ESAME DI PROBABILITÁ E STATISTICA(Gennaio 2006)

1) Dieci amici, 4 uomini e 6 donne, organizzano una gara podistica fra loro. Supponendo che tutti i possibili ordini di arrivo siano equiprobabili, dire se gli eventi $\{Marco\ e'\ arrivato\ primo\}$ e $\{Francesca\ e'\ arrivata\ seconda\}$ sono indipendenti; calcolare la probabilità che Marco arrivi ottavo sapendo che e' arrivato dopo Francesca. Dopo la gara gli amici vanno a cena ed hanno a disposizione due tavoli da 5 posti ciascuno: il tavolo 1 ed il tavolo 2. Dire in quanti modi possibili possono ripartirsi nei tavoli. Dire in quanti modi possibili possono ripartirsi nei tavoli se in ogni tavolo devono esserci 3 donne e 2 uomini. Dire in quanti modi possibili possono ripartirsi nei tavoli se Marco e Francesca non vogliono sedere allo stesso tavolo.

2) A: Siano date due variabili casuali X ed Y assolutamente continue aventi densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} c|x|\log(y+1) & se \quad x^2 \leq y \leq x+2 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

con c un'opportuna costante di normalizzazione. Determinare (in funzione di c) le densità marginali delle variabili casuali X ed Y, dire se sono indipendenti.

B: Siano U_i variabili casuali i.i.d. uniformi nell'intervallo $[0,1]$. Determinare la distribuzione delle variabili casuali $U_1 + U_2$ e $-\log U_1$. Sia $S_n = U_1 + \cdots + U_n$. Discutere il comportamento asintotico di $\frac{S_n}{n}$. Dare una stima di n affinchè

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(U_1)\right| > \frac{1}{10}\right) < \frac{1}{500}$$

3) Sia $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un campione di variabili aleatorie esponenziali di parametro λ.

(1) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\lambda}$ di λ.
(2) Determinare le proprieta' asintotiche di $\hat{\lambda}$.
(3) Determinare il lower bound di Cramer-Rao dello stimatore.