ESAME DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (Giugno 2005)

1) Due urne A e B contengono palline rosse e nere: A contiene 3 palline rosse e 2 palline nere; B contiene 3 palline rosse e 1 pallina nera.

a) Dall'urna A vengono estratte senza rimpiazzo due palline: Qual'è la probabilità che la seconda pallina estratta sia nera? Qual'è la probabilità di estrarre due palline di colore diverso ?

b) Una pallina viene estratta dall'urna A e una dall'urna B; le due estrazioni sono indipendenti. Qual'è la probabilitaà di estrarre palline di colore diverso?

c) Dall'urna B vengono fatte 4 estrazioni con rimpiazzo. Qual'è la probabilità di osservare la sequenza di colori $Rossa, Nera, Rossa, Nera$? Qualè la probabilità di estrarre esattamente 2 palline rosse ?

d) Dall'urna A viene estratta una pallina che viene inserita nell'urna B. Successivamente viene estratta una pallina dall'urna B. Calcolare la probabilità che dall'urna B sia estratta una pallina nera. Calcolare la probabilità che nell'urna B sia stata inserita una pallina rossa condizionata al fatto che dall'urna B viene estratta una pallina nera.

2) Le variabili casuali X ed Y assumono valori in $\{1, 2, 3\}$ e la loro densità congiunta $P_{X,Y}(i, j)$ e' determinata dalla seguente tabella:

$Y \setminus X$	1	2	3
1	1/5	1/10	0
2	1/10	1/5	1/10
3	0	1/10	δ

a) Per quale valore del parametro δ, $P_{X,Y}(i, j)$ e' una buona distribuzione di probabilià congiunta ?

b) Calcolare le densità marginali p_X e p_Y delle variabili casuali X ed Y. Dire se le variabili sono indipendenti.

c) Calcolare $E(X + Y)$ e $P(X = Y)$.

d) Si Considerino delle variabili aleatorie X_i i.i.d. tutte con la stessa distribuzione di X. Sia $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Calcolare il valore medio $E\left(\frac{S_n}{n}\right)$ e la varianza $Var\left(\frac{S_n}{n}\right)$. Studiare la convergenza in probabiltà di S_n/n per $n \to \infty$. Dare una stima di quanto deve valere n affinchè $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| > \frac{1}{10}\right) < \frac{1}{100}$

e*) Si calcolino le funzioni generatrici $\psi_X(z) = E(z^X)$ e $\psi_{S_n}(z) = E(z^{S_n})$.

f*) Sia Z una variabile casuale di Poisson di paramentro 1 indipendente dalle variabili casuali X_i. Si consideri la somma aleatoria $S_Z = X_1 + \cdots + X_Z$. Calcolare $E(S_Z)$ e la funzione generatrice $\psi(z) = E(z^{S_Z})$.

3*) Sia data la catena di Markov su $E = \{1, 2, 3\}$ associata alla matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 2/5 & 2/5 & 1/5 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Classificare gli stati della catena. Calcolare $P(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 1, X_4 = 3)$ per la catena che parte da 1 al tempo 0. Determinare tutte le misure invarianti.

SOLUZIONI DELL'ESAME DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (Giugno 2005)

1)

a) X_1 variabile casuale associata alla prima estrazione, X_2 variabile casuale associata alla seconda estrazione.

$$
\begin{aligned}
P(X_2 = N) &= P(X_1 = N, X_2 = N) + P(X_1 = R, X_2 = N) \\
&= P(X_2 = N/X_1 = N)P(X_1 = N) + P(X_2 = N/X_1 = R)P(X_1 = R) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X_2 \neq X_1) &= P(X_1 = R \cap X_2 = N) + P(X_1 = N \cap X_2 = R) \\
&= P(R_1)P(N_2|R_1) + P(N_1)P(R_2|N_1) \\
&= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} == \frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

alternativamente si può usare la formula ipergeometrica:

$$
P(X_2 \neq X_1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{3 \cdot 2}{10} = \frac{3}{5}
$$

b) Con notazioni analoghe alle precedenti:

$$
\begin{aligned}
P(X_A \neq X_B) &= P(X_A = R \cap X_B = N) + P(X_A = N \cap X_B = R) \\
&= P(X_A = R)P(X_B = N|X_A = R) + P(X_A = N)P(X_B = R|X_A = N) \\
&= P(X_A = N)P(X_B = R) + P(X_A = R)P(X_B = N) = \frac{3}{5}\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\frac{3}{4} = \frac{9}{20}
\end{aligned}
$$

c)

$$
P(R, N, R, N) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{256}
$$

Indicando con C_R il numero di palline rosse estratte , si ha che C_R ha distribuzione $B\,(4, /frac34)$,quindi

$$
P(C_R = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 6 \cdot \frac{9}{256}
$$

ovvero 6 volte $P(R, N, R, N)$

d)

$$\begin{aligned} P(X_B = N) &= P(X_B = N|X_A = N)P(X_A = N) + P(X_B = N|X_A = R)P(X_A = R) \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_A = R|X_B = N) &= \frac{P(X_B = N|X_A = R)P(X_A = R)}{P(X_B = N)} \\ &= \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{7}{25}} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

2)

a) Innanzitutto $\delta \in [0, 1]$. Una distribuzione di probabiltà congiunta deve essere normalizzata a 1: ovvero

$$\sum_{i,j} P_{X,Y}(i, j) = 1$$

da cui si trova $\delta = 1/5$

b)

$$P_X(k) = \sum_{j=1}^{3} P_{X,Y}(k, j)$$

$$P_Y(k) = \sum_{i=1}^{3} P_{X,Y}(i, k)$$

si ottiene: $P_X = P_Y = (\frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10})$, con ovvia notazione.

Le distribuzioni sono indipendenti solo se

$$P_{X,Y}(i, j) = P_X(i)P_Y(j) \qquad \text{PER OGNI VALORE DI} i, j$$

in questo esempio è evidente che questa uguaglianza non è verificata in quanto $P_X(i)P_Y(i) \neq 0 \ \forall i, j$ mentre $P_{X,Y}(i, j) = 0$ se $i = 3$ o $j = 3$.

Attenzione: Il fatto che le due marginali siano identiche non significa che le variabili sono uguali, ma solo che assumono gli stessi valori con uguale probabilità. Poichè abbiamo appena verificato che le variabili non sono indipendenti la probabilità $P_{X=Y}$ non deve essere calcolata usando la distribuzione prodotto ! (come hanno fatto molti pur avendo risposto correttamente alla domanda sull'indipendenza)

c)

$$P_{X,Y}(X = Y) = \sum_i P_{X,Y}(i, i) = \frac{3}{5}$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2E(X) = 2\left(1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{3}{10}\right) = \frac{3+8+9}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

d) Dalla linearitá del valore di aspettazione $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = E(X) = 2$. Utilizzando le rpopritá della varianza e l'indipendenza $Var\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{Var(X)}{n}$. Rimane da calcolare

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 3/10 + 16/10 + 27/10 - 4 = 3/5$$

$\frac{S_n}{n}$ converge in probabilitá a 2; lo si dimostra facilmente utilizzando la disuguaglianza di Chebysev ed il risultato precedente. Sempre utilizzando Chebysev

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2\right| > \frac{1}{10}\right) \leq 100\frac{3}{5n}$$

da questo si ottiene la stima $n > 6000$.
e)

$$\psi_X(z) = E(z^X) = \frac{3}{10}z + \frac{4}{10}z^2 + \frac{3}{10}z^3$$

Per l'indipendenza otteniamo

$$\psi_{S_n}(z) = (\psi_X(z))^n$$

f) Dalla formula di Wald

$$E(S_Z) = E(Z)E(X) = 2$$

Dalla teoria generale abbiamo

$$\begin{aligned} \psi_{S_Z}(z) &= \psi_Z(\psi_X(z)) = e^{\psi_X(z)-1} \\ &= e^{\frac{3}{10}z + \frac{4}{10}z^2 + \frac{3}{10}z^3 - 1} \end{aligned}$$

3)
La CM e irriducibile. Utilizzando la proprietá di Markov

$$\begin{aligned} &P(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 1, X_4 = 3) = \\ &P(X_0 = 1)P(X_1 = 2/X_0 = 1)P(X_2 = 1/X_1 = 2)P(X_4 = 3/X_2 = 1) \end{aligned}$$

Sempre utilizzando la proprietá di Markov

$$P(X_4 = 3/X_2 = 1) = \sum_{i=1}^{3} P(X_4 = 3/X_3 = i)P(X_3 = i/X_2 = 1) = \frac{33}{100}$$

Si trova quindi $P(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 1, X_4 = 3) = \frac{33}{500}$. La misura invariante é unica in quanto la catena é regolare. Questa si trova come unica soluzione normalizzata del sistema lineare

$$\begin{cases} \pi_1 &= 2/5\pi_1 + 1/2\pi_2 + 3/4\pi_3 \\ \pi_2 &= 2/5\pi_1 \\ \pi_2 &= 1/5\pi_1 + 1/2\pi_2 + 1/4\pi_3 \end{cases}$$

Il risultato é $\pi_1 = \frac{15}{29}, \pi_2 = \frac{6}{29}, \pi_3 = \frac{8}{29}$.

Consigli generali

Riportiamo qui alcuni degli errori più comuni e/o più gravi riscontrati:

- verificare sempre che il risultato sia ragionevole, errori di calcolo possono sempre capitare, ma diventano gravi se non ci si accorge che il risultato è irragionevole.

  In particolare:

  LA PROBABILITÀ DI UN EVENTO È UN NUMERO COMPRESO TRA ZERO E UNO !!!!

  e non raggiunge le cifre astronomiche che sono state calcolate in alcuni compiti.

  Inoltre al quesito 1c è ragionevole aspettarsi che il secondo evento abbia probabilità maggiore del primo. chi trova lo stesso risultato dovrebbe insospettirsi.

-
-