ESERCIZI E COMPLEMENTI DI PROCESSI STOCASTICI 2

1) Gli individui di una popolazione sono distribuiti nell'intervallo $[0,1]$ secondo un processo di Poisson di parametro λ. Siano dati due punti z_1 e z_2 dell'intervallo. Calcolare il valore medio della variabile casuale

$$D = \sum_{i=1}^{N_1} \min\left\{|T_i - z_1|, |T_i - z_2|\right\}$$

Calcolare i valori di z_1 e z_2 per e' cui tale valore di attesa e' minimo.

2) Delle particelle interagenti sono distribuite nell'intervallo $[0,1]$ secondo un processo di Poisson di parametro λ. Calcolare il valore medio dell'energia potenziale nei seguenti casi:

A) Interazioni a due corpi con energia potenziale $V(x,y) = \frac{1}{2}k\,(x-y)^2$ (oscillatori armonici, ogni coppia di particelle e' collegata tramite una molla di costante elastica k).

B) Interazioni a due corpi con energia potenziale $V(x,y) = e^{-\alpha|x-y|}$,$\alpha > 0$.

3) Gli ingressi dei clienti in un negozio sono distribuiti secondo un processo di Poisson N di parametro λ. Il cliente $i-$esimo spende nel negozio una quantitá di denaro X_i, dove le X_i sono delle variabili i.i.d. con funzione di distribuzione F ed indipendenti dal processo N. Calcolare la probabilitá che l'incasso del negozio al tempo t sia maggiore di $a > 0$. Studiare il caso particolare delle X_i con distribuzione esponenziale di paramentro ν.

4) I passegeri arrivano in una stazione di autobus secondo un processo di Poisson di parametro λ. Gli autobus contengono 50 posti e la compagnia aspetta fino a quando un autobus non sia pieno per lasciarlo partire. Indicando con $A(t)$ il processo stocastico di conteggio associato alle partenze degli autobus, calcolare $P(A(t) = n)$, $E[A(t)]$ e $\lim_{n\to+\infty} \frac{E[A(t)]}{t}$.

5) Sia data $\lambda(s)$ una funzione continua positiva definita nell'intervallo $[0,T]$. Consideriamo dei processi di Poisson non omogenei $N_t^{n\lambda}$ di parametro $n\lambda(s)$. Dimostrare che quando n diverge, per ogni $t_1 \le t_2$

$$\frac{N^{n\lambda}(t_1,t_2]}{n} \xrightarrow{P} \int_{t_1}^{t_2} \lambda(s)ds$$

6) Siano U_i variabili casuali i.i.d. uniformi nell'intervallo $[0,1]$. Definiamo la variabile casuale a valori interi

$$N = \inf\{i : X_i \le \frac{1}{3}\}$$

Dimostare che N e' uno stopping time per le variabili U_i; calcolare $E\left[\sum_{i=1}^{N} U_i\right]$.

Consideriamo una variabile casuale $\widetilde{N}$ a valori interi avente la stessa distribuzione di N ma indipendente dalle variabili casuali U_i. Calcolare la funzione generatrice dei momenti delle variabili casuali $\sum_{i=1}^{\widetilde{N}} U_i$ ed $\sum_{i=1}^{N} U_i$.

7) Sia data la famiglia ad un parametro di matrici stocastiche $(t \ge 0)$

$$\mathbb{P}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-3t} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3}e^{-3t} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Verificare che soddisfano la condizione di semigruppo di Chapman-Kolmogorov; calcolarne il generatore

$$\Omega = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbb{P}(t) - \mathbb{I}}{t}$$

Si consideri una catena di Markov a tempo continuo $X(t)$ a valori in $\{1, 2\}$ con dato iniziale $X(0) = 1$ e probabilitá di transizione date dai corrispettivi elementi delle matrici $\mathbb{P}(t)$; calcolare

$$P\left(X\left(\frac{1}{2}\right) = 1, X\left(1\right) = 2, X\left(\frac{3}{2}\right) = 1\right)$$

8) Un bastone da passeggio con un diamante incastonato nel manico e' schematizzato come il segmento $[0, 1]$ con il diamante nel punto di coordinata 1. Il bastone cade e si rompe; supponendo che le fratture sono distribuite secondo un processo di Poisson di parametro λ calcolare la distribuzione della lunghezza della parte contenente il diamante.

9) Determinare la distribuzione condizionata ad $N_t = n$ delle variabili casuali $T_1, \dots T_n$ per un processo di Poisson non omogeneo di parametro $\lambda(s)$.

10) Sia dato un processo di Poisson N_t di parametro λ e si indichino con T_i i tempi d'attesa del processo; calcolare

$$E\left[\sum_{i=1}^{N_1} \left(T_i - \frac{1}{2}\right)^2\right]$$

Calcolare inoltre la distribuzione della variabile casuale

$$M = \min\left\{\left|T_i - \frac{1}{2}\right|; i = 0, \dots N_1\right\}$$

11) Sia data la famiglia ad un parametro di matrici stocastiche ($t \geq 0$)

$$\mathbb{P}(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} + \frac{2}{5}e^{-5t} & \frac{2}{5} - \frac{2}{5}e^{-5t} \\ \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-5t} & \frac{2}{5} + \frac{3}{5}e^{-5t} \end{pmatrix}$$

Verificare che soddisfano la condizione di semigruppo di Chapman-Kolmogorov; calcolarne il generatore

$$\Omega = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbb{P}(t) - \mathbb{I}}{t}$$

Si consideri una catena di Markov a tempo continuo $X(t)$ a valori in $\{1, 2\}$ con dato iniziale $X(0) = 1$ e probabilitá di transizione date dai corrispettivi elementi delle matrici $\mathbb{P}(t)$; calcolare

$$P\left(X\left(\frac{1}{2}\right) = 1, X\Big(2\Big) = 2, X\left(\frac{7}{3}\right) = 1\right)$$

Calcolare la stessa probabilitá nel caso in cui la variabile $X(0)$ abbia distribuzione $P(X(0) = 1) = p$, $P(X(0) = 2) = 1-p$. Si calcoli in questo caso $\lim_{t \to \infty} P(X(t) = 1)$.

12) Siano X_i variabili casuali i.i.d. la cui densitá di probabilitá e'

$$f(x) = 2x\chi(0 \leq x \leq 1)$$

dove χ e' la funzione caratteristica. Si definisca la variabile casuale

$$T = \inf \left\{ i : X_i \leq \frac{1}{4} \right\}$$

Dire se la variabile casuale T e' uno stopping time per le variabili casuali X_i. Sia $Z = \sum_{i=1}^{T} X_i$, calcolare $E[Z]$ ed $E\left[e^{tZ}\right]$.

Sia $\widetilde{T} = T - 1$, dire se $\widetilde{T}$ e' uno stopping time per le variabili X_i; calcolare $E\left[\sum_{i=1}^{\widetilde{T}} X_i\right]$.

Consideriamo il processo di renewal N_t con tempi di arrivo dati dalle variabili X_i. Calcolare $E\left[\sum_{i=1}^{N_\pi+1} X_i\right]$ e $\lim_{t\to\infty} \frac{E[N_t]}{t}$. (Si lasci indicata con F_n la convoluzione di n funzioni di distribuzione F dove F e' la primitiva di f). Scrivere l'equazione di renewal che lega la funzione di renewal $m(t) = E[N_t]$ ad F.

13) Sia data una catena di Markov a tempo continuo $Y(t)$ con spazio degli stati $S = \{1, 2, 3\}$ e avente generatore

$$\Omega = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinare la misura invariante. Scrivere le equazioni di Kolmogorov avanzate e ritardate. Determinare il semigruppo $\mathbb{P}(t)$ di matrici stocastiche associato. Data la distribuzione iniziale $\underline{\mu}^0 = (\mu_1^0, \mu_2^0, \mu_3^0)$ della variabile casuale $Y(0)$ e data la funzione $f : S \to \mathbb{R}$ definita da $f(i) = i^2$; si determini la distribuzione della variabile casuale $Y(t)$ e $E^{\mu^0}\left[f(Y(t)\right]$ (dove $E^{\mu^0}[\cdot]$ indica il valore di aspettazione rispetto al processo con dato iniziale μ^0).

SOLUZIONI

1)

$$\begin{aligned} E[D] &= \sum_{n=0}^{+\infty} E[D|N_1 = n]P(N_1 = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n} \min\left\{|T_i - z_1|, |T_i - z_2|\right\} \Big| N_1 = n\right] P(N_1 = n) \end{aligned}$$

La distribuzione delle variabili T_i, $i = 1, \dots n$ condizionata all'evento $N_1 = n$ e' quella della statistica di ordine di n variabili casuali U_i i.i.d uniformi nell'intervallo $[0, 1]$. Inoltre chiaramente

$$\sum_{i=1}^{n} \min\left\{|T_i - z_1|, |T_i - z_2|\right\} = \sum_{i=1}^{n} \min\left\{|U_i - z_1|, |U_i - z_2|\right\}$$

Ne deduciamo quindi che

$$\begin{aligned} E[D] &= \sum_{n=1}^{+\infty} nP(N_1 = n)E\left[\min\left\{|U_1 - z_1|\,,|U_1 - z_2|\right\}\right] \\ &= \lambda E\left[\min\left\{|U_1 - z_1|\,,|U_1 - z_2|\right\}\right] \end{aligned} \tag{1}$$

Rimane quindi da calcolare (supponiamo $z_1 \leq z_2$)

$$\begin{aligned} & E\left[\min\left\{|U_1 - z_1|\,,|U_1 - z_2|\right\}\right] = \\ & \int_0^1 dx\, \min\left\{|x - z_1|\,,|x - z_2|\right\} \\ = & \int_0^{z_1} dx(z_1 - x) + \int_{z_1}^{\frac{z_1+z_2}{2}} dx(x - z_1) + \int_{\frac{z_1+z_2}{2}}^{z_2} dx(z_2 - x) + \int_{z_2}^{1} dx(x - z_2) \\ = & \frac{z_1^2}{2} + \frac{(1-z_2)^2}{2} + \frac{(z_1 - z_2)^2}{4} \end{aligned} \tag{2}$$

Il valore di attesa richiesto e' quindi

$$\lambda\left(\frac{z_1^2}{2} + \frac{(1-z_2)^2}{2} + \frac{(z_1 - z_2)^2}{4}\right)$$

Per trovare il minimo basta annullarne il gradiente e si ottiene $z_1 = \frac{1}{4}$,$z_2 = \frac{3}{4}$.
2) Chiamiamo $\mathcal{V}$ la variabile casuale associata all'energia potenziale.

$$\begin{aligned} E[\mathcal{V}] &= \sum_{n=0}^{+\infty} E[\mathcal{V}|N_1 = n]P(N_1 = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} E\left[\frac{1}{2}\sum_{i\neq j=1}^{n} V(T_i, T_j)\Big| N_1 = n\right] P(N_1 = n) \end{aligned}$$

La distribuzione delle variabili T_i, $i = 1, \ldots n$ condizionata all'evento $N_1 = n$ e' quella della statistica di ordine di n variabili casuali U_i i.i.d uniformi nell'intervallo $[0, 1]$. Inoltre chiaramente

$$\sum_{i\neq j=1}^{n} V(T_i, T_j) = \sum_{i\neq j=1}^{n} V(U_i, U_j)$$

Ne deduciamo quindi che

$$\begin{aligned} E[\mathcal{V}] &= E\left[V(U_1, U_2)\right] \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2} P(N_1 = n) \\ &= \frac{\lambda^2}{2} E\left[V(U_1, U_2)\right] \end{aligned} \tag{3}$$

Concludiamo il calcolo distinguendo i due diversi tipi di particelle

A)

$$E\left[V(U_1,U_2)\right] = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{1}{2} k\,(x-y)^2 = \frac{k}{12}$$

e di conseguenza

$$E[\mathcal{V}] = \frac{k\lambda^2}{24}$$

B)

$$E\left[V(U_1,U_2)\right] = \int_0^1 dx \int_0^1 dy e^{-\alpha|x-y|} = \frac{2}{\alpha^2}\left(\alpha - 1 + e^{-\alpha}\right)$$

conseguentemente

$$E[\mathcal{V}] = \frac{\lambda^2}{\alpha^2}\left(\alpha - 1 + e^{-\alpha}\right)$$

3) Introduciamo il processo stocastico $X(t)$ associato all'incasso del negozio fino al tempo t

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

Il processo $X(t)$ e' un processo di Poisson composto.

A)

$$\begin{aligned}
P(X(t) > a) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(X(t) > a | N_t = n\right) P(N_t = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > a\right) P(N_t = n) \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n (1 - F_n(a))}{n!}
\end{aligned}$$

Si e' usata l'indipendenza delle variabili X dal processo N e si e' indicata con F_n la convoluzione n volte della funzione di distribuzione F; F_n e' la funzione di distribuzione della somma di n variabili i.i.d. con distribuzione F. Nel caso di variabili esponenziali F_n e' la funzione di distribuzione di una variabile casuale gamma di parametri n e ν.Quindi

$$P(X(t) > a) = e^{-(\lambda t + \nu a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{(\lambda t)^n (\nu a)^j}{n! j!}$$

4) Il processo A e' un processo di renewal con distribuzione dei tempi di arrivo data da una legge Gamma di parametri λ e 50 la cui funzione di distribuzione e' $G(t) = F_{50}(t)$, dove $F(t)$ e' la funzione di distribuzione di una variabile esponenziale di parametro λ. In base alla teoria dei processi di renewal

$$P(A(t)=n) = G_n(t) - G_{(n+1)}(t) = F_{50n}(t) - F_{50(n+1)}(t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=50n}^{50(n+1)-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

Ancora utilizzando la teoria dei processi di renewal otteniamo

$$\begin{aligned} E[A(t)] &= \sum_{n=1}^{+\infty} G_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_{50n}(t) \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=50n}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \left[\frac{j}{50}\right] \end{aligned}$$

Dove $[\cdot]$ rappresenta la parte intera. Infine poiche valgono le seguenti disuguaglianze

$$\frac{j}{50} - 1 \leq \left[\frac{j}{50}\right] \leq \frac{j}{50}$$

otteniamo che

$$e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \left(\frac{j}{50} - 1\right) \leq E[A(t)] \leq e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \frac{j}{50}$$

e quindi

$$\frac{\lambda}{50} - \frac{1}{t} \leq \frac{E[A(t)]}{t} \leq \frac{\lambda}{50}$$

Da queste disuguaglianze si deduce che $\lim_{t\to+\infty} \frac{E[A(t)]}{t} = \frac{\lambda}{50}$, in accordo con il teorema di renewal.

5) Notiamo innanzi tutto che

$$E\left[\frac{N^{n\lambda}(t_1,t_2]}{n}\right] = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(s) ds$$

Applichiamo quindi la disuguaglianza di Chebysev

$$P\left(\left|\frac{N^{n\lambda}(t_1,t_2]}{n} - \int_{t_1}^{t_2} \lambda(s)ds\right| > \delta\right) \leq \frac{Var\left(\frac{N^{n\lambda}(t_1,t_2]}{n}\right)}{\delta^2} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \lambda(s)ds}{n\delta^2}$$

dalla quale otteniamo direttamente il risultato.

6) La variabile casuale N e' uno stopping time per le variabili U_i se gli eventi $\{N = n\}$ sono indipendenti dalle variabili casuali U_j, $j = n+1, \ldots$. Poiché l'evento $\{N = n\}$ puó essere scritto in termini delle variabili U_i come $\bigcap_{i=1}^{n-1}\{U_i >$

$\frac{1}{3}\}\bigcap\{U_n \leq \frac{1}{3}\}$ e le variabili U_i sono indipendenti la condizione e' chiaramente verificata. E' quindi possibile applicare il teorema di Wald che dice

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} U_i\right] = E[N]E[U_1] = \frac{1}{2}E[N]$$

Rimane da calcolare $E[N]$. E' facile determinare la distribuzione di N

$$P(N=n) = P(U_i > \frac{1}{3}, i = 1, \cdots n-1, U_n \leq \frac{1}{3}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\frac{1}{3}$$

una geometrica di paramentro $\frac{1}{3}$. Il risultato finale e' quindi

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} U_i\right] = \frac{3}{2}$$

Chiamiamo $A = \sum_{i=1}^{N} U_i$ e $B = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} U_i$.

$$\begin{aligned}
E\left[e^{tA}\right] &= \sum_{n=1}^{+\infty} E\left[e^{tA}\middle| N=n\right] P(N=n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} E\left[e^{t(U_1+\cdots+U_n}\middle| \bigcap_{i=1}^{n-1}\{U_i > \frac{1}{3}\}\bigcap\{U_n \leq \frac{1}{3}\}\right] P(N=n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (\phi^u(t))^{n-1}\phi_d(t)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\frac{1}{3} \\
&= \frac{\phi_d(t)}{3-2\phi^u(t)}
\end{aligned}$$

dove

$$\phi^u(t) = \frac{3}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{1} e^{tx}dx = \frac{3}{2t}\left(e^t - e^{\frac{t}{3}}\right)$$

e

$$\phi_d(t) = 3\int_0^{\frac{1}{3}} e^{tx}dx = \frac{3}{t}\left(e^{\frac{t}{3}} - 1\right)$$

$$\begin{aligned}
E\left[e^{tB}\right] &= \sum_{n=1}^{+\infty} E\left[e^{tB}\middle| \tilde{N}=n\right] P(\tilde{N}=n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} E\left[e^{t(U_1+\cdots+U_n}\right] P(\tilde{N}=n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (\phi(t))^n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\frac{1}{3} \\
&= \frac{\phi(t)}{3-2\phi(t)}
\end{aligned}$$

dove

$$\phi(t) = \int_0^1 e^{tx} dx = \frac{1}{t}\left(e^t - 1\right)$$

7) La condizione di Chapman-Kolmogorov che assicura la consistenza delle famiglie finito dimensionale dice che

$$\mathbb{P}(t)\mathbb{P}(s) = \mathbb{P}(t+s) \qquad s,t \geq 0$$

e' facile verificarle, ad esempio per la componente $(1,1)$ si ottiene

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}e^{-3t}\right)\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}e^{-3s}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3t}\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}e^{-3s}\right)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}e^{-3(t+s)}$$

Facendo il limite componente per componente si ottiene

$$\Omega = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

e' facile anche verificare che $\mathbb{P}(t) = e^{\Omega t}$. Infine la probabilitá cercata e'

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}}\right)=\frac{4}{27}-\frac{2}{9}e^{-\frac{3}{2}}+\frac{2}{27}e^{-\frac{9}{2}}$$

8) Indichiamo con R la variabile casuale associata alla lunghezza del segmento contenente l'estremo 1. Dato $x \geq 0$

$$\begin{aligned}
P(R > x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(R > x | N_1 = n) P(N_1 = n) \\
&= \left(e^{-\lambda} + \sum_{n=1}^{+\infty} P(U_i \leq 1 - x, i = 1, \cdots n) e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\right)\chi(x < 1) \\
&= \chi(x<1)\sum_{n=0}^{+\infty}(1-x)^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{\lambda x}\chi(x<1)
\end{aligned}$$

Quindi la funzione di distribuzione e'

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Si noti che sia una componente assolutamente continua sia una componente discreta con massa $e^{-\lambda}$ concentrata in 1. Un utile esercizio di integrazione e' ricavare lo stesso risultato utilizzando la funzione di distribuzione congiunta della statistica di ordine di n uniformi.

Quando $n = 0$ la variabile casuale R assume il valore 1 con probabilitá 1, da qui deriva il contributo non assolutamente continuo nella distribuzione di R;

quando $n > 0$ le variabili $T_1, \ldots, T_n$ sono la statistica di ordine di n uniformi e quindi hanno una densitá

$$f_{T_1,\ldots T_n}(x_1, \ldots x_n) = n!\chi(0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1)$$

La densita' della variabile T_n si ottiene integrando rispetto alle altre variabili

$$\begin{aligned} f_{T_n}(x_n) &= \int_0^1 dx_1 \ldots \int_0^1 dx_{n-1} f_{T_1,\ldots T_n}(x_1, \ldots x_n) \\ &= n! \int_0^{x_n} dx_{n-1} \ldots \int_0^{x_2} dx_1 \\ &= n x_n^{n-1} \end{aligned}$$

Il risultato precedente si ottiene notando che sul sottinsieme $N_1 = n$ si ha $R = 1 - T_n$.

9) Scegliamo $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq t$ ed h sufficientemente piccolo. La densitá delle variabili $T_1, \ldots, T_n$ si ottiene da

$$\begin{aligned} & \lim_{h\to 0} \frac{P\left(T_1 \in (t_1, t_1+h], \ldots, T_1 \in (t_1, t_1+h] | N_t = n\right)}{h^n P(N_t = n}) \\ = & \lim_{h\to 0} n! e^{\int_0^t \lambda(s)ds} \frac{P\left(N(0,t_1] = 0, N(t_1, t_1+h] = 1, \ldots, N(t_n, t_n+h] = 1, N(t_n+h, t] = 0\right)}{h^n \left(\int_0^t \lambda(s)ds\right)^n} \\ = & n!\chi(0 \leq t_1, \ldots, \leq t_n \leq t) \prod_{i=1}^n \frac{\lambda(t_i)}{\int_0^t \lambda(s)ds} \end{aligned}$$

Quindi le variabili casuali $T_1, \ldots T_n$ sono la statistica di ordine di n variabili casuali indipendenti identicamente distribuite con distribuzione la cui densitá e'

$$f(s) = \frac{\lambda(s)\chi(0 \leq s \leq t)}{\int_0^t \lambda(s)ds}$$

10) Chiamiamo $D = \sum_{i=1}^{N_1} \left(T_i - \frac{1}{2}\right)^2$.

$$\begin{aligned} E[D] &= \sum_{n=0}^{+\infty} E[D|N_1 = n] P(N_1 = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} E\left[\sum_{j=1}^n \left(T_j - \frac{1}{2}\right)^2 |N_1 = n\right] P(N_1 = n) \end{aligned}$$

La distribuzione delle variabili T_j, $j = 1, \ldots n$ condizionata all'evento $N_1 = n$ e' quella della statistica di ordine di n variabili casuali U_j i.i.d uniformi nell'intervallo $[0, 1]$. Inoltre chiaramente

$$\sum_{i=1}^n \left(T_i - \frac{1}{2}\right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(U_i - \frac{1}{2}\right)^2$$

Ne deduciamo quindi che

$$\begin{aligned} E[D] &= \sum_{n=1}^{+\infty} nP(N_1 = n)E\left[\left(U_1 - \frac{1}{2}\right)^2\right] \\ &= \lambda E\left[\left(U_1 - \frac{1}{2}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{4}$$

Rimane quindi da calcolare

$$\begin{aligned} E\left[\left(U_1 - \frac{1}{2}\right)^2\right] &= \\ \int_0^1 dx \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 & \\ = \frac{1}{12} & \end{aligned} \tag{5}$$

Il valore di attesa richiesto e' quindi

$$\lambda \frac{1}{12}$$

$$\begin{aligned} P(M > x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N_1 = n)P(M > x|N_1 = n) \\ & \chi(0 \leq x < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} (1 - 2x)^n + \chi(x < 0) \end{aligned}$$

Quindi la funzione di distribuzione F_M della variabile casuale M e'

$$F_M(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-2x} & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

11) La condizione di Chapman-Kolmogorov che assicura la consistenza delle famiglie finito dimensionale dice che

$$\mathbb{P}(t)\mathbb{P}(s) = \mathbb{P}(t + s) \qquad s, t \geq 0$$

e' facile verificarle, ad esempio per la componente $(1, 1)$ si ottiene

$$\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5}e^{-5t}\right)\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5}e^{-5s}\right) + \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{5}e^{-5t}\right)\left(\frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-5s}\right) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}e^{-5(t+s)}$$

Facendo il limite componente per componente si ottiene

$$\Omega = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

e' facile anche verificare che $\mathbb{P}(t) = e^{\Omega t}$. La probabilitá cercata nel caso $X(0) = 1$ e'

$$\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5}e^{-\frac{5}{2}}\right)\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{5}e^{-\frac{15}{2}}\right)\left(\frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-\frac{5}{3}}\right)$$

Nel caso di distribuzione iniziale $(p, 1-p)$ otteniamo

$$p\mathbb{P}_{1,1}\left(\frac{1}{2}\right)\mathbb{P}_{1,2}\left(\frac{3}{2}\right)\mathbb{P}_{2,1}\left(\frac{1}{3}\right) + (1-p)\mathbb{P}_{2,1}\left(\frac{1}{2}\right)\mathbb{P}_{1,2}\left(\frac{3}{2}\right)\mathbb{P}_{2,1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

Poiché vale

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{P}(t) = \widetilde{\mathbb{P}} \tag{6}$$

dove

$$\widetilde{\mathbb{P}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

allora $\lim_{t\to\infty} P(X(t) = 1)$ e' uguale alla prima componente del vettore

$$\lim_{t\to\infty}(p, 1-p)\cdot\mathbb{P}(t) = (p, 1-p)\cdot\widetilde{\mathbb{P}} = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5}) \tag{7}$$

12) La variabile casuale T e' uno stopping time per le variabili X_i se l'evento $\{T = n\}$ e' indipendente dalle variabili casuali $X_j,\ j = n+1, \ldots$. Poiché l'evento $\{T = n\}$ puó essere scritto in termini delle variabili X_i come $\bigcap_{i=1}^{n-1}\{X_i > \frac{1}{4}\}\bigcap\{X_n \leq \frac{1}{4}\}$ e le variabili X_i sono indipendenti la condizione e' chiaramente verificata. E' quindi possibile applicare il teorema di Wald che dice

$$E\left[\sum_{i=1}^{T} X_i\right] = E[T]E[X_1]$$

Facilmente si ottiene

$$E[X_1] = \int_0^1 dx 2x^2 = \frac{2}{3}$$

Rimane da calcolare $E[T]$. E' facile determinare la distribuzione di T

$$P(T = n) = P(X_i > \frac{1}{4}, i = 1, \ldots n-1, X_n \leq \frac{1}{4}) = \left(\frac{15}{16}\right)^{n-1}\frac{1}{16}$$

una geometrica di paramentro $\frac{1}{16}$. Il risultato finale e' quindi

$$E\left[\sum_{i=1}^{T} X_i\right] = \frac{32}{3}$$

Chiamiamo $A = \sum_{i=1}^{T} X_i$.

$$\begin{aligned}
E\left[e^{tA}\right] &= \sum_{n=1}^{+\infty} E\left[e^{tA}\Big| T=n\right] P(T=n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} E\left[e^{t(X_1+\cdots+X_n}\Big| \bigcap_{i=1}^{n-1}\{X_i > \frac{1}{4}\}\bigcap\{X_n \leq \frac{1}{4}\}\right] P(T=n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (\phi^u(t))^{n-1}\phi_d(t)\left(\frac{15}{16}\right)^{n-1}\frac{1}{16} \\
&= \frac{\phi_d(t)}{16-15\phi^u(t)}
\end{aligned}$$

dove

$$\phi^u(t) = \frac{16}{15}\int_{\frac{1}{4}}^{1} e^{tx}2xdx = \frac{16}{15}\left(\frac{1}{t}\left(2e^t - \frac{e^{\frac{t}{4}}}{2}\right) + \frac{2}{t^2}\left(e^{\frac{t}{4}} - e^t\right)\right)$$

e

$$\phi_d(t) = 16\int_0^{\frac{1}{4}} e^{tx}2xdx = 16\left(\left(e^{\frac{t}{4}}\left(\frac{1}{2t} - \frac{2}{t^2}\right) + \frac{2}{t^2}\right)\right)$$

L'evento $\left\{\widetilde{T} = n\right\}$ coincide con l'evento $\{T = n+1\}$ che non e' indipendente dalle variabili $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$ quindi $\widetilde{T}$ non e' uno stopping time e si puo verificare che l'equazione di Wald e' violata. Notiamo che $\widetilde{T}$ puó assumere i valori $0, 1 \ldots$. Quando $\widetilde{T} = 0$ intendiamo che $\sum_{i=1}^{\widetilde{T}} X_i$ e' zero.

$$\begin{aligned}
E\left[\sum_{i=1}^{\widetilde{T}} X_i\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{\widetilde{T}} X_i \Big| \widetilde{T} = n\right] P(\widetilde{T} = n) \\
&= E\left[X_1 \Big| X_1 > \frac{1}{4}\right]\left(\sum_{n=0}^{\infty} nP(\widetilde{T} = n)\right) \\
&= E\left[X_1 \Big| X_1 > \frac{1}{4}\right] E\left[\widetilde{T}\right] \\
&\neq E\left[X_1\right] E\left[\widetilde{T}\right]
\end{aligned}$$

Inoltre $E\left[\widetilde{T}\right] = E[T-1] = 15$, e

$$E\left[X_1 \Big| X_1 > \frac{1}{4}\right] = \frac{16}{15}\int_{\frac{1}{4}}^{1} 2x^2dx = \frac{7}{10}$$

Quindi

$$E\left[\sum_{i=1}^{\widetilde{T}} X_i\right] = \frac{21}{2}$$

La variabile $N_\pi + 1$ e' uno stopping times per le variabili X_i quindi dalla formula di Wald

$$E\left[\sum_{i=1}^{N_\pi+1} X_i\right] = E[X_1]E\left[N_\pi + 1\right] = \frac{2}{3}(m(\pi)+1)$$

dove $m(t)$ e' la funzione di renewal

$$m(t) = E\left[N_t\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(t)$$

In base al teorema di renewal

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{E[X_1]} = \frac{3}{2}$$

L'equazione di renewal e'

$$m(t) = t^2\chi(0 \le t \le 1) + 1\chi(t > 1) + \int_0^{\min\{t,1\}} m(t-x)2xdx$$

13) Le equazioni lineari che determinano la misura invariante si scrivono in forma matriciale come $\underline{\mu} \cdot \Omega = \underline{0}$ dove $\underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ e' il vettore riga della misura invariante incognita e $\underline{0}$ e' il vettore riga identicamente nullo. Questo e' il sistema lineare 3×3

$$\begin{cases} \mu_1 &= \mu_3 \\ 2\mu_2 &= \mu_1 \\ \mu_3 &= 2\mu_2 \end{cases}$$

la cui unica soluzione che e' una misura di probabilitá e' $\underline{\mu} = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5})$. Le equazioni di Kolmogorov avanzate e ritardate sono due sistemi di equazioni differenziali lineari per le componenti delle matrici $\mathbb{P}(t)$ che possono essere scritti facilemnte in forma compatta utillizzando il formalismo matriciale: $\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\Omega$; $\mathbb{P}'(t) = \Omega\mathbb{P}(t)$. Per determinare il semigruppo $\mathbb{P}(t)$ bisogna risolvere queste equazioni. Dalla teoria delle equazioni differenziali lineari sappiamo che la soluzione con dato iniziale $\mathbb{P}(0) = \mathbb{I}$ e' data da $\mathbb{P}(t) = e^{\Omega t}$. La matrice Ω ha autovalori $0, -2+i, -2-i$ i cui corrispondenti autovettori sono rispettivamente $(1,1,1)$, $(1, -1+i, \frac{-1-i}{2})$, $(1, -1-i, \frac{-1+i}{2})$. Quindi

$$e^{\Omega t} = Te^{Dt}T^{-1}$$

dove D e' la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2+i & 0 \\ 0 & 0 & -2-i \end{pmatrix}$$

e T e' una matrice le cui colonne sono gli autovettori sopra scritti

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1+i & -1-i \\ 1 & \frac{-1-i}{2} & \frac{-1+i}{2} \end{pmatrix}$$

dopo lunghi e laboriosi calcoli (che non saranno richiesti in sede di esame!) si arriva alla seguente espressione

$$\mathbb{P}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + e^{-2t}(\frac{3}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t) & \frac{1}{5} + e^{-2t}(-\frac{1}{5}\cos t + \frac{3}{5}\sin t) & \frac{2}{5} + e^{-2t}(-\frac{2}{5}\cos t - \frac{4}{5}\sin t) \\ \frac{2}{5} + e^{-2t}(-\frac{2}{5}\cos t - \frac{4}{5}\sin t) & \frac{1}{5} + e^{-2t}(\frac{4}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t) & \frac{2}{5} + e^{-2t}(-\frac{2}{5}\cos t + \frac{6}{5}\sin t) \\ \frac{2}{5} + e^{-2t}(-\frac{2}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t) & \frac{1}{5} + e^{-2t}(-\frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t) & \frac{2}{5} + e^{-2t}(-\frac{3}{5}\cos t - \frac{1}{5}\sin t) \end{pmatrix}$$

In termini matriciali la distribuzione della variabile casuale $Y(t)$ si otterra dal prodotto righe per colonne $\underline{\mu}^0\mathbb{P}(t)$. Introduciamo il vettore colonna $\underline{f}$ le cui componenti sono

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

allora ($\cdot$ e' il prodotto righe per colonne)

$$E^{\mu^0}[f(Y(t)] = \underline{\mu}^0 \cdot \mathbb{P}(t) \cdot \underline{f}$$

(N.B. l'esercizio e' stato scritto in pochissimo tempo, potrebbe contenere errori)