PROVA D'ESAME DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

19 SETTEMBRE 2005.

(Gli esercizi contrassegnati con un asterisco sono rivolti agli studenti che sostengono un esame da 6 crediti)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Si consideri un'urna contenente 5 palline numerate dall'uno al cinque. Si considerino anche altre 5 urne: l'urna i-esima contiene 1 pallina bianca e i palline rosse. Si estrae una pallina dall'urna contenente palline numerate; quando si estrae la pallina con il numero i, si procede con un'estrazione dall'urna i-esima.

A) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina rossa.

B) Calcolare la probabilità di avere estratto la pallina con il numero 3 condizionata al fatto che sia stata estratta una pallina rossa

C) Costruire uno spazio di probabilità adeguato alla descrizione dell'esperimento.

D) Si Studi il problema nel caso in cui invece di 5 palline (urne) se ne abbiano N; Calcolare:

$$\lim_{N\to\infty} P_N(R)$$

dove:

$$P_N(R) := \text{probabilità di estrarre una pallina rossa nel caso di } N \text{ urne}$$

E) Si torni al caso $N = 5$. Tutte le palline vengono poste in un'unica urna. se ne estraggono 2 senza rimpiazzo. calcolare la probablità che siano di colore diverso. Fare lo stesso calcolo nel caso di estrazioni con rimpiazzo.

F) Quante estrazioni senza rimpiazzo è necessario effettuare affinchè la probabilità di estrarre almeno una pallina rossa sia maggiore 18/19

$\boxed{\mathbf{2}}$ Siano X e Y due variabili casuali la cui distribuzione congiunta è determinata dalla seguente tabella:

$y \backslash x$	0	1
0	A	1/2
1	1/12	B

A) Determinare i valori di A, B tali che le variabili sono indipendenti.

B) Si fissino $A = 1/12$ e $B = 1/3$; calcolare $P(x \geq y)$

C) Calcolare le distribuzioni marginali di P_x e P_y. Calcolare $E(x)$, $E(y)$, $E(x + y)$, $E(xy)$, $Var(x)$.

D) Siano x_i variabili casuali i.i.d. con distribuzione P_x; sia $S_N = \sum_{i=1}^{N} x_i$. Discutere il comportamento asintotico di S_N/N quando N diverge.

E) Dare una stima di N affinchè:

$$P\left(\left|\frac{S_N}{N} - E\left(\frac{S_N}{N}\right)\right| > \frac{1}{10}\right) \leq \frac{1}{100}$$

F*) Calcolare $\Psi(z) := E(z^x)$ e $\Psi_{S_N/N} := E(z^{S_N/N})$.

G*) Sia U una variabile casuale indipendente dalle variabili casuali $\{x_i\}$ e avente distribuzione:

$$U = \begin{cases} 1 & \text{con probabilità } 1/3 \\ 2 & \text{con probabilità } 2/3 \end{cases}$$

Sia $W = \sum_{i=1}^{U} x_i$. Calcolare $E(W)$ e $\Psi_W(z) := E(z^W)$

$\boxed{\mathbf{3*}}$ Sia data una catena di Markov $x_i \in \{1, 2, 3\}$ descritta dalla matrice di transizione:

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A) Classificare gli stati

B) Si consideri la condizione iniziale $x_0 = 2$.
Calcolare $P(x_1 = 1, x_2 = 1, x_4 = 1)$

C) Determinare le misure invarianti.

SOLUZIONI DELL'ESAME DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ(Settembre 2005)

$\boxed{1}$

A) Indicando con $P(R)$ la probabilità di estrarre una pallina rossa e con $P(i)$ la probabilità di estrarre una pallina con il numero i

$$P(R) = \sum_{i=1}^{5} P(i)P(R|i) = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} \frac{i}{i+1} = \frac{71}{100}$$

B)

$$P(i=3|R) = \frac{P(R|i=3)P(i=3)}{P(R)} = \frac{3}{4}\frac{1}{5}\frac{100}{71} = \frac{15}{71}$$

C) $\Omega = \{1,2,3,4,5\}\times\{R,B\}$, la σ-algebra è data da tutti i possibili sottoinsiemi di Ω, e $P(\{i,R\}) = \frac{1}{5}\frac{i}{i+1}$, $P(\{i,B\}) = \frac{1}{5}\frac{1}{i+1}$

D)

$$P_N(R) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{i}{i+1}$$

Chiaramente $P_N(R) \le 1$, d'altra parte, poichè $\frac{k}{k+1}$ è crescente in k e tende a 1, per ogni ϵ fissato esiste K_ϵ tale che per ogni $k > k_\epsilon$, $\frac{k}{k+1} \ge 1-\epsilon$. $\sum_{i=1}^{N} \frac{i}{i+1} \ge \sum_{i=k}^{N} \frac{i}{i+1} \ge \frac{k}{k+1}\sum_{i=k}^{N} \ge (N-k)\frac{k}{k+1}$ e dunque per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N_\epsilon = k_\epsilon/\epsilon$ tale che per ogni $N > N_\epsilon$:

$$P_N(R) \ge \frac{N-k_\epsilon}{N}(1-\epsilon) = (1-\epsilon)^2$$

e quindi per $N \to \infty$ $P_N(R) \to 1$. Alternativamente: $\frac{1}{N}\sum_{i=1} N \frac{i}{i+1} = \frac{1}{N}\sum_{i=1} N \frac{i+1-1}{i+1} = 1 - \frac{1}{N}\sum_{i=1} N \frac{1}{i+1}$ d'altra parte $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i+1}\int_i^{i+1} ds \le \sum_{i=1}^{N}\int_i^{i+1} \frac{1}{s} ds \le \sum_{i=1}^{N}\int_i^{i+1} \frac{1}{s} ds = \int_1^{N+1} \frac{1}{s} ds \le \ln(N+1)$ e dunque $\lim_{N\to\infty} \frac{\ln N}{N} = 0$

E) Unendo tutte le palline colorate in un'unica urna si ottiene un'urna contenente 20 palline di cui 5 bianche e 15 rosse. Chiamando P_s la probabilità senza rimpiazzo

$$P_s(x_1 \ne x_2) = P_s(x_1 = R; x_2 = B) + P(x_1 = B; x_2 = R) = \frac{15}{20}\frac{5}{19} + \frac{5}{20}\frac{15}{19} = \frac{15}{38}$$

alternativamente si può usare la formula ipergeometrica:

$$P_s(x_1 \neq x_2) = 2\frac{\begin{pmatrix}15\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}20\\2\end{pmatrix}} = \frac{15}{38}$$

Nel caso di rimpiazzo, chiamando P_r la probabilità con rimpiazzo:

$$P_r(x_1 \neq x_2) = 2\frac{15}{20}\frac{5}{20}$$

F) consideriamo n estrazioni senza rimpiazzo, e chiamiamo $P_{s,n}$ la probabilità sulle sequenze $x_1, \ldots, x_n$ date da queste estrazioni.

$$P_{s,n}(\exists i : x_i = R) = 1 - P_{s,n}(x_i = B \forall i)$$

(chiaramente per $n > 5$, $P_{s,n}(\exists i : x_i = R) = 1$). Per ogni $n \leq 5$

$$P_{s,n}(x_i = B \forall i) = \frac{5!}{(5-n)!}\frac{(20-n)!}{20!}$$

per $n = 1$, $P_{s,n}(\exists i : x_i = R) = P_s(R) = 15/20 < 18/19$. Per $n = 2$:

$$P_{s,2}(x_i = B \forall i) = \frac{5}{20}\frac{4}{19} = \frac{1}{19}$$

e

$$P_{s,2}(\exists i : x_i = R) = 1 - P_{s,2}(x_i = B \forall i) = 1 - \frac{1}{19} = \frac{18}{19}$$

e dunque il numero di estrazioni necessarie affinchè sia maggiore di $\frac{18}{19}$ è 3, $P_{s,3} > P_{s,2} = \frac{18}{19}$.

2

A) x e y sono indipendenti se $P(x = a; y = b) = P_x(x = a)P_y(y = b)$ per ogni a, b, avendo denotato con $P(\cdot;\cdot)$ la legge congiunta di x, y e con $P_x(\cdot)$ e $P_y(\cdot)$ rispettivamente le marginali di x, y. Dunque essendo $P(0; 0) = A$ $P_x(0) = A + 1/12$, $P_y(0) = A + 1/2$ si ottiene l'equazione per A:

$$A = (A + 1/2)(A + 1/12) \quad \Rightarrow A^2 - \frac{7}{12}A + \frac{1}{24} = 0$$

analogamente ad esempio l'equazione $P(1; 1) = P_x(1) \cdot P_y(1)$ da:

$$B = (B + 1/2)(B + 1/12)$$

inoltre deve valere la condizione di normalizzazione:

$$A + B + \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = 1$$

le 3 equazioni danno due soluzioni: $\{A = \frac{1}{4}, B = \frac{1}{6}\}$ oppure $\{A = \frac{1}{6}, B = \frac{1}{4}\}$

B) Fissati $A = \frac{1}{12}, B = \frac{1}{3}$:

$$P(x \geq y) = P(1; y \in \{0, 1\}) + P(0; 0) = P_x(1) + P(0; 0) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

(oppure $P(x \geq y) = P(x = y) + P(1; 0)$).

C) $P_x(0) = \frac{1}{6}$, $P_x(1) = \frac{5}{6}$; $P_y(0) = \frac{7}{12}$, $P_y(1) = \frac{5}{12}$.

$$E(x) = 0 \cdot P_x(0) + 1 \cdot P_x(1) = P_x(1) = \frac{5}{6}$$
$$E(y) = 0 \cdot P_y(0) + 1 \cdot P_y(1) = P_y(1) = \frac{5}{12}$$
$$E(x + y) = E(x) + E(y) = \frac{15}{12}$$
$$E(xy) = 0 \cdot P(x = 0 \cup y = 0) + 1 \cdot P(x = 1; y = 1) = P(x = 1; y = 1) = \frac{1}{3}$$
$$Var(x) = E(x^2) - E(x)^2 = P_x(1) - P_x^2(1) = \frac{5}{6}\left(1 - \frac{5}{6}\right) = \frac{5}{36}$$

Attenzione: $E(xy) \neq E(x)E(y)$!!!!!

D) $\{x_i\}$ sono indipendenti identicamente distribuite (i.i.d.) con aspettazione e varianza finite. Vale dunque la legge dei grandi numeri che da informazioni sul comportamento asintotico di S_N/N, ovvero: S_N/N converge *quasi certamente* a $E(x) = \frac{5}{6}$.

In particolare questa convergenza implica la convergenza in probabilità che nel caso specifico può essere dimostrata usando la disuguaglianza di Chebyshev.

$\frac{S_N}{N}$ assume valori in $\{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, 1\}$,
$P(S_N/N = k) = P(S_N = k) = \begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} P_x^k(1) P_x^{N-k}(0)$.
$E(S_N/N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N E(x_i)$ poichè le variabili x_i sono distribuite identicamente $E(S_N/N) = E(x_i) = \frac{5}{6}$. $Var(S_N/N) = E([S_N/N - E(S_N/N)]^2) = \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^N x_i - E(x_i)\right)^2$ poichè le variabili x_i sono indipendenti $\left(\sum_{i=1}^N x_i - E(x_i)\right)^2 =$

$\sum_{i=1}^{N}(x_i - E(x_i))^2$ (verificarlo !!!), ed essendo distribuite identicamente si ha: $Var(S_N/N) = \frac{1}{N}Var(x_i) = \frac{5}{36N}$. Per ogni $\epsilon > 0$:

$$P\left(|\frac{S_N}{N} - E(\frac{S_N}{N})| > \epsilon\right) \leq \frac{Var(S_N/N)}{\epsilon^2} = \frac{5}{36\epsilon^2 N} \to 0$$

ovvero S_N/N converge *in probabilità* a $\frac{5}{6}$.

E) Si può usare la disuguaglianza di Chebyshev:

$$P\left(\left|\frac{S_N}{N} - E(\frac{S_N}{N})\right| > \frac{1}{10}\right) \leq \frac{Var(S_N/N)}{1/100} = \frac{500}{36N} \quad \Rightarrow \quad N > \frac{50000}{36}$$

F)

$$\Psi_x(z) = E(z^x) = 1P_x(0) + zP_x(1) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}z$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{SN/N}(z) = E(z^{SN/N}) &= \sum_{k=0}^{N} z^{k/N} P(S_N = k) \\
&= \sum_{k=0}^{N} z^{k/N} \begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{5}{6}\right)^k \left(\frac{1}{6}\right)^{N-k} \\
&= \sum_{k=0}^{N} \begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{5z^{1/N}}{6}\right)^k \left(\frac{1}{6}\right)^{N-k} \\
&= \left(\frac{5z^{1/N}}{6} + \frac{1}{6}\right)^N
\end{aligned}$$

G) Poichè U è indipendente da x, denotando con $P_U(p)$ la probabilità che la variabile U assuma il valore p

$$\begin{aligned}
E(W) &= P_U(1)E(x) + P_U(2)E(\sum_{i=1}^{2} x_i) \\
&= P_U(1)E(x) + 2P_U(2)E(x) \\
&= E(x)(P_U(1) + 2P_U(2)) = E(x)E(U)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(z^W) &= P_W(0)1 + P_W(1)z + P_W(2)z^2 \\
&= [P_U(1)P_x(0) + P_U(2)P_{S_2}(0)] + [P_U(1)P_x(1) + P_U(2)P_{S_2}(1)]z + [P_U(2)P_{S_2}(2)]z^2 \\
&= [\frac{1}{3}\frac{1}{6} + \frac{2}{3}(\frac{1}{6})^2] + [\frac{1}{3}\frac{5}{6} + \frac{2}{3}2\frac{5}{6}\frac{1}{6}]z + [\frac{2}{3}(\frac{5}{6})^2]z^2
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$

A) Tutti gli stati sono comunicanti fra loro e ricorrenti.

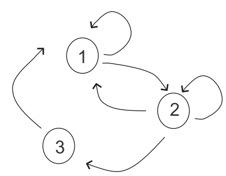

FIGURE 1

B)

$$\begin{aligned}
P_{x_0=2}(x_1=1, x_2=1, x_4=1) &= P(2\to 1)P(1\to 1)\sum_y P(1\to y)P(y\to 1) \\
&= \frac{1}{2}\frac{3}{4}\left((\frac{3}{4})^2+\frac{1}{4}\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{3}{8}\left(\frac{9}{16}+\frac{1}{8}\right)=\frac{33}{128}
\end{aligned}$$

C) Una matrice di transizione su un insieme finito di stati ha sempre almeno una misura invariante. Nel caso particolare la matrice è regolare (esiste $m>0$ tale che $P^m_{ij}>0\ \forall i,j$) e quindi la misura invariante è unica. La misura invariante $\mu(\cdot)$ è determinata dall'equazione:

$$\sum_y \mu(y)P(y\to x)=\mu(x) \qquad\qquad \forall x\in\{1,2,3\}$$

e dalla condizione di normalizzazione, dunque:

$$\begin{cases}
\mu(1)+\mu(2)+\mu(3)=1\\
\mu(1)\frac{3}{4}+\mu(2)\frac{1}{2}+\mu(3)=\mu(1)\\
\mu(1)\frac{1}{4}+\mu(2)\frac{1}{4}+\mu(3)\cdot 0=\mu(2)\\
\mu(1)0+\mu(2)\frac{1}{4}+\mu(3)\cdot 0=\mu(3)
\end{cases}$$

da cui si ottiene: $\mu(1)=\frac{12}{17}, \mu(2)=\frac{4}{17}, \mu(3)=\frac{1}{17}$