1) Per la prima domanda poiche l'equazione il dominio e le condizioni al bordo sono invarianti per rotazione si cerca la soluzione invariante per rotazioni $v(x) = f(|x|)$. Otteniamo una equazione differenziale ordinaria per f, indichiamo con $r = |x|$

$$f'' + f'\frac{2}{r} = f$$

Introduciamo la nuova funzione $g(r) = rf(r)$ che soddisfa l'equazione

$$g'' = g$$

L'integrale generale e'

$$c_1e^r + c_2e^{-r}$$

Quindi l'integrale generale per la f e'

$$\frac{1}{r}(c_1e^r + c_2e^{-r})$$

Poiche $f(1) = 1$ e f converge a zero all'infinito otteniamo otteniamo $c_1 = 0$ e $c_2 = e$ in definitiva la soluzione e'

$$v(x) = \frac{1}{|x|}e^{1-|x|}.$$

Per il secondo punto non e' necessario trovare esplicitamente la u Per determinare $u(0)$ si usa la proprieta di media che dice

$$u(0) = \int_{\partial B(R)} (3y_1^3 - y_1)dS(y)$$

Poiche il dominio di integrazione e' simmetrico per riflessioni $y_1 \to -y_1$ mentre l'integrando e' antisimmetrico, otteniamo che $u(0) = 0$.

Per il principio del massimo otteniamo

$$\max_{x:|x|\leq R} u(x) = \max_{x:|x|=R} 3x_1^3 - x_1 = \max_{x_1\in[-R,R]} 3x_1^3 - x_1$$

La funzione $3x^3 - x$ ha ha derivata $9x^2 - 1$ che si annulla per $x = \pm\frac{1}{3}$ inoltre quando $x \to +\infty$ va a $+\infty$ e quando $x \to -\infty$ va a meno infinito. Quindi abbiamo un minimo locale per $x = \frac{1}{3}$ ed un massimo locale per $x = -\frac{1}{3}$ ed i corrispondenti valori sono rispettivamente $-\frac{2}{9}$ e $\frac{2}{9}$. Otteniamo quindi

$$\max_{x:|x|\leq R} u(x) = \begin{cases} -3R^3 + R & 0 \leq R \leq \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \leq R \leq R^* \\ 3R^3 - R & R \geq R^* \end{cases}$$

dove R^* e' l'unica soluzione dell'equazione

$$3x^3 - x = \frac{2}{9}$$

2) Si osservi che

$$\cos(3\pi x)\sin(2\pi x) + \sin(3\pi x)\cos(2\pi x) = \sin(5\pi x).$$

Poiche nel termine forzante e nelle condizioni iniziali sono presenti solo 3 armoniche $\sin(\pi x)$, $\sin(3\pi x)$ e $\sin(5\pi x)$ possiamo cercare la soluzione del tipo

$$u(x,t) = a_1(t)\sin(\pi x) + a_2(t)\sin(3\pi x) + a_5(t)\sin(5\pi x) \tag{1}$$

le condizioni al bordo sono automaticamente soddisfatte. Otteniamo

$$\begin{aligned}&(a_1'(t)+\pi^2 a_1(t))\sin(\pi x)\\&+(a_3'(t)+(3\pi)^2 a_3(t)-t)\sin(3\pi x)\\&+(a_5'(t)+(5\pi)^2 a_5(t))\sin(5\pi x)=0\end{aligned}$$

Otteniamo il sistema di equazioni differenziali disaccoppiate

$$\begin{cases} a_1'(t)+\pi^2 a_1(t)=0\\ a_3'(t)+(3\pi)^2 a_3(t)-t=0\\ a_5'(t)+(5\pi)^2 a_5(t)=0\end{cases}$$

inoltre abbiamo le condizioni iniziali $a_1(0)=2$, $a_3(0)=0$, $a_5(0)=1$. La soluzione e' data da

$$\begin{cases} a_1(t)=2e^{-\pi^2 t}\\ a_3(t)=\frac{1}{(3\pi)^4}(e^{-(3\pi)^2 t}-1+(3\pi)^2 t)\\ a_5(t)=e^{-(5\pi)^2 t}\end{cases} \tag{2}$$

La soluzione e' quindi (1) dove le funzioni a_i sono quelle scritte in (2)

3) Sappiamo che se i dati iniziali sono simmetrici per riflessioni intorno all'origine allora anche la soluzione lo sara e quindi la condizione $u_x(0,t)=0$ sara automaticamente soddisfatta. Poiche $\cos x$ e' gia simmetrica la nostra soluzione si otterra dal restringimento al primo quadrante della soluzione con $x\in\mathbb{R}$ dell'equazione delle onde avente

$$u_t(x,0)=\begin{cases} xe^x & x\geq 0\\ -xe^{-x} & x<0\end{cases}$$

Per scrivere la soluzione in un generico punto (x,t) del primo quadrante possiamo ora usare la formula di D'Alambert ma dobbiamo distinguere i due casi $x\geq t$ e $x<t$. Nel primo caso abbiamo

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2}(\cos(x-t)+\cos(x+t))+\frac{1}{2}(\int_{x-t}^{x+t} ye^y dy)\\&=\frac{1}{2}(\cos(x-t)+\cos(x+t))+\frac{e^x}{2}(e^t(x+t-1)+e^{-t}(t-x+1))\end{aligned}$$

Nel secondo caso abbiamo

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2}(\cos(x-t)+\cos(x+t))+\frac{1}{2}(-\int_{x-t}^{0} ye^{-y} dy+\int_0^{x+t} ye^y dy)\\&=\frac{1}{2}(\cos(x-t)+\cos(x+t))+1+\frac{e^t}{2}((t-x-1)e^{-x}+(t+x-1)e^x)\end{aligned}$$

4) L'equazione e' del tipo $F(\nabla u,u,x)=0$ dove

$$F(p,z,x)=(x_1+z)p_1+(x_2+z)p_2-z$$

Le equazioni caratteristiche sono

$$\begin{cases} x_1'(s)=x_1(s)+z(s)\\ x_2'(s)=x_2(s)+1\\ z'(s)=z(s)\end{cases}$$

Poiche abbiamo $F_{p_2}=x_2+1$ che vale identicamente 1 sullasse delle x_1 otteniamo che per ogni punto $(x_1,0)$ e' possibile trovare una soluzione locale utilizzando il metodo delle caratteristiche. Poiche le quazioni non dipendono da p non e' necessario scrivere le altre equazioni. Le soluzioni con dato iniziale $(x_1^0, 0, x_1^0)$ sono

$$\begin{cases} x_1(s) = x_1^0(1+s)e^s \\ x_2(s) = e^s - 1 \\ z(s) = x_1^0 e^s \end{cases}$$

Dato (x_1, x_2) dobbiamo trovare (x_1^0, s^*) tale che

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0(1+s^*)e^{s^*} \\ x_2 = e^{s^*} - 1 \end{cases}$$

Otteniamo

$$s^* = \log(x_2+1)$$

e

$$x_1^0 = \frac{x_1}{(x_2+1)(1+\log(x_2+1))}$$

Quindi

$$u(x_1, x_2) = z(s^*) = \frac{x_1}{(1+\log(x_2+1))}$$