APPUNTI PER L'ORIENTAMENTO

1 Teoria dei grafi

Dare una breve definizione (piu o meno formale) di grafo come oggetto matematico; dare esempi di grafi che si incontrano naturalmente nel mondo moderno (e non): la struttura della rete, il grafo delle collaborazioni scientifiche, il grafo delle collaborazioni cinematografiche (hollywood graph), alberi genealogici.....

Dare esempio di un teorema con un risultato sorprendente e dall'enunciato formulato in termini non astratti: il teorema dell'amicizia (si veda ad esempio [1]). Dato un gruppo di persone ,supponendo la relazione di amicizia simmetrica, e' possibile costruire un grafo che sintetizza le relazioni di amicizia fra le persone del gruppo associando un vertice ad ogni persona del gruppo e considerando un lato tra due vertici se le corrispondenti persone sono amiche.

Theorem 1.1 [Il teorema dell'amicizia] *Sia dato un gruppo costituito da almeno tre persone e tale che prese comunque due persone loro hanno esattamente un amico in comune. Allora nel gruppo ci sarà una persona (Il politico) che e' amica di tutti.*

2 Il gioco di Robin Hood

Questo esempio cerca di far riflettere lo studente sul fatto che ogni volta che si incontra l'infinito in matematica bisogna essere pronti ad incontrare fenomeni controintuitivi o paradossi e che in generale bisogna stare attenti a come si procede. Il gioco funziona come segue (si veda [2]).

Un ricco signore ha una stanza nella quale colleziona le sue monete preziose; in questa stanza vi sono infinite teche numerate con i numeri naturali. Quando manca un minuto a mezzanotte il signore entra nella stanza e mette una moneta nelle teche numerate dall'1 al 10 (dieci monete in tutto). Subito dopo entra Robin Hood e ruba la moneta nella teca numero 1. Quando manca $\frac{1}{2}$ di minuto a mezzanotte il ricco signore entra nella stanza e una moneta nelle teche numerate dall'11 al 20 (sempre dieci monete in totale una per ogni teca). Subito dopo entra Robin Hood e ruba la moneta numero 11 e cosi via: quando manca $\frac{1}{n}$ di minuto a mezzanotte il ricco signore entra nella stanza e mette dieci monete nelle teche numerate dal $(n-1)10+1$ fino al $n10$, subito dopo entra Robin Hood e ruba la moneta nella teca numero $(n-1)10+1$. A mezzanotte il ricco signore entra nella stanza per ammirare le sue monete. Quante monete troverà nella stanza? La risposta e' infinite (ad esempio tutte quelle con un numero associato che termina con la cifra 3) e questo sembra naturale in quanto in ogni singola operazione il signore mette dieci monete e Robin Hood ne ruba solo una. Ma Robin Hood ha studiato matematica e la volta successiva procede diversamente. Il ricco signore procede sempre allo stesso modo ma Robin Hood sceglie piu accuratamente le monete da Rubare. Piu precisamente quando manca $\frac{1}{n}$ di minuto a mezzanote R-H decide di rubare la moneta con il numero n. Quante monete troverà a mezzanotte il signore nella stanza? La risposta e' nessuna (infatti se ve ne fosse qualcuna questa sarebbe in una teca con un numero naturale associato, diciamo m, ma questo e' impossibile in quanto la moneta nella teca m e' stata rubata da R-H quando mancava $\frac{1}{m}$ di minuto a mezzanotte). Si noti che anche con questa seconda strategia in ogni singola operazione il ricco signore mette 10 monete e R-H ne ruba una sola ma nonostante ciò riesce a rubarle tutte!! Esiste una versione probabilistica del gioco.

3 Il problema della Cioccolata

Questo problema insieme ad altri altrettanto interessanti si trova in [3]. Supponiamo di avere una tavoletta di cioccolato suddivisa in quadretti e di lati $m \times n$ (si faccia ad esempio 7×8...gli studenti in genere preferiscono numeri veri); la tavoletta quindi avrà mn quadretti. Vi sono esattamente mn persone e quindi bisogna suddividere la tavoletta nelle sue unità fondamentali in modo tale che ognuno possa mangiare un quadretto di cioccolata. La suddivisione della tavoletta deve procedere per tagli successivi o orizzontali o verticali che vanno da un estremo all'altro della componente che si sta suddividendo (non si possono sovrapporre i pezzi per fare contemporaneamente due o piu tagli). La domanda e': esiste un modo ottimale di fare la suddivisione, ossia che comporti un numero minimo di suddivisioni? e se si quante sono le suddivisioni minime necessarie per ridurre la tavoletta in tanti quadratini? La risposta e' immediata anche se non evidente. Bisogna prendere in considerazione la variabile numero di pezzi di cioccolata. All'inizio si ha un solo pezzo (tutta la tavoletta) dopo la prima suddivisione (qualunque essa sia) se se avranno due ed in generale ogni suddivisione, qualunque essa sia, aumenta di uno il numero dei pezzi di cioccolata. Si parte da uno e si deve arrivare ad mn pezzi di cioccolato e quindi in qualunque modo si proceda bisognera sempre fare $mn-1$ tagli, non c'e' un modo ottimale, tutti sono equivalenti.

4 Piccioni e piccionaie

Il principio della piccionaia e' un principio fondamentale della combinatorica (l'arte di contare) e dice la seguente cosa:

"Se vi sono n piccionaie ed $n+1$ piccioni allora c'e' una piccionaia con più di un piccione".

Sembra un principio ovvio dal quale si possano ricavare solo affermazioni ovvie ma questo non e' vero come si vede nel seguente esempio si veda [4].

Sia data una parete bianca di dimensioni 10 $metri \times 10$ $metri$ e coloriamone di nero una parte in un modo qualunque (la formulazione matematica e': si consideri N un qualunque sottoinsieme di $[0,10] \times [0,10]$ che chiameremo il sottoinsieme dei punti neri; il suo complementare e' il sottoinsieme dei punti bianchi.) Dimostrare che qualunque sia la colorazione (qualunque sia $N \subset [0,10] \times [0,10]$) esistono due punti sulla parete che si trovano esattamente a distanza un metro ed aventi lo stesso colore. (questo vuol dire ad esempio che se fate una colorazione e trovate due punti a distanza 1 metro aventi lo stesso colore e ne cambiate colore ad uno dei due e procedete cosi sperando di eliminare tutte le coppie aventi queste caratteristiche non potete riuscirci....). La dimostrazione e' la seguente. Si consideri un triangolo equilatero di lato 1 metro sulla parete. Si pensi ai vertici come piccioni ed ai due colori (bianco e nero) come piccionaie. Applichiamo il principio della piccionaia: esistono due vertici del triangolo aventi lo stesso colore; ma per costruzione loro si trovano a distanza un metro, fine della dimostrazione.

References

AZ [1] M. Aigner, G.M. Ziegler *P*roofs from the Book Springer (1999).

R [2] S.M. Ross *C*alcolo delle probabilità Apogeo.

W [3] P. Winkler *F*ive algorithmic puzzles, in Tribute to a Mathemagician, E. Demaine, M. Demaine, B. Cipra and T. Rodgers, editors, AK Peters Ltd. (2004). (Disponibile online http://www.math.dartmouth.edu/ pw/papers/pubs.html file 114).

B [4] ......*F*acile come π Boringhieri.