opposte abbiano colori diversi.
- La probabilità che le facce opposte abbiano colori uguali.
- La probabilità che la faccia superiore e la faccia inferiore abbiano lo stesso colore condizionata al fatto che esistono solo due colori.

(P.S. Le facce sono distinguibili, ad esempio numerate dall'uno al sei)

SOLUZIONI

1) Indichiamo con A_i l'evento "il dado i -esimo non dà come risultato 1". Allora $P(A_i) = (1 - \frac{1}{6})$. Gli eventi A_i sono indipendenti, quindi

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1}$$

2) Chiamiamo x il numero di palline nere. Indichiamo con X_1 ed X_2 le variabili casuali associate alla prima ed alla seconda estrazione. $P(x_1 = N) = \frac{x}{10+x}$; $P(X_2 = N | X_1 = N) = \frac{x-1}{9+x}$.

$$P(X_1 = N \bigcap X_2 = N) = P(x_1 = N)P(X_2 = N | X_1 = N) = \frac{x(x-1)}{(10+x)(9+x)} > \frac{1}{2}$$

Si ottiene quindi la disuguaglianza $x^2 - 21x - 90 > 0$ ed in definitiva $x \geq 25$.

3) I possibili ordinamenti sono $40!$. Quelli che non contengono assi fra le prime dieci sono $36 \times 35 \times \dots \times 27 \times 30 \times 29 \dots \times 1$. In definitiva la probabilità cercata è $\frac{36 \times 35 \times \dots \times 27}{40 \times 39 \times \dots \times 31}$.

4) I possibili ordinamenti delle carte sono $52!$. I possibili ordinamenti alternati sono $26! \times 26! \times 2$; questo si ottiene separando le carte rosse dalle nere, considerando i possibili ordinamenti dei due mazzi da 26 carte e poi rimettendoli insieme alternando rosse e nere e cominciando una volta con le rosse ed una volta con le nere. Quindi la probabilità cercata è $\frac{2 \times (26!)^2}{52!}$.

5) Alloggiamo dapprima la famiglia A nell'appartamento del primo piano. In seguito la famiglia B, che può essere posta in tre diversi appartamenti. Poi le rimanenti 3 famiglie possono essere alloggiate in $3!$ modi diversi. Quindi il numero di possibili disposizioni delle famiglie con la famiglia A alloggiata al primo piano è $3 \times 3!$. Lo stesso numero si ottiene con la famiglia A al quinto piano. Il numero di alloggiamenti con la famiglia A in piani differenti dal primo e quinto si ottiene nel modo seguente: allogiamo dapprima la famiglia A e questo lo si può fare in tre modi diversi, poi la famiglia B che può scegliere tra 2 opzioni solamente ed infine le rimanenti tre famiglie in $3!$ modi possibili. In totale il numero di alloggiamenti che soddisfano il vincolo richiesto è $4 \times 3 \times 3! = 72$.

6) Vi sono vari modi di risolvere l'esercizio. Uno elegante è il seguente. Chiaramente la probabilità non viene modificata se invece di fermarmi alla quinta estrazione proseguo ad estrarre palline fino a che il sacchetto non rimane vuoto. I possibili risultati di tale estrazione sono tutte le possibili sequenze lunghe dieci di B ed N, ognuna di queste equiprobabile. A questo punto il conteggio è semplice: le sequenze che hanno una B nella prima posizione ed una nella quinta sono $\binom{8}{2}$; le sequenze che hanno una B nella quinta posizione sono $\binom{9}{3}$; otteniamo quindi che la probabilità richiesta è

$$\frac{\binom{8}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{1}{3}$$

Da tale argomento si deduce anche che la probabilità la prima sia bianca condizionata al fatto che la n -esima sia bianca è sempre la stessa qualunque sia $n \leq 10$ (in particolare anche per $n=2$ che riduce i calcoli). Il risultato può essere così interpretato: si sa che in una estrazione successiva, non importa quale, uscirà una pallina bianca quindi alla prima estrazione tale pallina non potrà essere scelta e di conseguenza abbiamo una estrazione con nove palline di cui tre bianche ed il risultato $\frac{1}{3}$ è immediato.

7) I risultati possibili sono 2^{10} ognuno equiprobabile. Sia A l'evento "il numero di teste ottenute è 3" e sia B l'evento "al quinto lancio si ottiene una testa". Il numero di risultati contenenti esattamente 3 teste è $\# \{B\} = \binom{10}{3}$. Il numero di risultati contenenti esattamente tre teste ed una di queste ottenuta al quinto lancio è $\# \{A \cap B\} = \binom{9}{2}$. Quindi

$$P(A|B) = \frac{\# \{A \cap B\}}{\# \{B\}} = \frac{3}{10}$$

8) Chiamiamo A e B i due eventi. Chiaramente $P(A) = \frac{4 \times 39!}{40!} = P(B)$. Mentre invece $P(A \cap B) = \frac{4^2 \times 38!}{40!}$. È facile verificare che $P(A)P(B) \neq P(A \cap B)$ quindi gli eventi non sono indipendenti.

9) Chiamiamo X la variabile casuale associata al risultato del lancio della moneta ed Y la variabile casuale associata al risultato totale del(i) lanci(o) del(i) dado(i).

$$P(X = T | Y = 4) = \frac{P(X = T, Y = 4)}{P(Y = 4)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{36}} = \frac{2}{3}$$

10) a) $X = \sum_{i=1}^5 Y_i$ con $Y_i = \omega_{2i}\omega_{2i-1}$. Le Y_i sono i.i.d. Bernoulli di parametro $\frac{1}{4}$; quindi X e' una variabile $Bin(5, \frac{1}{4})$ (binomiale di parametri 5 ed $\frac{1}{4}$). $E(X) = \frac{5}{4}$; $Var(X) = \frac{15}{16}$.

b) $X = \sum_{i=1}^5 Y_i$, con le Y_i i.i.d. di Bernoulli di parametro $\frac{1}{2}$; quindi X e' una variabile $Bin(5, \frac{1}{2})$ (binomiale di parametri 5 ed $\frac{1}{2}$). $E(X) = \frac{5}{2}$; $Var(X) = \frac{5}{4}$.

c) La variabile X vale 1 se e solo se tutte le ω_i sono uno e zero altrimenti. Quindi X e' una variabile di Bernoulli di parametro $\frac{1}{2^{10}}$. $E(X) = \frac{1}{2^{10}}$; $Var(X) = \frac{1}{2^{10}}(1 - \frac{1}{2^{10}})$.

d) Le variabili χ_{A_i} sono variabili i.i.d di Bernoulli di parametro $\frac{1}{2}$; quindi X e' una variabile $Bin(5, \frac{1}{2})$ (binomiale di parametri 5 ed $\frac{1}{2}$). $E(X) = \frac{5}{2}$; $Var(X) = \frac{5}{4}$.

11) Chiamiamo X_i la variabile casuale associata all'estrazione i -esima. Chiaramente

$$P(N = 1) = P(X_1 = R) = \frac{1}{6}$$

$$P(N = 2) = P(X_1 = B, X_2 = R) = P(X_2 = R | X_1 = B)P(X_1 = B) = \frac{2}{6} \times \frac{5}{6}$$

$$\begin{aligned} P(N = 3) &= P(X_1 = B, X_2 = B, X_3 = R) \\ &= P(X_3 = R | X_1 = B, X_2 = B)(1 - P(N = 1) - P(N = 2)) = \frac{5}{18} \end{aligned}$$

Con calcoli analoghi si ottiene $P(N = 4) = \frac{5}{27}$, $P(N = 5) = \frac{25}{324}$, $P(N = 6) = \frac{5!}{6^5}$.

12) Poiche' il quarto asso partendo dall'alto e' il primo asso partendo dal basso, per motivi di simmetria si ha la seguente relazione

$$P(\text{pos. } 4^{\text{o}} \text{ asso} = k) = P(\text{pos. } 1^{\text{o}} \text{ asso} = 40 - k + 1)$$

Si calcola facilmente

$$P(\text{pos. } 1^{\text{o}} \text{ asso} = m) = \frac{(36)_{m-1} \times 4}{(40)_m}$$

(Abbiamo usato la notazione $(n)_m = n \times n - 1 \times \dots \times n - m + 1$). quindi infine otteniamo

$$P(\text{pos. } 4^{\text{o}} \text{ asso} = k) = \frac{(36)_{40-k} \times 4}{(40)_{40-k+1}}$$

13) Lo spazio di probabilità opportuno e'

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3), \omega_i = A, B, C, D, E\}$$

$|\Omega| = 5^3$ la misura e' quella uniforme. Indichiamo con N una generica urna diversa da A . Le configurazioni che si possono avere sono del tipo:

(A, N, N) ; S vale 1 ; in totale sono 4^2

(N, A, N) ; $S=2$; 4^2

(N, N, A) ; $S=3$; 4^2

(A, A, N) ; $S=3$; 4

(A, N, A) ; $S=4$; 4

(N, A, A) ; $S=5$; 4

(A, A, A) ; $S=6$; 1

Da questa tabella e' immediato calcolare la funzione di distribuzione di massa.

14) La cardinalità dello spazio di probabilità e' $\binom{7}{2}$. Infatti le configurazioni di particelle possono essere mappate uno ad uno su sequenze di lunghezza 7 di pallini bianchi e neri contenenti esattamente due pallini neri. I pallini neri dividono i pallini bianchi in tre gruppi che corrispondono rispettivamente al numero di particelle nelle urne A, B e C. Ad esempio la sequenza

○ ○ ● ○ ● ○ ○

corrisponde alla configurazione $N_A = 2, N_B = 1, N_C = 2$. Allo stesso modo si può quindi ottenere che il numero di configurazioni corrispondenti ad $N_A = k$ ($k = 0, \dots, 5$) e' $\binom{7-k-1}{1} = 7 - k - 1$ quindi

$$P(N_A = k) = \frac{7 - k - 1}{\binom{7}{2}} \quad k = 0, \dots, 5$$

15) Indichiamo con X_i le variabili casuali associate alla prima ed alla seconda estrazione ed indichiamo con $C_i, i = 1, \dots, 5$ i 5 colori.

$$P(N = 1) = \sum_{i=1}^5 P(X_1 = C_i)P(X_2 = C_i | X_1 = C_i) = \sum_{i=1}^5 \frac{1}{5} \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

Chiaramente $P(N = 2) = 1 - P(N = 1)$.

$$E(N) = 1 \frac{1}{9} + 2 \frac{8}{9} = \frac{17}{9}$$

$$Var(N) = 1 \frac{1}{9} + 4 \frac{8}{9} - \left(\frac{17}{9}\right)^2 = \frac{11}{3} - \left(\frac{17}{9}\right)^2$$

16) Deve essere

$$1 = \sum_{i=1}^n p(i) = c \sum_{i=1}^n i = c \frac{n(n+1)}{2} \quad (7)$$

quindi

$$c = \frac{2}{n(n+1)}$$

a)

$$E(X_1) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i \frac{1}{i} = \frac{2}{n(n+1)} n = \frac{2}{n+1}$$

b)

$$E(\chi_A) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i \chi_A(i) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^3 i = \frac{12}{n(n+1)}$$

c)

$$E(X_3) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i 2^i$$

Per calcolare la somma si osserva che per ogni x

$$\sum_{i=1}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1 = \frac{x-x^{n+1}}{1-x}$$

Calcolando la derivata rispetto ad x in entrambi i membri si ha

$$\sum_{i=1}^n i x^{i-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

Quindi

$$\sum_{i=1}^n i x^i = x \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

Per $x = 2$ si ottiene

$$\sum_{i=1}^n i 2^i = 2(1 + 2^n(-n - 1 + 2n))$$

Quindi

$$E(X_3) = \frac{4(1 + (n-1)2^n)}{n(n+1)}$$

17) Poiche' il dado e' onesto, $P(D = i) = \frac{1}{6}$ per ogni $i = 1, \dots, 6$,

a) Per calcolare la distribuzione della variabile casuale T si osserva che

$$P(T = k) = \sum_{i=k}^6 P(T = k/D = i)P(D = i) = \frac{1}{6} \sum_{i=k}^6 P(T = k/D = i) \quad (8)$$

Poiche' testa e croce sono equiprobabili,

$$P(T = k/D = i) = \frac{1}{2^i} \binom{i}{k} \quad (9)$$

Quindi

$$P(T = k) = \frac{1}{6} \sum_{i=k}^6 \frac{1}{2^i} \binom{i}{k} \quad (10)$$

b) Per definizione si ha che

$$P(D = 3/T = 2) = \frac{P(\{D = 3, T = 2\})}{P(T = 2)} \quad (11)$$

Poiche'

$$P(\{D = 3, T = 2\}) = \frac{1}{6} \frac{1}{2^3} \binom{3}{2}$$

da a) per $k = 2$ segue

$$P(D = 3/T = 2) = \frac{1}{2^3} \binom{3}{2} \left[\sum_{i=2}^6 \frac{1}{2^i} \binom{i}{2} \right]^{-1} = \binom{3}{2} \left[\sum_{i=2}^6 \frac{1}{2^{3-i}} \binom{i}{2} \right]^{-1} \quad (12)$$

c) La variabile casuale T é la somma aleatoria di variabili aleatorie $X_i \in \{0, 1\}$, indipendenti ed indipendenti da D , con distribuzione di Bernoulli di parametro $1/2$,

$$T = \sum_{i=1}^D X_i, \quad P(X_i = 1) = \frac{1}{2}, \forall i = 1, \dots, D$$

d) Per le somme aleatorie di variabili aleatorie indipendenti con uguale distribuzione ed indipendenti da D , vale la seguente proprieta'

$$E\left(\sum_{i=1}^D X_i\right) = E(D)E(X_1)$$

Quindi

$$E(T) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 i \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^6 i = \frac{7}{4}$$

Usando il teorema di partizione si ottiene lo stesso risultato

$$E(T) = \sum_{i=1}^6 E(T/D = i)P(D = i) = \sum_{i=1}^6 i \frac{1}{2} \frac{1}{6} = \frac{7}{4}$$

e) Per un teorema dimostrato a lezione la funzione generatrice $G_T(s)$ e' data da:

$$G_T(s) = G_D(G_X(s))$$

Si ha che

$$G_D(s) = \sum_{k=1}^6 s^k \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \frac{s - s^7}{1 - s}$$

e

$$G_X(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s = \frac{1}{2}(1 + s)$$

Quindi

$$G_T(s) = \frac{1}{6} \frac{1 + s - \frac{(1+s)^7}{2^6}}{1 - s}$$

18) I modi possibili di distribuire le 40 carte tra i due giocatori e' $\binom{40}{20}$. Quindi

$$P(N_A = k) = \frac{\binom{4}{k} \binom{36}{20-k}}{\binom{40}{20}}$$

La seguente identita'

$$\sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \binom{36}{20-k} = \binom{40}{20}$$

permette di controllare che la somma su k di $P(N_A = k)$ fa 1.

b) La variabile N_B ha la stessa distribuzione di N_A , quindi $E(N_A) = E(N_B)$, inoltre $N_A + N_B = 4$. Quindi

$$4 = E(N_A + N_B) = 2E(N_A) \implies E(N_A) = E(N_B) = 2$$

c) Poiche' se $N_A = k$ allora $N_B = 4 - k$, la funzione di distribuzione congiunta di (N_A, N_B) e'

$$P(N_A = k, N_B = k') = \begin{cases} 0 & \text{se } k + k' \neq 4, \\ P(N_A = k) & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (13)$$

d) Quando il numero di carte e' $2n$ si ha che

$$P_n(N_A = k) = \binom{4}{k} \frac{\binom{2n-4}{n-k}}{\binom{2n}{n}} = \binom{4}{k} \frac{(2n-k)!n!}{(n-k)!(n+k-4)!(2n)!} \quad (14)$$

$$= \binom{4}{k} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)n(n-1) \dots (n+k-3)}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)} \quad (15)$$

Sia nel numeratore che nel denominatore c'e' un polinomio di quarto grado in n . Il coefficiente del grado massimo e' 1 al numeratore e 2^4 al denominatore, quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(N_A = k) = \binom{4}{k} \frac{1}{2^k}$$

Si ottiene pertanto una distribuzione binomiale di parametri 4 e $1/2$.

19)

$$P(S_{2n} = k) = \binom{2n}{k} p^k (1-p)^{2n-k}, \quad k = 0, \dots, 2n, \quad E(S_{2n}) = 2np, \quad \text{var}(S_{2n}) = 2npq$$

$$P(W_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n, \quad E(W_n) = np, \quad \text{var}(W_n) = npq$$

$$P(Y_n = 0) = (1-p)^2, P(Y_n = 1) = 2p(1-p), P(Y_n = 2) = p^2, \quad E(Y_n) = 2p, \quad \text{var}(Y_n) = 2pq$$

Le variabili non sono indipendenti. Ad esempio

$$P(S_{2n} = 0, W_n = 1) = 0 \neq P(S_{2n} = 0)P(W_n = 1)$$

$$P(S_{2n} = 0, Y_n = 1) = 0 \neq P(S_{2n} = 0)P(Y_n = 1)$$

$$P(W_n = 0, Y_n = 1) = 0 \neq P(W_n = 0)P(Y_n = 1)$$

Per Chebisev:

$$P\left(\left|\frac{S_{2n}}{2n} - \frac{1}{4}\right| \geq \frac{1}{40}\right) \leq (40)^2 \frac{1}{4} \frac{3}{4} \frac{1}{2n}$$

Che permette di dedurre $P\left(\left|\frac{S_{2n}}{2n} - \frac{1}{4}\right| \geq \frac{1}{40}\right) \leq \frac{1}{5}$ quando $n \geq 6 \times 5^3$.

Per Chebisev:

$$P\left(\left|\frac{W_n}{n} - \frac{1}{4}\right| \geq \frac{1}{40}\right) \leq (40)^2 \frac{1}{4} \frac{3}{4} \frac{1}{n}$$

Che permette di dedurre $P\left(\left|\frac{S_{2n}}{2n} - \frac{1}{4}\right| \geq \frac{1}{40}\right) \leq \frac{1}{5}$ quando $n \geq 12 \times 5^3$.

Per la legge dei grandi numeri $\frac{W_n}{n}$ converge in media quadratica ed in probabilit  a p .

20)

$$P(X = 0) = \frac{2}{5} \quad P(X = 1) = \frac{1}{5} \quad P(X = 2) = \frac{2}{5}$$

$$E(X) = \frac{1}{5} + 2\frac{2}{5} = 1$$

$$E(X^2) = \frac{1}{5} + 4\frac{2}{5} = \frac{9}{5}; \quad Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{4}{5}$$

$$P(Y = 0) = \frac{2}{5}; \quad P(Y = 1) = \frac{2}{5}; \quad P(Y = 2) = \frac{1}{5}$$

$$E(Y) = \frac{2}{5} + 2\frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$E(Y^2) = \frac{2}{5} + 4\frac{1}{5} = \frac{6}{5}; \quad Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{14}{25}$$

Essendo $P(X = k, Y = k') \neq P(X = k)P(Y = k')$ le variabili non sono indipendenti.

$E(W) = E(X) + E(Y) = \frac{9}{5}$. Inoltre $Im(W) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $P(W = 0) = \frac{3}{10}$; $P(W = 1) = 0$; $P(W = 2) = \frac{2}{5}$; $P(W = 3) = \frac{1}{5}$; $P(W = 4) = \frac{1}{10}$.
 $Im(Z) = \{0, 1, 2, 4\}$ inoltre $P(Z = 0) = \frac{1}{2}$; $P(Z = 1) = \frac{1}{5}$; $P(Z = 2) = \frac{1}{5}$; $P(Z = 4) = \frac{1}{10}$.

$$E(Z) = \frac{1}{5} + 2\frac{1}{5} + 4\frac{1}{10} = 1 \neq E(X)E(Y)$$

La disuguaglianza di Cauchy-Schwartz dice

$$(E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$$

per verificarla basta inserire i valori calcolati

$$1 \leq \frac{9}{5} \times \frac{6}{5}$$

21)

(i)

$$|\Omega| = 2^6$$

(ii)

$$2^5$$

(iii)

$$\binom{6}{2}$$

(iv) Se U e' il numero di 1 e Z e' il numero di 0 allora $U + Z = 6$ inoltre si deve avere $U = Z + 3$. Questo implica $Z = \frac{3}{2}$ impossibile; quindi il numero di tali sequenze e' 0.

(v) Se U e' il numero di 1 e Z e' il numero di 0 allora $U + Z = 6$ inoltre si deve avere $U = Z + 2$. Questo implica $Z = 2$ e $U = 4$. Il numero di tali successioni e' $\binom{6}{4}$.

(vi) Esiste una successione crescente per ogni numero intero (il numero di 0 del blocco iniziale) compreso tra zero e sei . Quindi il numero totale di successioni crescenti e' 7.

(vii) Esistono solo due sequenze con tale proprieta: sono sequenze alternate di 0 ed 1 una che comincia con uno 0 ed una che comincia con un 1.

24) Chiaramente le variabili X_i sono identicamente distribuite. E' facile vedere che $P(X_i = 0) = \frac{1}{2}$ e poi

$$P(X_i = \frac{1}{2+k}) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \binom{4}{k} \quad k = 0, \dots, 4$$

Le variabili non sono indipendenti, infatti vale $P(X_1 = \frac{1}{6}, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 0, X_5 = 0) = 0$ che e' diverso dal prodotto delle probabilita'. La distribuzione di S_n e'

$$P(S_n = \frac{k}{k+1}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \binom{n}{k} \quad k = 0, \dots, n$$

L'espressione di $E(S_n)$ e'

$$E(S_n) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{k+1} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Dalla formula del binomio di Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

con derivazioni integrazioni moltiplicazioni e divisioni per x si arriva alla formula

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{k+1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n - \frac{(x+y)^{n+1}}{x(n+1)}$$

che calcolata per $x = y = \frac{1}{2}$ da $E(S_n) = 1 - \frac{2}{n+1}$ che converge ad 1 quando n diverge.

25) A) $P(X_1 + X_2 = 7) = \sum_{k=1}^6 P(X_1 = k, X_2 = 7-k) = \sum_{k=1}^6 P(X_1 = k)P(X_2 = 7-k) = \sum_{k=1}^6 \frac{1}{6} \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$.

B) $P(X_2 = 3 | X_1 + X_2 = 7) = \frac{P(X_2=3, X_1+X_2=7)}{P(X_1+X_2=7)} = 6P(X_2 = 3)P(X_1 = 4) = \frac{1}{6}$.

C) È una tabella con entrate tutte pari a $\frac{1}{36}$. $P(X_1 = k, X_2 = k') = P(X_1 = k)P(X_2 = k')$ quindi sono indipendenti. $E(X_1) = E(X_2) = \sum_{k=1}^6 \frac{k}{6} = \frac{7}{2}$. $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 7$. $E(X_1^2) = \sum_{k=1}^6 \frac{k^2}{6} = \frac{91}{6}$. $Var(X_1) = Var(X_2) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = \frac{35}{12}$. $Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) = \frac{35}{6}$.
D) S_n converge in media quadratica ed in probabilità a $\frac{7}{2}$ per la legge dei grandi numeri.

E) $P(|S_n - \frac{7}{2}| > \frac{1}{6}) \leq 6^2 Var(S_n) = 6^2 \frac{Var(X_1)}{n} = \frac{105}{n} < \frac{1}{10} \rightarrow n > 1050$.

F) $P(N = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$ Distribuzione geometrica di parametro $\frac{1}{6}$. $E(N) = 6$.
 $P(N > 10) = 1 - \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$.

26) A) $10 \times 9 \times 8 = 720$. La prima pallina può essere scelta tra 10 la seconda tra le nove rimanenti e la terza tra le 8 rimanenti.

B) $\frac{6 \times 5 \times 4}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{6}$. La prima pallina può essere scelta tra 6 la seconda tra cinque e la terza tra le 4 rimanenti, ogni possibile estrazione ha probabilità uno sulla cardinalità dello spazio.

C) $\frac{8}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{90}$ Le possibili estrazioni di questo tipo sono solo 8 ognuna individuata dal primo numero estratto che può essere solo minore od uguale ad 8.

D) $\frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = 120$ In questo caso bisogna dividere il risultato del punto A per tutti i possibili ordinamenti di tre oggetti.

A') 10^3 . La cardinalità del prodotto cartesiano tre volte dell'insieme dei numeri naturali minori od uguali a 10.

B') $\frac{10}{10^3} = \frac{1}{100}$ uguali. $\frac{10 \times 9 \times 8}{10^3} = \frac{18}{25}$ diversi.

27) A) A_n è una binomiale di parametri (n, p) . $P(A_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
 $E(A_n) = np$. $Var(A_n) = np(1-p)$.

$P(B_n = \frac{1}{2}) = p^n$, $P(B_n = 1) = 1 - p^n$. $E(B_n) = \frac{1}{2}p^n + 1 - p^n = 1 - \frac{1}{2}p^n$.
 $E(B_n^2) = \frac{1}{4}p^n + 1 - p^n = 1 - \frac{3}{4}p^n$. $Var(B_n) = 1 - \frac{3}{4}p^n - (1 - \frac{1}{2}p^n)^2 = \frac{1}{4}p^n(1 - p^n)$.

C_n è una binomiale di parametri $(n, 1-p)$. $P(C_n = k) = \binom{n}{k} p^{n-k} (1-p)^k$.
 $E(C_n) = n(1-p)$. $Var(C_n) = np(1-p)$.

$P(D_n = 0) = (1-p)^n$, $P(D_n = 1) = 1 - (1-p)^n$. $E(D_n) = 1 - (1-p)^n$.
 $Var(D_n) = (1 - (1-p)^n)(1-p)^n$.

$P(E_n = 0) = 1 - p^n$, $P(E_n = 1) = p^n$. $E(E_n) = p^n$. $Var(E_n) = p^n(1 - p^n)$.

B) $E(s^{A_n}) = E(s^{\sum_{i=1}^n X_i}) = \prod_{i=1}^n E(s^{X_i}) = (1 + p(s-1))^n$.

C) $E[(D_n - 1)^2] = (1-p)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

$E[(E_n)^2] = p^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. La convergenza in media quadratica implica poi quella in probabilità.

D) $P(X_1 = 0, Y = 0) = P(X_1 = 0)P(Y = 0|X_1 = 0) = 1 - p \neq P(X_1 = 0)P(Y = 0) = (1-p)(1-p^2)$. Questo implica che le due variabili non sono indipendenti.

$P(X_1 = 0, Y = 1) = P(X_1 = 0)P(Y = 1|X_1 = 0) = 0$

$P(X_1 = 1, Y = 0) = P(X_1 = 1)P(Y = 0|X_1 = 1) = p(1-p)$

$P(X_1 = 1, Y = 1) = P(X_1 = 1)P(Y = 1|X_1 = 1) = p^2$

28) A) Per la linearità del valore di aspettazione $\mathbf{E}(S_n) = n\mathbf{E}(X_1) = np$. Poiché le X_i sono i.i.d $\mathbf{Var}(S_n) = n\mathbf{Var}(X_1) = np(1-p)$. La distribuzione di S_n è

$B(n, p)$: binomiale di parametri n e p ,

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

(infatti $\binom{n}{k}$ e' il numero di modi possibili di scegliere k variabili che assumono il valore 1 tra n , $p^k (1-p)^{n-k}$ e' la probabilita' di ogni realizzazione di n variabili con k uno e $(n-k)$ 0).

$$G_{S_n}(y) = \mathbf{E}(e^{yS_n}) = (\mathbf{E}(e^{yX_1}))^n = (1 + p(e^y - 1))^n$$

La seconda uguaglianza e' dovuta all'indipendenza delle X_i .

B)

$$\mathbf{P}\left(\left\{X_1 = 1 \cap X_2 = 0\right\} \mid S_n = 10\right) = \frac{\binom{n-2}{9} p^{10} (1-p)^{n-10}}{\binom{n}{10} p^{10} (1-p)^{n-10}} = \frac{10(n-10)}{n(n-1)}$$

C)

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(S_n = k | S_{n-1} = j, S_{n-2} = l) \\ &= \frac{\mathbf{P}(S_n = k \cap S_{n-1} = j \cap S_{n-2} = l)}{\mathbf{P}(S_{n-1} = j \cap S_{n-2} = l)} \\ &= \frac{\mathbf{P}(S_{n-2} = l) \mathbf{P}(X_{n-1} = j-l) \mathbf{P}(X_n = k-j)}{\mathbf{P}(S_{n-2} = l) \mathbf{P}(X_{n-1} = j-l)} \\ &= \mathbf{P}(X_n = k-j) \end{aligned}$$

E un calcolo analogo vale per ulteriori condizionamenti su variabili S_i , $i < n-1$. Quindi, quando $j \in [0, n-1]$, $\mathbf{P}(S_n = k | S_{n-1} = j) = p$ se $k = j+1$; $\mathbf{P}(S_n = k | S_{n-1} = j) = 1-p$ se $k = j$.

D) La variabile casuale M_n assume solamente i valori 1 e 0. Assume il valore 0 solamente se tutte le X_i $i = 1, \dots, n$ sono zero; quindi $\mathbf{P}(M_n = 0) = (1-p)^n$ e di conseguenza $\mathbf{P}(M_n = 1) = 1 - (1-p)^n$.

$$\mathbf{E}\left((M_n - 1)^2\right) = \mathbf{P}(M_n = 0) = (1-p)^n$$

che converge a zero quando n diverge. La convergenza in media quadratica implica quella in probabilita'.

E)

$$\mathbf{P}(T = k) = \mathbf{P}(X_i = 0, i = 1 \dots, k-1 \cap X_k = 1) = (1-p)^{k-1} p$$

la distribuzione e' una geometrica di parametro p .

F) La disuguaglianza di Jensen dice: data f una funzione convessa ed X una variabile casuale X allora $\mathbf{E}(f(X)) \geq f(\mathbf{E}(X))$. Applichiamo la disuguaglianza con $f(x) = \log \frac{1}{1+x}$ ed $X = S_n$; otteniamo $\mathbf{E}\left(\log\left(\frac{1}{1+S_n}\right)\right) \geq \log \frac{1}{1+np}$.

G)

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} - p > \frac{1}{20}\right) \leq \mathbf{P}\left(\left(\frac{S_n}{n} - p\right)^2 > \frac{1}{20^2}\right)$$

Applicando Chebysev

$$\mathbf{P} \left(\left(\frac{S_n}{n} - p \right)^2 > \frac{1}{20^2} \right) \leq 20^2 \mathbf{Var} \left(\frac{S_n}{n} \right) = \frac{20^2 p(1-p)}{n}$$

Una seconda possibilità e':

$$\mathbf{P} \left(\frac{S_n}{n} - p > \frac{1}{20} \right) = \mathbf{P} \left(e^{t(\frac{S_n}{n} - p)} > e^{\frac{t}{20}} \right) \quad t > 0.$$

Applicando la disuguaglianza di Markov si ottiene

$$\mathbf{P} \left(e^{t(\frac{S_n}{n} - p)} > e^{\frac{t}{20}} \right) \leq e^{-\frac{t}{20}} G_{S_n} \left(\frac{t}{n} \right)$$

Valendo tale disuguaglianza per ogni t si ottiene la stima migliore

$$\inf_{t \in \mathbb{R}^+} \left\{ e^{-\frac{t}{20}} G_{S_n} \left(\frac{t}{n} \right) \right\}$$

Calcolandone il minimo si ottiene l'espressione

$$\left(\frac{1-p}{1-p-\frac{1}{20}} \right)^n \left(\frac{p(1-p-\frac{1}{20})}{(p+\frac{1}{20})(1-p)} \right)^{n(p+\frac{1}{20})}$$

che si può scrivere nella forma

$$e^{-nI_p(p+\frac{1}{20})}$$

dove $I_p(x) = x \log \frac{x}{p} + (1-x) \log \frac{1-x}{1-p}$.

H) Per la legge debole dei grandi numeri, che e' una diretta conseguenza delle stime del punto precedente tale limite e' 0.

I) Il valore del limite si puo' dedurre direttamente dal teorema del limite centrale:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)}} \int_{\frac{1}{20}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2p(1-p)}} dx$$

29) PRIMA PARTE $\bullet = \text{pallina nera}$ $\circ = \text{pallina bianca}$

$$\text{i)} P(\bullet) = P(\bullet|A)P(A) + p(\bullet|B)P(B) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{3}{10} \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$$

$$\text{ii)} P(B|\bullet) = \frac{P(B \cap \bullet)}{P(\bullet)} = \frac{3/20}{2/5} = \frac{3}{8}$$

iii)

$Y \setminus X$	0	1
0	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{20}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

(16)

le variabili non sono indipendenti.

PARTE SECONDA

$$\text{i)} P(\text{diverse}) = P(\bullet_A \cap \circ_B) + P(\circ_A \cap \bullet_B) = \frac{1}{2} \frac{7}{10} + \frac{1}{2} \frac{3}{10} = \frac{1}{2}.$$

ii) La variabile T ha una distribuzione geometrica di parametro $\frac{1}{2}$. Quindi $P(T = n) = q^{n-1}p = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

30). Indichiamo con X_i , $i = 1, 2, \dots, 24$ le variabili aleatorie che valgono 1 se all'ora i si verifica una caduta di tensione e 0 altrimenti. Per ipotesi esse sono variabili di Bernoulli indipendenti con parametro p . Indichiamo inoltre con T_1 l'ora in cui avviene la prima caduta e con T_2 quella della seconda.

(a). La distribuzione del numero di cadute è la distribuzione della somma

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad n = 24$$

che è una binomiale $B(24, p)$.

(b). La distribuzione di T_1 si ottiene osservando che

$$P(T_1 > k) = P(S_k = 0) = (1 - p)^k, \quad k = 1, \dots, 24$$

$$P(T_1 = k) = P(T_1 > k - 1) - P(T_1 > k) = p(1 - p)^{k-1}$$

Quindi la distribuzione di T_1 è geometrica di parametro p . La media

$$E(T_1) = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1 - p)^{k-1} = \frac{1}{p}$$

Quindi basta scegliere $p < \frac{1}{24}$.

(c). La probabilità richiesta è $\frac{P(\{T_1=3\} \cap \{T_2-T_1=2\})}{P(\{T_2-T_1=2\})}$ e poichè T_1 e $T_2 - T_1$ sono indipendenti con stessa distribuzione geometrica, si ha

$$\frac{P(\{T_1 = 3\} \cap \{T_2 - T_1 = 2\})}{P(\{T_2 - T_1 = 2\})} = \frac{p(1 - p)^2 p(1 - p)}{p(1 - p)} = p(1 - p)^2$$

(d). La distribuzione di T_2 è quella della somma delle due geometriche T_1 e $T_2 - T_1$ e' quindi una binomiale negativa di parametri 2 e p ,

$$P(T_2 = k) = \sum_{h=1}^{k-1} P(T_1 = h)P(T_2 - T_1 = k - h) = (k - 1)p^2(1 - p)^{k-2}$$

(e). Ricordando la definizione delle X_i , si ha che

$$P(T_1 = 3/T_2 = 10) = \frac{1}{9p^2(1 - p)^8} P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1, X_4 = 0, \dots, X_{10} = 1) = \frac{1}{9}$$

31).

(a) La distribuzione congiunta è:

$V_B \backslash V_A$	0	1
-1	1/2	0
0	0	1/5
1	0	3/10

(17)

Non sono indipendenti perchè per esempio

$$P(V_A = 1, V_B = 0) = \frac{1}{5} \neq P(V_A = 1)P(V_B = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}$$

(b) indicando con $p(x, y) = P(V_A = x, V_B = y)$, $x \in \{0, 1\}$, $y \in \{-1, 0, 1\}$ otteniamo

$$P(V_A > V_B) = p(0, -1) + p(1, -1) + p(1, 0) = 1/2 + 0 + 1/5 = 7/10$$

(c). La variabile casuale Z assume valori $-1, 0, 1, 2$,

$$P(Z = -1) = p(0, -1) = \frac{1}{2}, \quad P(Z = 0) = p(0, 0) + p(1, -1) = 0,$$

$$P(Z = 1) = p(0, 1) + p(1, 0) = \frac{1}{5}, \quad P(Z = 2) = p(1, 1) = \frac{3}{10}$$

La media è data da

$$E(Z) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$$

La varianza

$$\text{var}(Z) = E(Z^2) - \frac{9}{100} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{3}{10} - \frac{9}{100} = \frac{181}{100} = 1.81$$

32).

(a) Indichiamo con X_1 ed X_2 le variabili casuali associate alla prima ed alla seconda estrazione. Esse possono assumere i valori B, N (B=bianco, N=nero). E' facile calcolare $P(X_1 = N) = 6/16 = 3/8$. Inoltre e' anche facile calcolare $P(X_2 = N/X_1 = N) = 5/15 = 1/3$. Quindi

$$P(X_1 = N, X_2 = N) = P(X_1 = N)P(X_2 = N/X_1 = N) = 1/8$$

Analogamente

$$P(X_1 = B, X_2 = N) = P(X_1 = B)P(X_2 = N/X_1 = B) = 1/4$$

L'evento una pallina e' bianca ed una e' nera corrisponde a $\{X_1 = B, X_2 = N\} \cup \{X_1 = N, X_2 = B\}$. Quindi

$$P(\{X_1 = B, X_2 = N\} \cup \{X_1 = N, X_2 = B\}) = P(X_1 = B, X_2 = N) + P(X_1 = N, X_2 = B) = \frac{1}{2}$$

La prima uguaglianza e' dovuta al fatto che gli eventi sono disgiunti, il valore $\frac{1}{2}$ si ottiene procedendo come nei casi precedenti.

(b)

$$P(X_1 = B/X_2 = B) = \frac{P(X_1 = B, X_2 = B)}{P(X_2 = B)}$$

Procedendo come nel caso (a) si calcola facilmente $P(X_1 = B, X_2 = B) = \frac{3}{8}$.
Inoltre

$$P(X_2 = B) = P(X_2 = B/X_1 = B)P(X_1 = B) + P(X_2 = B/X_1 = N)P(X_1 = N) = \frac{5}{8}$$

il risultato finale e' quindi $P(X_1 = B/X_2 = B) = \frac{3}{5} = P(X_2 = B/X_1 = B)$.
(c)

$N_B \backslash N_N$	0	1	2
0	0	0	1/8
1	0	1/2	0
2	3/8	0	0

(18)

Le variabili non sono indipendenti in quanto ad esempio $P(N_B = 1, N_N = 0) = 0 \neq P(N_B = 1)P(N_N = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$.

33). Siano X_i , $i = 1, \dots, 1000$ variabili di Bernoulli di parametro $1/2$ che valgono 1 se l'i-esimo passeggero sceglie la compagnia aerea in esame. Quindi

$$S_{1000} = \sum_{i=1}^{1000} X_i$$

è il numero totale di passeggeri che scelgono la compagnia. Nel testo dell'esercizio si richiede di calcolare x tale che $P(S_{1000} \leq x) > 0.95$. Chiaramente $P(|S_{1000} - 500| \leq x - 500) \leq P(S_{1000} \leq x)$. Dalla disuguaglianza di Chebitchev otteniamo

$$P(|S_{1000} - 500| \geq x - 500) \leq \frac{250}{(x - 500)^2}$$

Quindi x si trova imponendo che il secondo membro sia minore o uguale a $1/20$.
Ed in definitiva $x = 571$.

34) Per ogni x si ha che $0 \leq f(x)$ inoltre poichè la primitiva di f è $-x^{-\alpha+1}$ ed $\alpha > 1$

$$\int_1^\infty f(x)dx = 1$$

La funzione di ripartizione è

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1, \\ 1 - x^{-\alpha+1} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Poichè la primitiva di $xf(x)$ è $-\frac{\alpha-1}{\alpha-2}x^{-\alpha+2}$, la media non esiste per $\alpha \in (1, 2]$ (per $\alpha = 2$ la primitiva e' diversa ma il risultato lo stesso) ed è uguale a $\frac{\alpha-1}{\alpha-2}$ per $\alpha > 2$.

Poichè la primitiva di $x^2f(x)$ è $-\frac{\alpha-1}{\alpha-3}x^{-\alpha+3}$, il momento secondo (e quindi anche la varianza) non esiste per $1 < \alpha \leq 3$ per $\alpha = 3$ la primitiva e' diversa

ma il risultato lo stesso). Se $\alpha > 3$ allora

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \int_1^{\infty} x^2 f(x) dx - \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha-2)^2} = \frac{\alpha-1}{\alpha-3} - \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha-2)^2} \\ &= (\alpha-1) \frac{(\alpha-2)^2 - (\alpha-1)(\alpha-3)}{(\alpha-3)(\alpha-2)^2} \\ &= \frac{\alpha-1}{(\alpha-3)(\alpha-2)^2} \end{aligned}$$

35) Si veda il libro di testo.

36)

A) I possibili risultati delle estrazioni, considerando l'ordine, sono $10 \times 9 = 90$ ognuno equiprobabile con probabilità $\frac{1}{90}$.

i) Le possibili estrazioni che danno come somma un numero ≤ 3 sono solo due $(1, 2)$ e $(2, 1)$. Quindi

$$\mathbf{P}(\text{somma} > 3) = 1 - \mathbf{P}(\text{somma} \leq 3) = 1 - \frac{2}{90} = \frac{44}{45}$$

ii) Le possibili estrazioni che danno come somma 10 sono 8:

$(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1)$.

Quindi

$$\mathbf{P}(\text{somma} = 10) = \frac{8}{90} = \frac{4}{45}$$

iii) Chiaramente 45 possibili estrazioni hanno il numero della prima pallina maggiore di quello della seconda e 45 il viceversa, quindi la probabilità richiesta e' $\frac{1}{2}$.

iiii) Le possibili estrazioni senza il risultato cinque sono 9×8 . Quindi la probabilità richiesta e' $\frac{4}{5}$

B) I possibili risultati, considerando l'ordine, di due estrazioni con rimpiazzo sono $10 \times 10 = 100$ ognuno equiprobabile con probabilità $\frac{1}{100}$.

i) I possibili risultati che danno una somma ≤ 3 sono tre: $(1, 1), (1, 2), (2, 1)$. Quindi

$$\mathbf{P}(\text{somma} > 3) = 1 - \mathbf{P}(\text{somma} \leq 3) = 1 - \frac{3}{100} = \frac{97}{100}$$

ii) Le possibili estrazioni che danno come somma 10 sono 9:

$(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1)$.

Quindi

$$\mathbf{P}(\text{somma} = 10) = \frac{9}{100}$$

iii) Fra i 100 possibili risultati ve ne sono 45 con il numero della prima pallina maggiore di quello della seconda, 45 con il numero della seconda pallina maggiore di quello della prima e dieci con i due numeri uguali; quindi la probabilità richiesta e' $\frac{45}{100} = \frac{9}{20}$

iiii) Le possibili estrazioni senza il risultato cinque sono 9×9 . Quindi la probabilità richiesta è $\frac{81}{100}$

C)

i) Dalla linearità del valore di aspettazione

$$\mathbf{E}(S_n) = \mathbf{E}(X_1) = \frac{\sum_{i=1}^{10} i}{10} = \frac{11}{2}$$

Poiché le X_i sono indipendenti

$$\mathbf{Var}(S_n) = \frac{\mathbf{Var}(X_1)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

ii) Dalla disuguaglianza di Chebycev

$$\mathbf{P}\left(|S_n - \mathbf{E}(S_n)| \geq \frac{1}{10}\right) \leq 10\mathbf{Var}(S_n) = \frac{10 \times \sigma^2}{n}$$

Quindi si ottiene la condizione

$$\frac{10 \times \sigma^2}{n} \leq \frac{1}{100}$$

ossia $n \geq 1000\sigma^2$.

37) Si veda il libro di testo.

38)

A) Indichiamo con Y_1 ed Y_2 le variabili casuali associate alla prima ed alla seconda estrazione. $P(Y_1 > 5, Y_2 > 5) = P(Y_1 > 5)P(Y_2 > 5|Y_1 > 5)$. Entrambe sono facili da calcolare. $P(Y_1 > 5) = \frac{1}{2}$ in quanto 5 palline hanno un numero maggiore di 5 tra le 10 presenti nel sacchetto. $P(Y_2 > 5|Y_1 > 5) = \frac{4}{9}$ in quanto nel sacchetto dopo la prima estrazione vi sono 9 palline di cui 4 con un numero maggiore di 5 in quanto nella prima estrazione si è ottenuto un numero maggiore di 5. In definitiva $P(Y_1 > 5, Y_2 > 5) = \frac{2}{9}$.

Usando il teorema della probabilità totale $P(Y_2 > Y_1) = \sum_{i=1}^{10} P(Y_2 > Y_1|Y_1 = i)P(Y_1 = i) = \sum_{i=1}^{10} P(Y_2 > i|Y_1 = i)P(Y_1 = i) = \sum_{i=1}^{10} \frac{10-i}{9} \frac{1}{10}$ e quindi infine otteniamo $\frac{1}{90} \sum_{j=1}^9 j = \frac{1}{2}$. Lo stesso risultato si può ottenere notando che $P(Y_2 > Y_1) = P(Y_1 > Y_2)$ poiché per ogni y_1 ed y_2 $P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) = P(Y_1 = y_2, Y_2 = y_1)$. Inoltre $P(Y_2 > Y_1) + P(Y_1 > Y_2) = 1$ e da qui il risultato.

B) X_i sono variabili casuali i.i.d tali che $EX_i = \frac{11}{2}$ e $Var(X_i) = \frac{77}{2}$. Per Enunciato e dimostrazione della legge dei grandi numeri si rimanda al libro di testo.

39) Vedi libro di testo

40)

A) $1 - F_Y(y) = 1 - P(Y \leq y) = P(Y > y) = \prod_{i=1}^n P(X_i > y) = (1 - \frac{y}{10})^n$. Quindi

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - (1 - \frac{y}{10})^n & 0 \leq y \leq 10 \\ 1 & y > 10 \end{cases} \quad (19)$$

La densità è quindi $f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{n}{10}(1 - \frac{y}{10})^{n-1}$, per $0 < y < 10$; e 0 altrimenti (F_Y non è derivabile in 0).

B) Utilizziamo il cambio di variabili suggerito $EY = \int_0^{10} dy y \frac{n}{10}(1 - \frac{y}{10})^{n-1} = 10n \int_0^1 dx x^{n-1}(1-x) = \frac{10}{n+1}$

41) Integrando per parti si ottiene $c_1 = \frac{1}{\pi}$. Con integrazioni dirette si trovano poi $c_2 = \frac{1}{e^\pi - 1}$ e $c_3 = \frac{3}{\pi^3}$.

Da una doppia integrazione per parti si deriva facilmente $E[X_1] = \pi - \frac{4}{\pi}$. Tramite un'integrazione per parti si ottiene $E[X_2] = \frac{\pi e^\pi}{e^\pi - 1} - 1$. Da un'integrazione diretta si ricava $E[X_3] = \frac{3}{4}\pi$.

Dalla disuguaglianza di Chebysev otteniamo

$$P\left(\left|\frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} Y_i - E[Y_1]\right| > \frac{1}{10}\right) \leq \frac{10Var[Y_1]}{50}$$

Rimane da calcolare la varianza di Y_1 ; $Var[Y_1] = E[Y_1^2] - E[Y_1]^2$. Il valore $E[Y_1]$ è già stato calcolato e analogamente con un'integrazione diretta si ottiene $E[Y_1^2]$. Il risultato finale è

$$P\left(\left|\frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} Y_i - E[Y_1]\right| > \frac{1}{10}\right) \leq \frac{3\pi^2}{400}$$

42) La probabilità che entrambe siano cariche è data da $\frac{5}{25} \frac{4}{24} = \frac{1}{30}$. È semplice da calcolare la probabilità che entrambe siano scariche $\frac{20}{25} \frac{19}{24} = \frac{19}{30}$; l'evento almeno una sia carica è il complementare di questo e quindi la sua probabilità è $1 - \frac{19}{30} = \frac{11}{30}$.

Indicando con x il numero incognito di pile da aggiungere si ottiene la disuguaglianza

$$\frac{5+x}{25+x} \frac{4+x}{24+x} > \frac{1}{2}$$

che diviene $x^2 - 31x - 560 > 0$. Il polinomio ha due radici di cui una sola positiva; i valori di x che risolvono il nostro problema sono i numeri interi maggiori della radice positiva, quindi in definitiva $x \geq 44$.

La variabile casuale T ha una distribuzione geometrica di parametro $\frac{1}{5}$, quindi $P[T = k] = \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \frac{1}{5}$. La variabile casuale $N(n)$ ha una distribuzione binomiale $B(\frac{1}{5}, n)$. Quindi $E[N(n)] = \frac{n}{5}$ e $Var[N(n)] = \frac{4n}{25}$. Per la legge dei grandi numeri $N(n)$ converge in media quadratica e quindi anche in probabilità ad $\frac{1}{5}$ quando n diverge.

43) Lo spazio delle probabilità è $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_6); \omega_i = 1, \dots, 6; \omega_i = j \text{ se la faccia } i\text{-esima ha il colore } j\}$. La cardinalità di Ω è 6^6 .

a) Le possibili colorazioni che usano un solo colore sono chiaramente 6, una per ogni colore, quindi la probabilità cercata è $\frac{1}{6^5}$.

b) Le colorazioni che usano tutti e sei i colori sono 6! quindi la probabilità è $\frac{6!}{6^6}$.

c) La cardinalità dell'intersezione è $5!$ e quindi usando il risultato precedente otteniamo $\frac{1}{6}$.

d) Se fisso i due colori il numero di colorazioni possibili usando quei due colori è 2^6 ; le coppie di colori tra 6 possono essere scelte in $\binom{6}{2}$ modi diversi e quindi il risultato è $\binom{6}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^6$.

e) Scelgo una terna di facce nessuna delle quali opposte fra loro. Le colorazioni di questa terna le posso scegliere in modo arbitrario e sono 6^3 ; una volta fissati i colori di questa terna i colori delle rimanenti tre facce possono essere scelti in 5^3 modi in quanto per ognuna di loro c'è un colore proibito. Il risultato è quindi $\left(\frac{5}{6}\right)^3$.

f) Scelgo una terna di facce nessuna delle quali opposte fra loro. Le colorazioni di questa terna le posso scegliere in modo arbitrario e sono 6^3 ; una volta fissati i colori di questa terna i colori delle rimanenti tre facce sono univocamente determinati; quindi otteniamo infine $\frac{1}{6^3}$.

g) La cardinalità dell'intersezione è $\binom{6}{2} 2^5$ perché il colore della faccia inferiore è determinato da quella superiore; utilizzando il punto d) otteniamo $\frac{1}{2}$.