PROVA DI PROBABILITÁ E STATISTICA(Novembre 2005)

1) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cosi definita:

$$f(x,y) = \begin{cases} ax^2 + bxy + ay^2 & se\ x \in [0,1], y \in [0,1] \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Con a e b sono state indicate delle costanti positive. Determinare i possibili valori delle costanti affinchè f sia una buona densità di probabilità. Si scelgano i valori $a = 1$, $b = \frac{4}{3}$ e si considerino due variabili aleatorie X ed Y assolutamente continue aventi densità congiunta f con questi valori delle costanti. Determinare le densità marginali delle variabili X ed Y, dire se sono indipendenti. Calcolare $P\left(X < Y^2\right)$. Determinare la distribuzione della variabile casuale $Z = XY$. Si considerino $X_1, \ldots, X_n$ variabili casuali i.i.d. tutte aventi la stessa distribuzione di X. Sia $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Dare una stima di n affinchè

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(X)\right| > \frac{1}{10}\right) < \frac{1}{100}$$