MATEMATICA RICREATIVA

(ESEMPI)

DAVIDE GABRIELLI

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata

UNIVERSITÀ DELL'AQUILA

○ + □ = ?

LA MATEMATICA È:

BELLA, DIVERTENTE, UTILE, POTENTE, IMPORTANTE, ...

OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

http://olimpiadi.dm.unipi.it/

BIBLIOGRAFIA ESSENZIALE:

1. MARTIN GARDNER "ENIGMI E GIOCHI MATEMATICI" (BUR).
2. ROSS "CALCOLO DELLE PROBABILITÀ" (Apogeo).
3. O. A. IVANOV "FACILE COME π?" (Boringhieri)
4. PETER WINKLER "FIVE ALGORITHMIC PUZZLES" (www.math.dartmouth.edu/~pw/)
5. M. AIGNER, G.M. ZIEGLER "PROOFS FROM THE BOOK" (SPRINGER).
6. A CURA DI C. BARTOCCI "RACCONTI MATEMATICI" (EINAUDI).
7. B. BOLLOBAS "MODERN GRAPH THEORY" (SPRINGER)

La Somma di Gauss

D. Kehlmann "La misura del mondo" (Feltrinelli).

$$1+2+3+4+5+\dots\dots+98+99+100=\dots$$

?

$$1+2+3+\dots+(n-2)+(n-1)+n=\ ?$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \ ?}$$

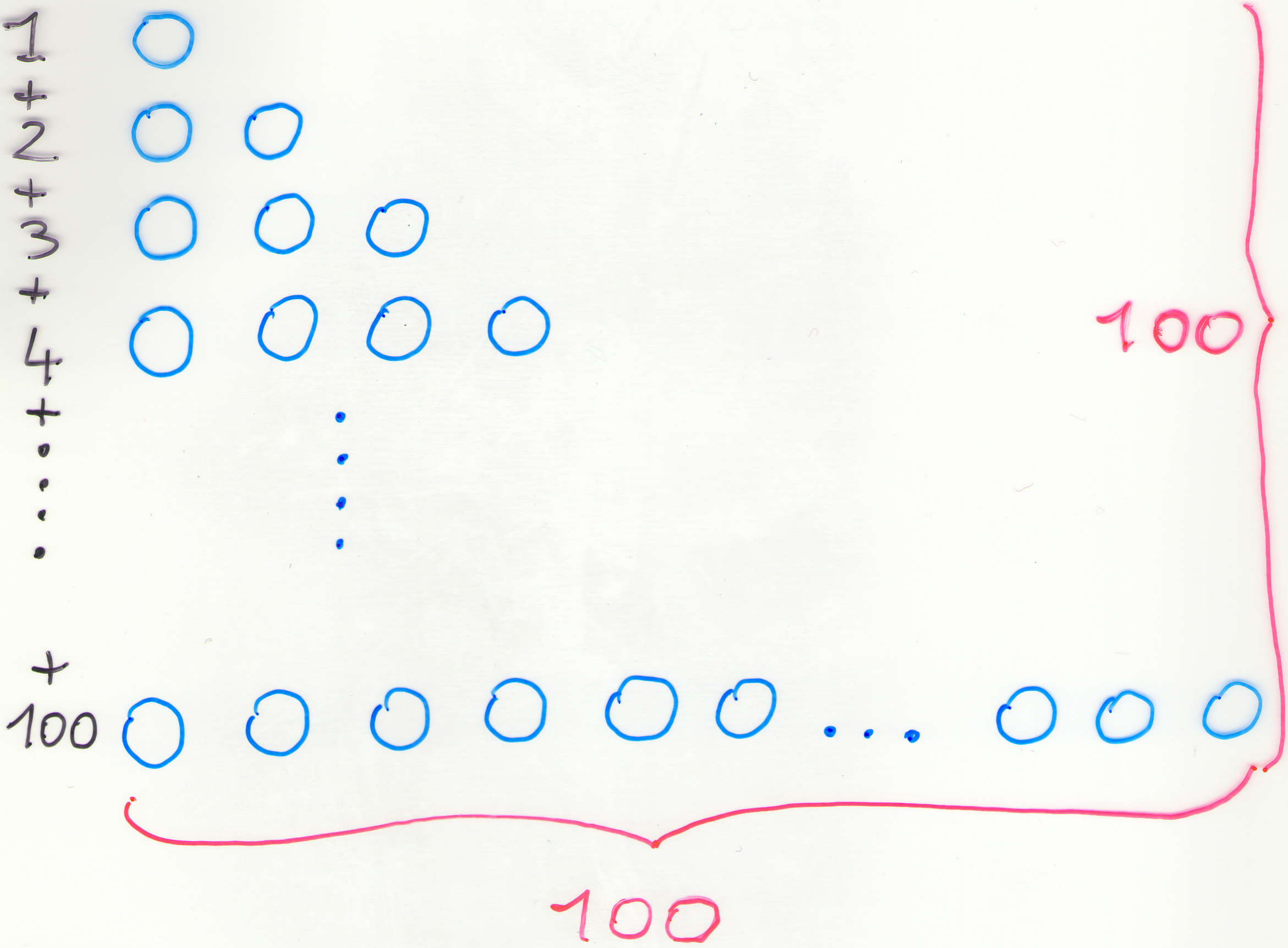
LA SOLUZIONE DI GAUSS

$$\underbrace{0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 49}_{50\ \text{volte}} + 50 + 51 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100$$

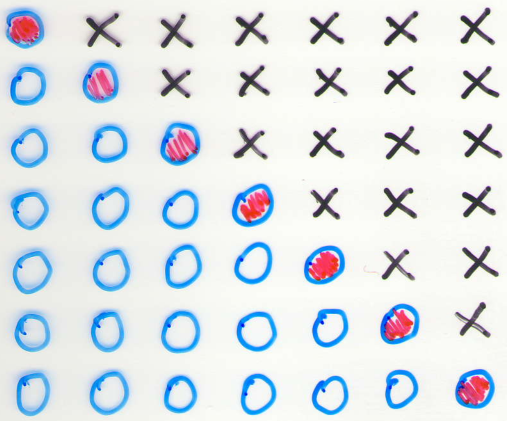
$$\boxed{50 \times 100 + 50 = 5050}$$

LA SOLUZIONE DEL CONTADINO

O = 1 mela



$100 = n = 7$



- $N(\circ) + N(\bullet) + N(\times) =$ Area quadrato $=$

$= n \times n = n^2$

- $N(\bullet) = n$ Uno per riga

- $N(\circ) = N(\times)$ Per simmetria

$$\Downarrow$$

$$2N(\circ) + n = n^2 \Rightarrow N(\circ) = \frac{n^2 - n}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = N(\circ) + N(\bullet) = \frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$n = 100 \Rightarrow \sum_{i=1}^{100} i = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

QUADRATI MAGICI

11	15	10	12	9
9	13	8	10	7
12	16	11	13	10
8	12	7	9	6
4	8	3	5	2

46

QUADRATO MAGICO
=
TABELLA DI SOMMA

Esempio

4 x 4

(7, 11, 2, 4) (3, 7, 1, 4)

	7	11	2	4
3	10	14	5	7
7	14	18	9	11
1	8	12	3	5
4	11	15	6	8

18 + 3 + 11 + 7

(11+7) (2+1) (4+7) (4+3)

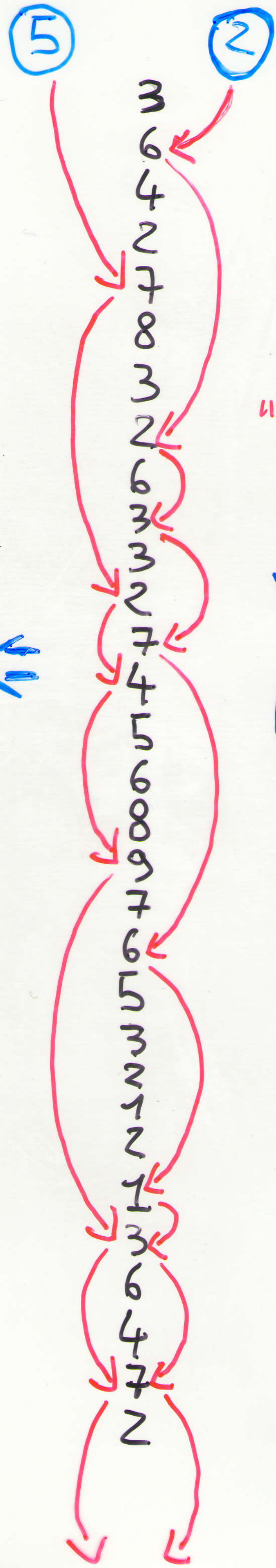
=

39

=

7+11+2+4+3+7+1+4

IL MAGO FORTUNATO



"Coupling"

"Accoppiamento"

W. Doeblin

(1915 - 1940)

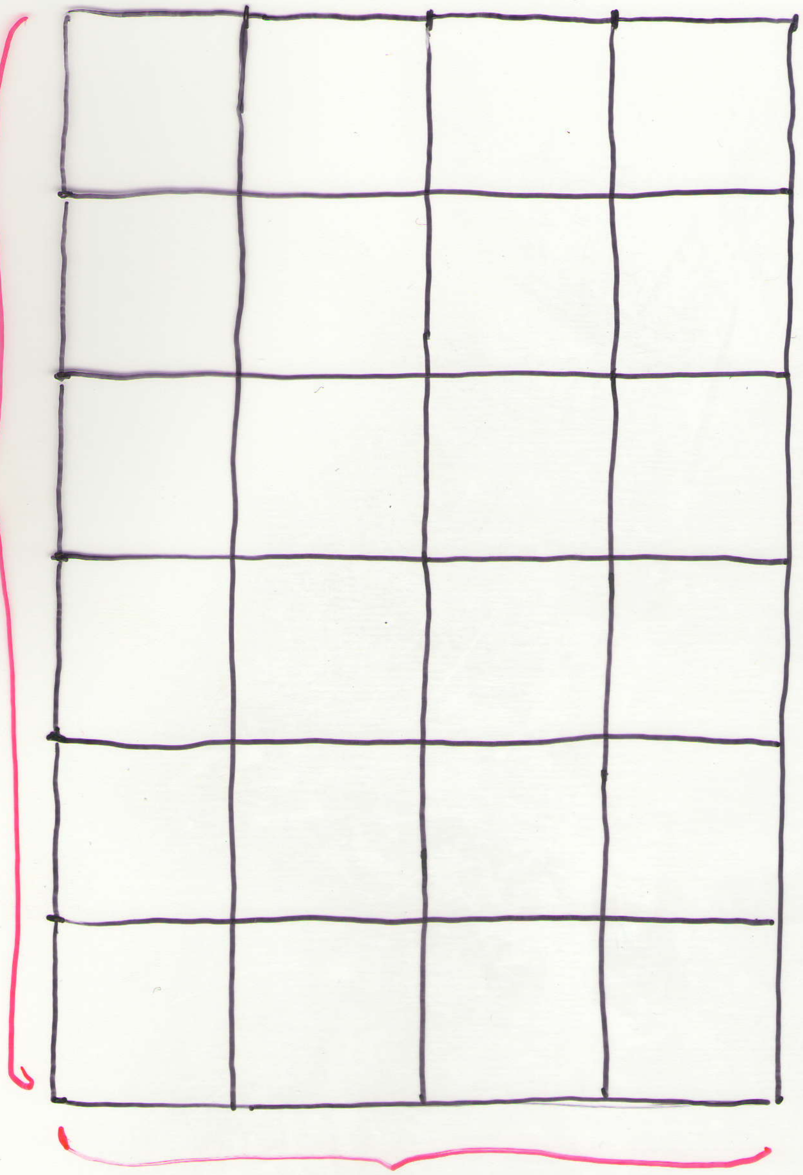
⇐

GIOCO DI PRESTIGIO CON LE CARTE!

Sempre insieme!

L'ALGORITMO DELLA CIOCCOLATA

6 = m



4 = m

24 Persone

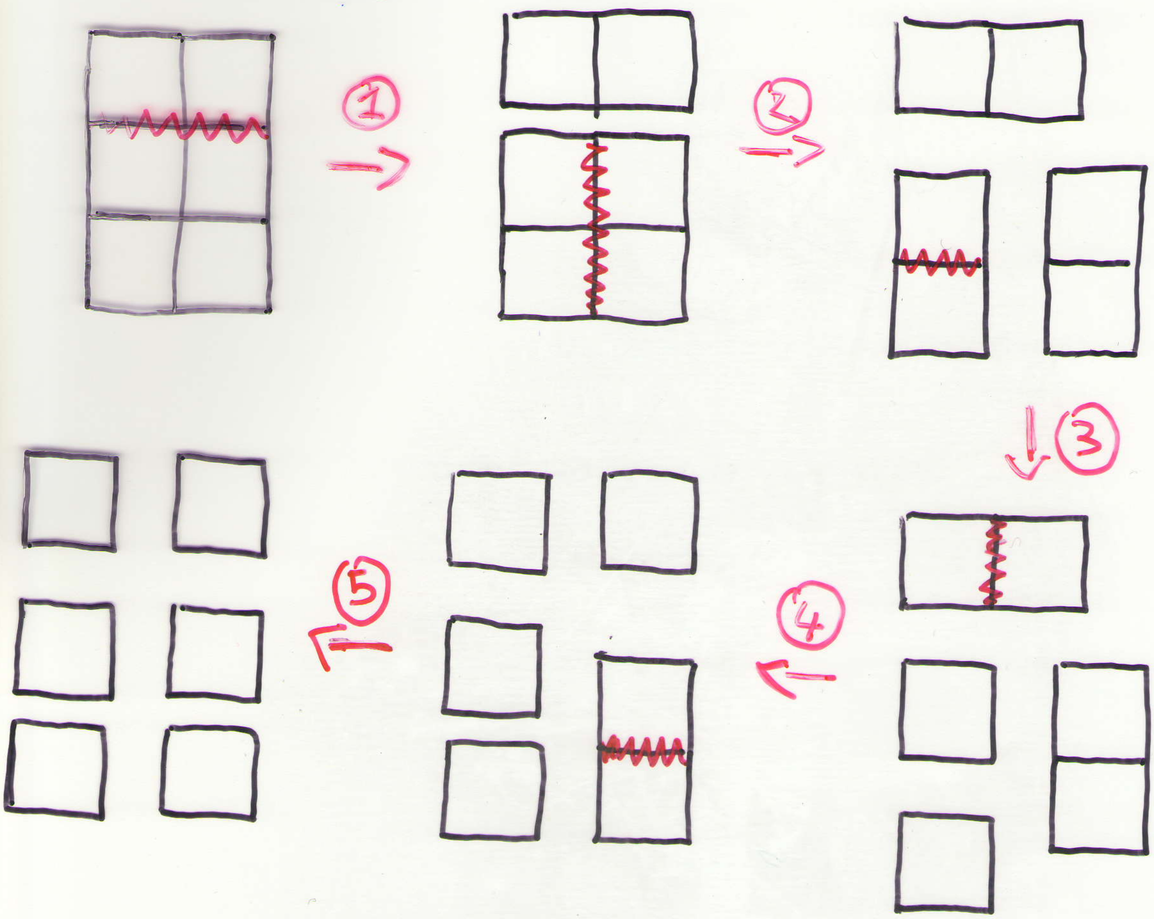
⇒ 1 quadretino ciascuno.

Quanti Tagli?

Come procedere in modo ottimale?

Ogni Taglio deve andare da un bordo all'altro.

Esempio (3×2)



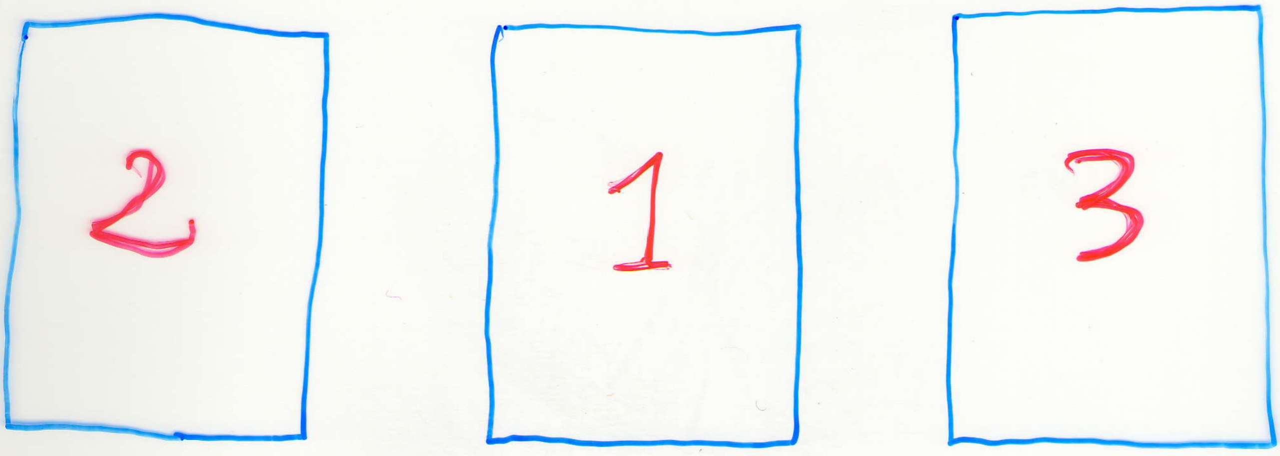
SOLUZIONE: Ad ogni Taglio il NUMERO DI PEZZI di cioccolato aumenta di 1.

Parto da 1 (Tavoletta intera) devo arrivare ad m×n ⇒ $\boxed{m \times n - 1 \text{ Tagli}}$

Non c'è modo ottimale,

TUTTI equivalenti !

IL GIOCO DELLE 3 CARTE



- Se indovinate dov'è l'asso vincete
- Il banco sa dov'è l'asso.
- Scegliete una delle 3 carte
- Qualunque sia la scelta una delle rimanenti non è l'asso. Viene scoperta e vi si chiede se volete cambiare la vostra scelta.

COSA FATE ?

NON CAMBIO

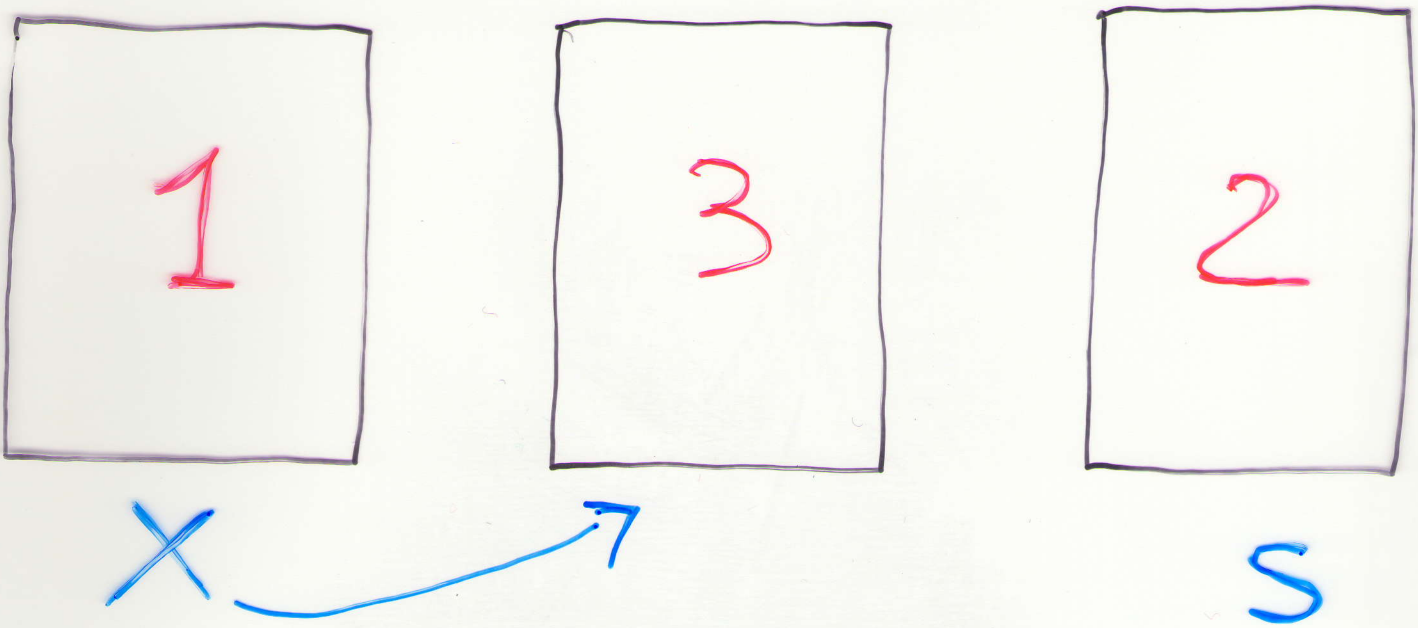
3 CARTE 1 ASSO

VINCO SE SCEGLIENDO A CASO TROVO L'ASSO

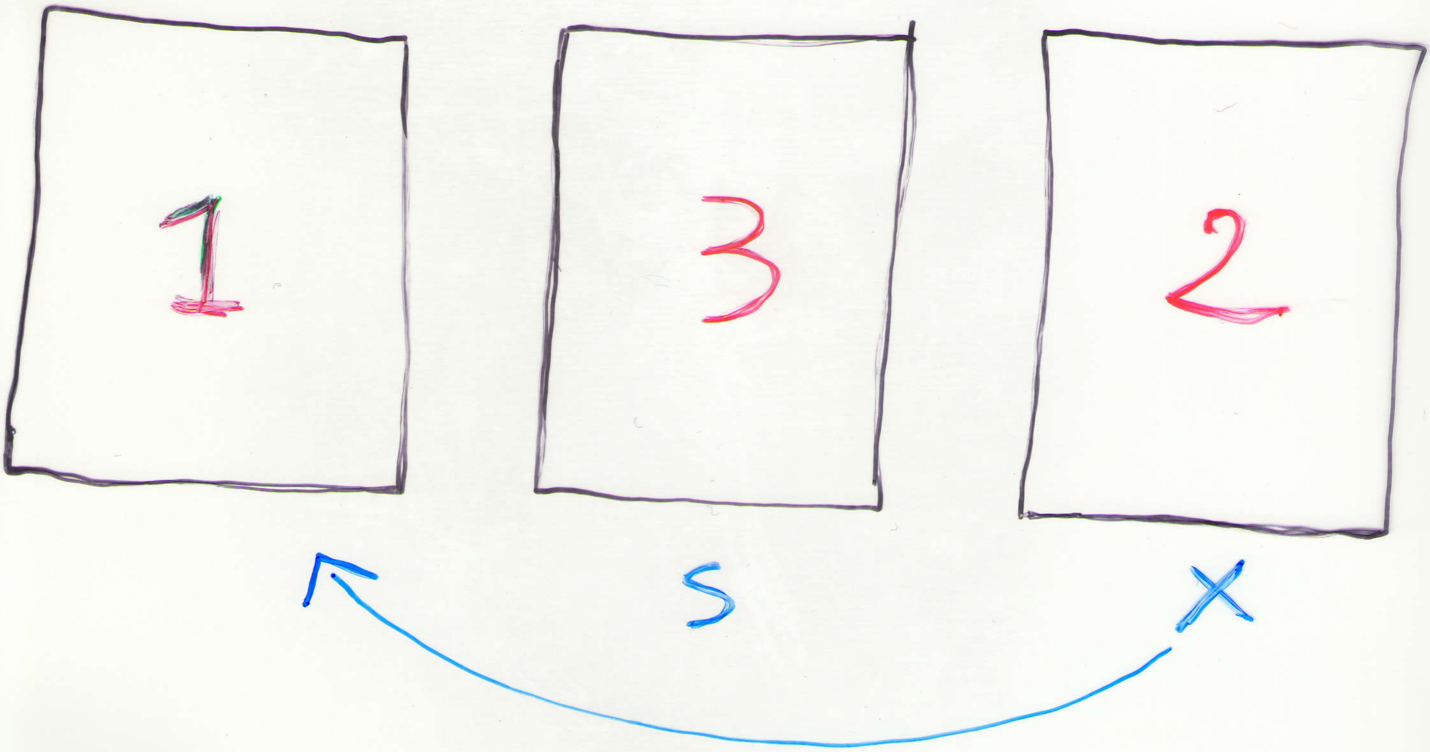
PROBABILITÀ DI VINCERE

$$\boxed{\begin{array}{ll} \frac{1}{3} & \begin{array}{l} = \text{numero assi} \\ = \text{numero carte} \end{array} \end{array}}$$

CAMBIO



SE ALL'INIZIO AVEVO SCELTO L'ASSO PERDO



SE ALL'INIZIO NON AVEVO SCELTO L'ASSO VINCO.

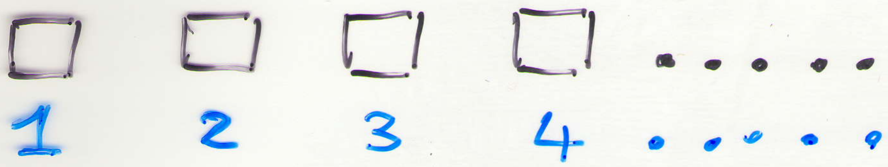
VINCO SE SCEGLIENDO A CASO NON TROVO L'ASSO.

PROBABILITÀ DI VINCERE

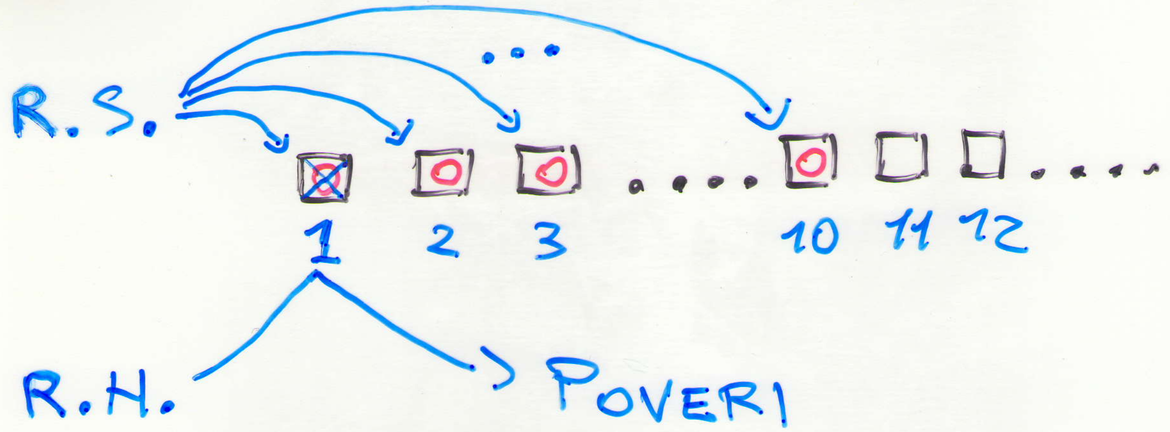
$$\boxed{\frac{2}{3} \begin{array}{l} = \text{numero di non assi} \\ = \text{numero di carte} \end{array}}$$

IL PARADOSSO DI ROBIN HOOD (R.H.)

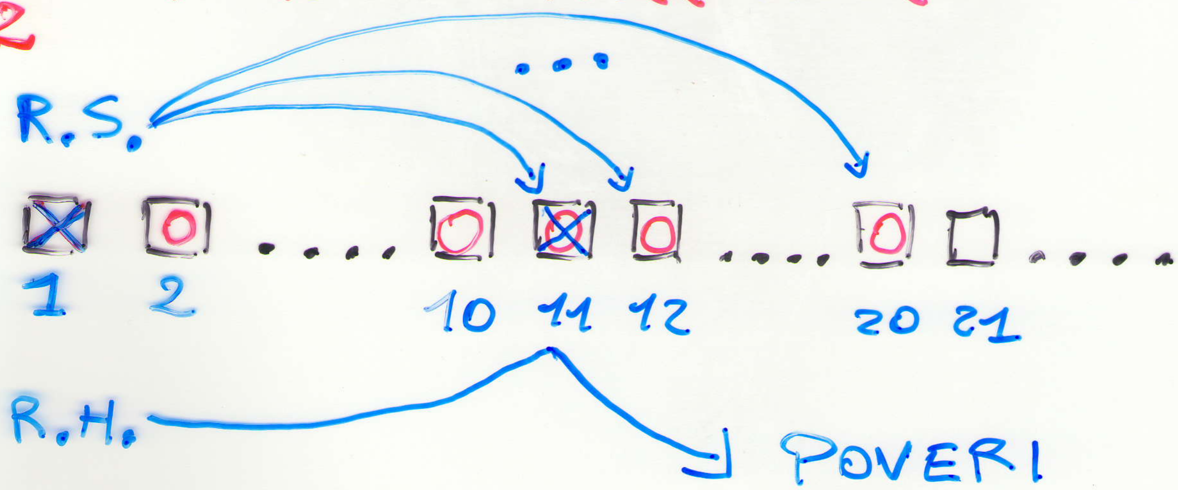
Ricco Signore (R.S.) → Casa con ∞ casseforti, una per ogni numero naturale



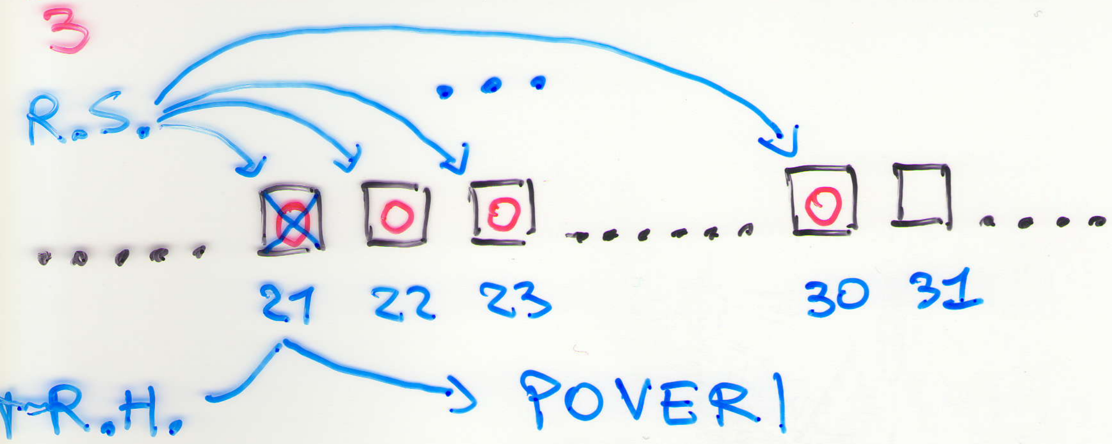
1 minuto a Mezzanotte



$\frac{1}{2}$ minuto a Mezzanotte



$\frac{1}{3}$ minuto a mezzanotte



10 ⟶ entrano

esce ⟵ 1

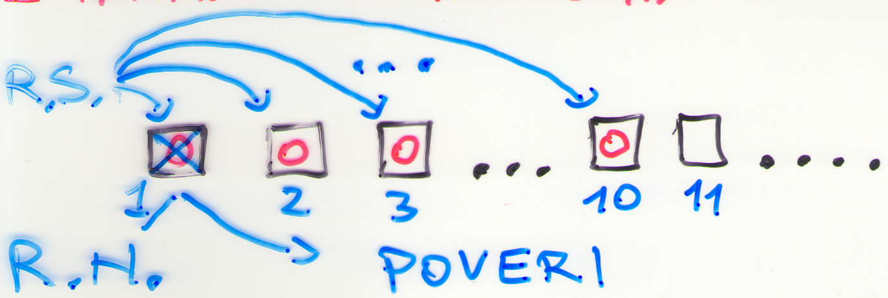
Quante monete ha il R.S. a mezzanotte?

Risposta: infinite!

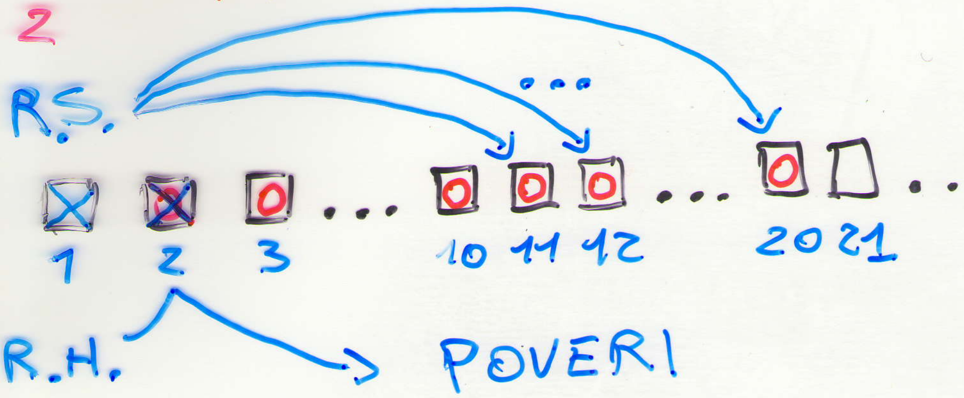
Casseforti del tipo xxxx1 sono vuote, tutte le altre piene.

R.H. Si iscrive al corso di laurea in matematica.

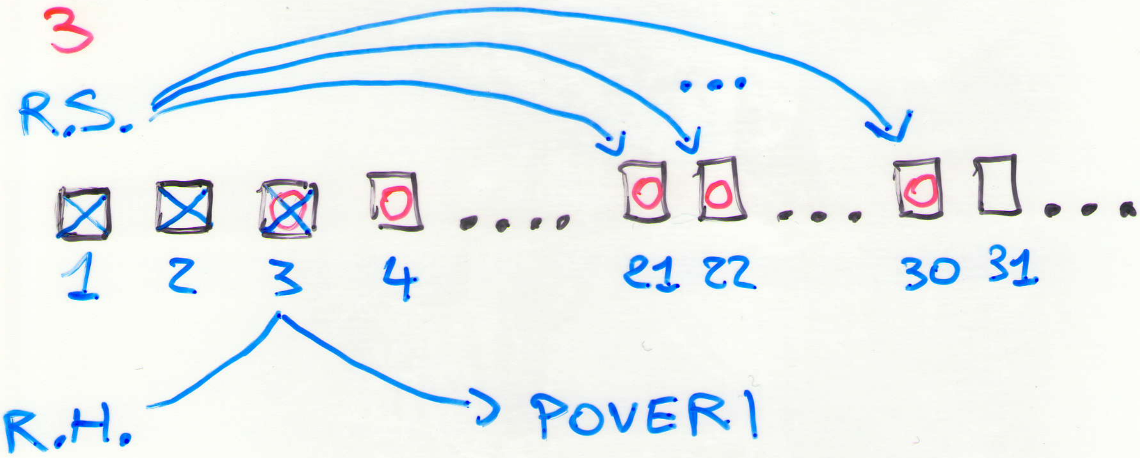
1 minuto a mezzanotte



$\frac{1}{2}$ minuto a mezzanotte



$\frac{1}{3}$ minuto a mezzanotte



10 ⟶ entrano

esce ⟵ 1

Quante monete ha R.S. a mezzanotte?

RISPOSTA: NESSUNA!

AD ESEMPIO LA CASSAFORTE NUMERO

783521006732284

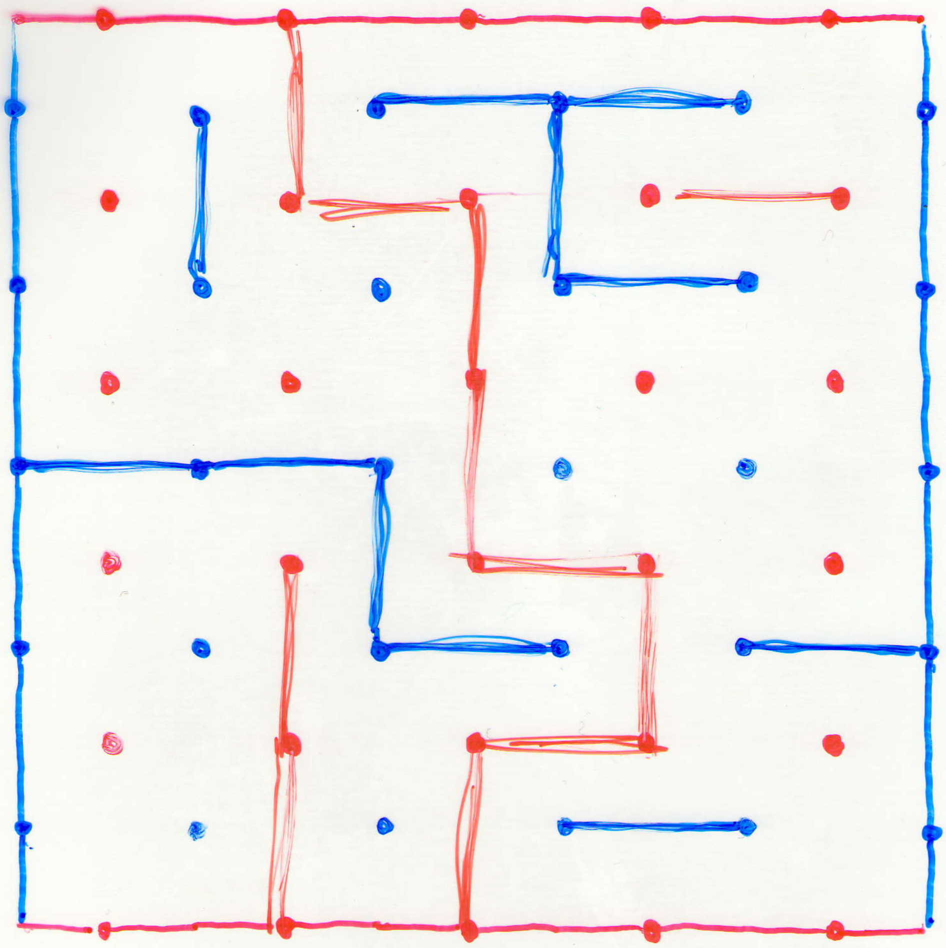
È STATA SVUOTATA QUANDO MANCAVA

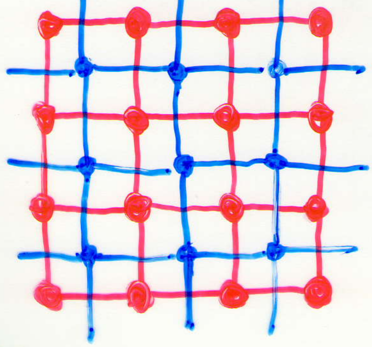
$$\frac{1}{783521006732284}$$

DI MINUTO A MEZZANOTTE.

UN GIOCO DI GALE

David Gale, matematico specializzato in Teoria dei giochi.





Reticolo quadrato e il suo duale.

John ("A beautiful mind") Nash

Teorema: Il giocatore che fa la prima mossa ha una strategia vincente.

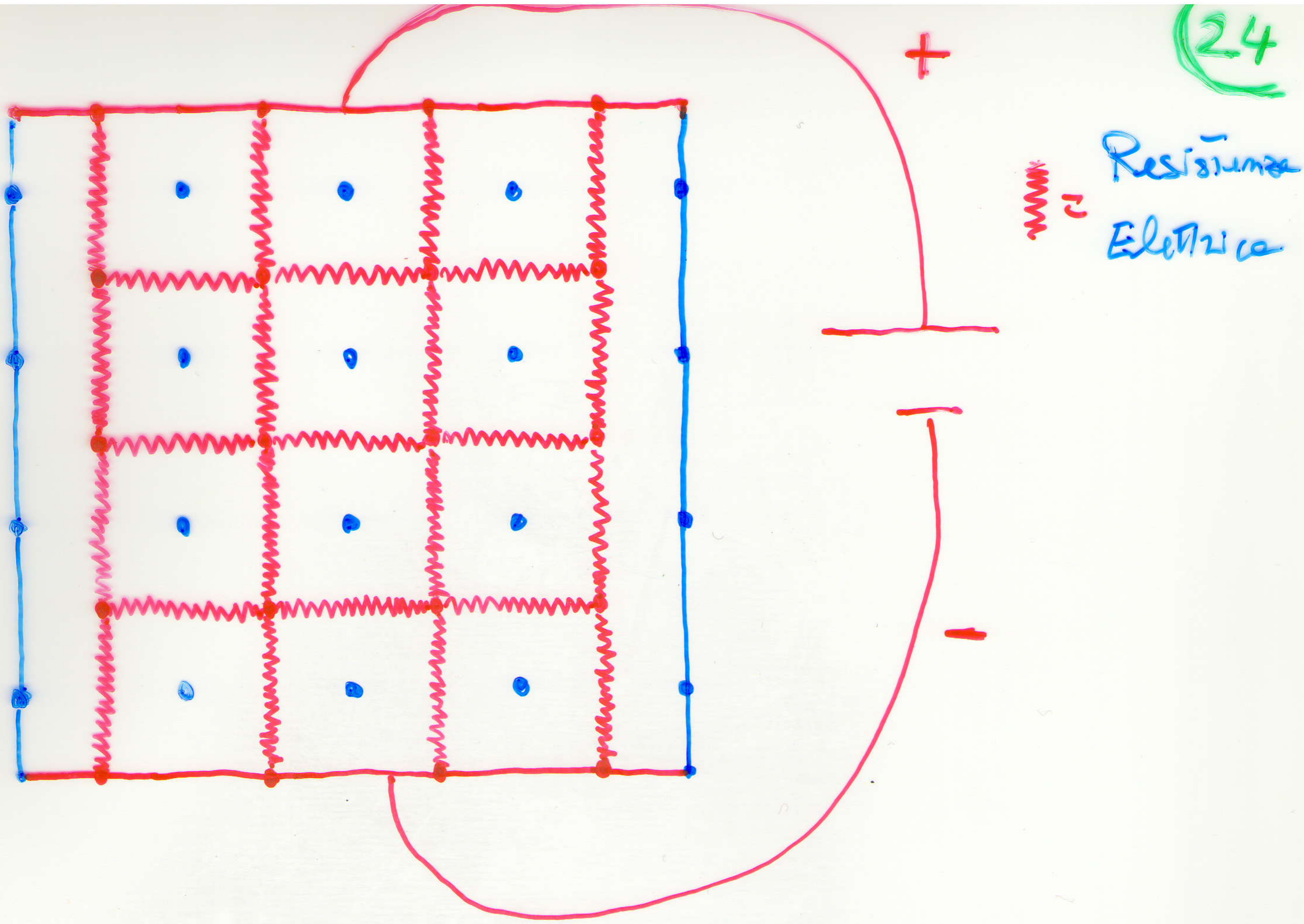
Idea della dimostrazione:

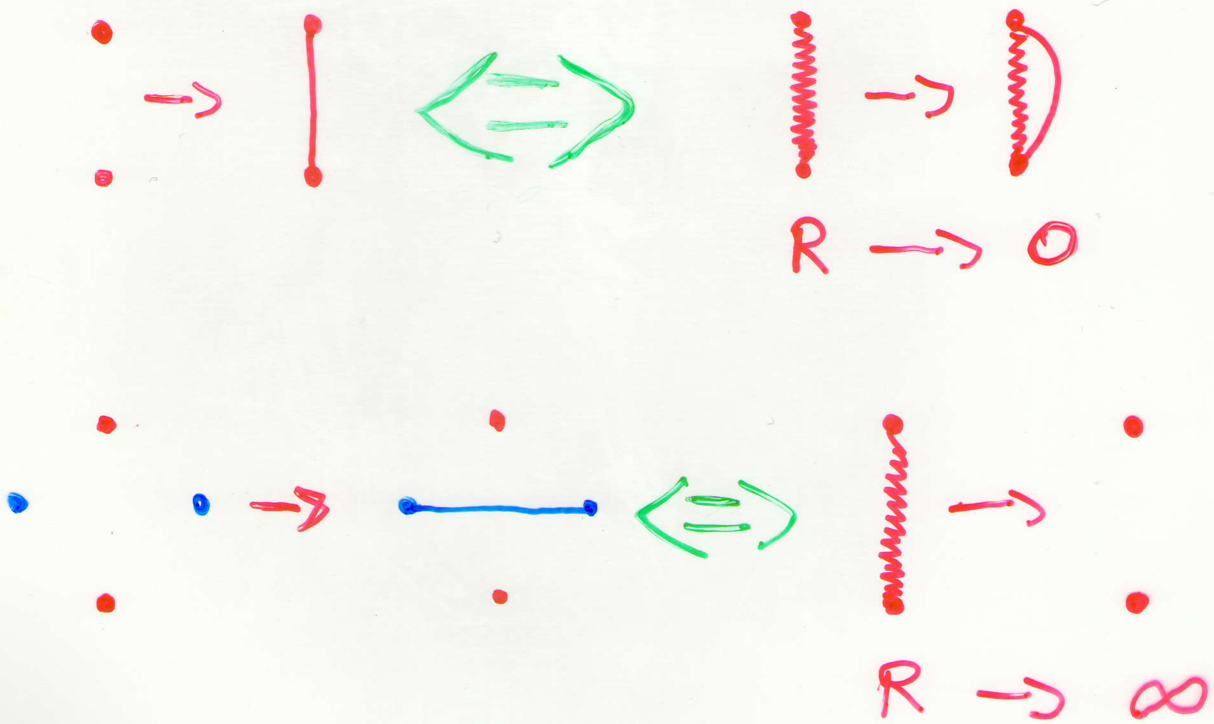
- Deve esistere una strategia vincente per uno dei 2 giocatori
- Supponiamo che esista per il secondo, allora il primo può fare una mossa a caso e poi seguire la strategia vincente del 2°.
  → contraddizione.

Claude Shannon: padre della moderna TEORIA DELL'INFORMAZIONE

⇓

MACCHINA GIOCATRICE DI GALE





La macchina muove cortocircuitando i 2 punti che hanno la maggior differenza di potenziale.

QUASI IMBATTIBILE

PICCIONI E PICCIONAIE

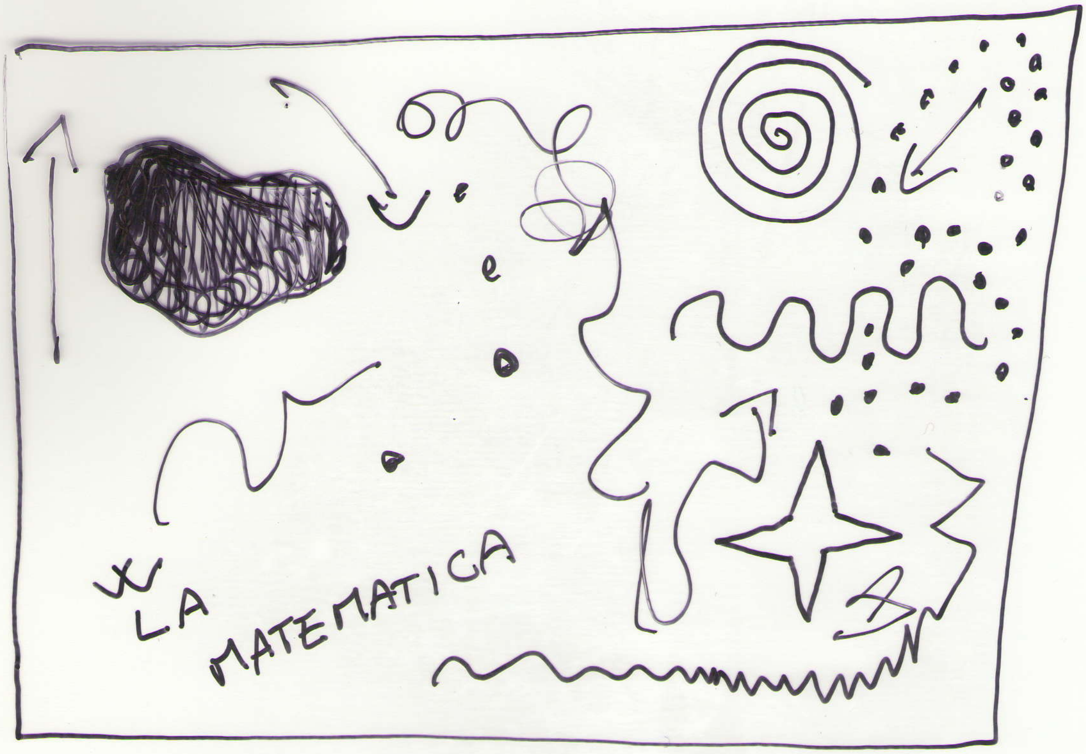
SE METTO $N+1$ PICCIONI IN N PICCIONAIE ALLORA C'È ALMENO UNA PICCIONAIA CON PIÙ DI UN PICCIONE.

PRINCIPIO DELLA COMBINATORICA, L'ARTE DEL CONTARE.

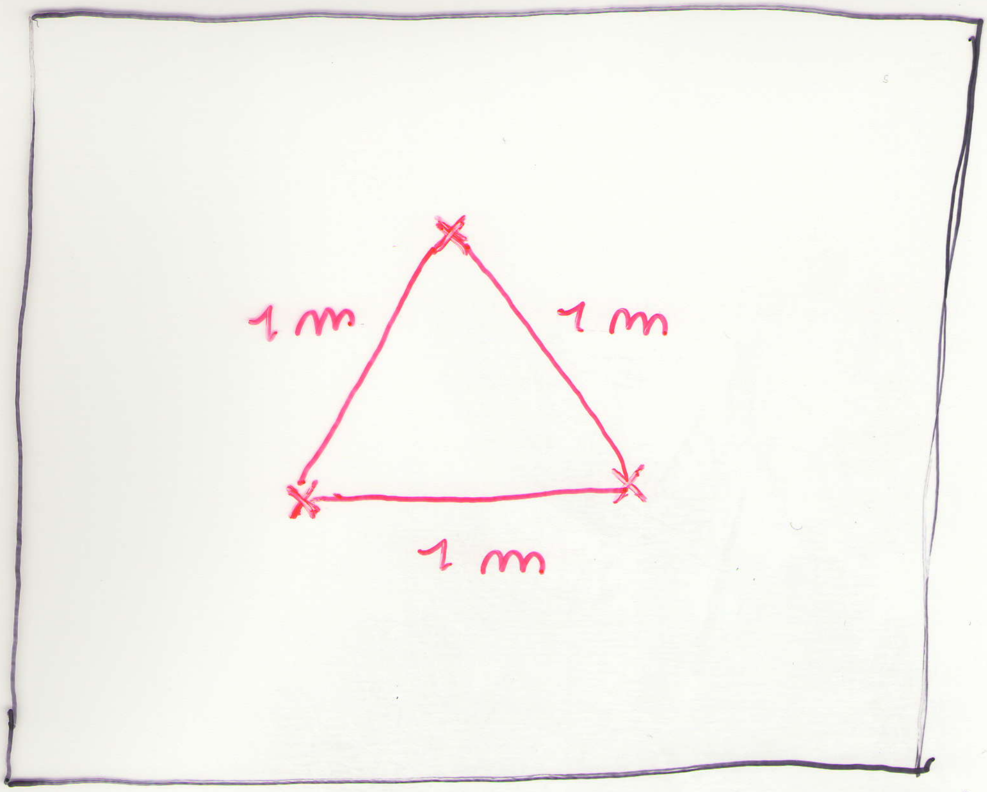
$\Downarrow$

SOLO CONCLUSIONI BANALI ?

Parete 10 m x 10 m bianca.
Se ne colora parte di nero in modo qualsiasi.



Dimostrare che, qualunque sia la colorazione, esistono 2 punti della parete che si trovano a distanza esattamente 1 metro ed aventi lo stesso colore (o bianco o nero)



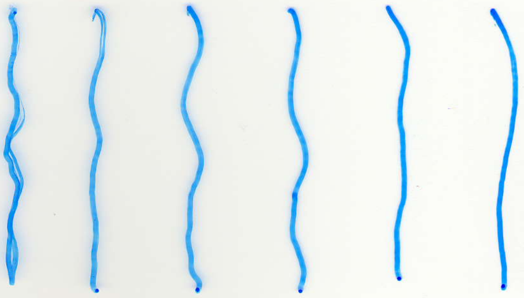
Bianco, Nero $\Longleftrightarrow$ PICCIONAIE

× $\Longleftrightarrow$ PICCIONI

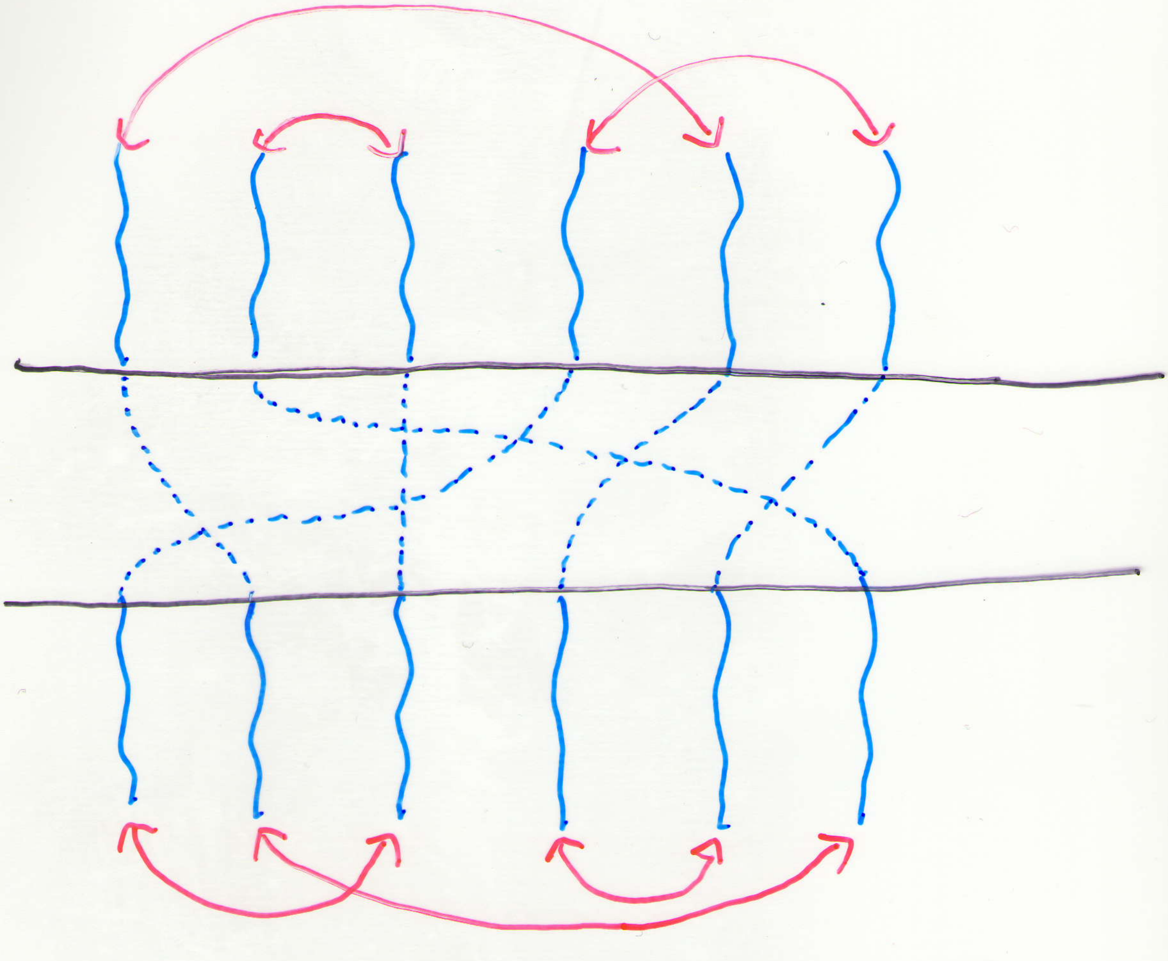
$\Downarrow$

2 × HANNO LO STESSO COLORE E SI TROVANO A DISTANZA 1 m.

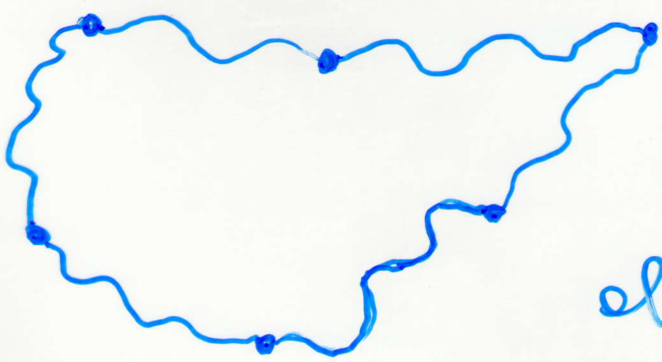
PROBABILITÀ E FORTUNA



6 fili d'erba.



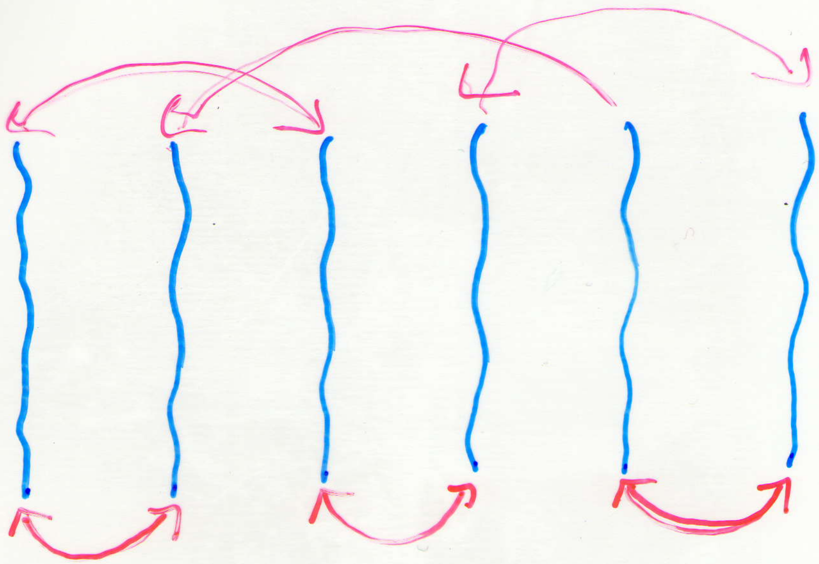
se



si avrà fortuna, altrimenti no.

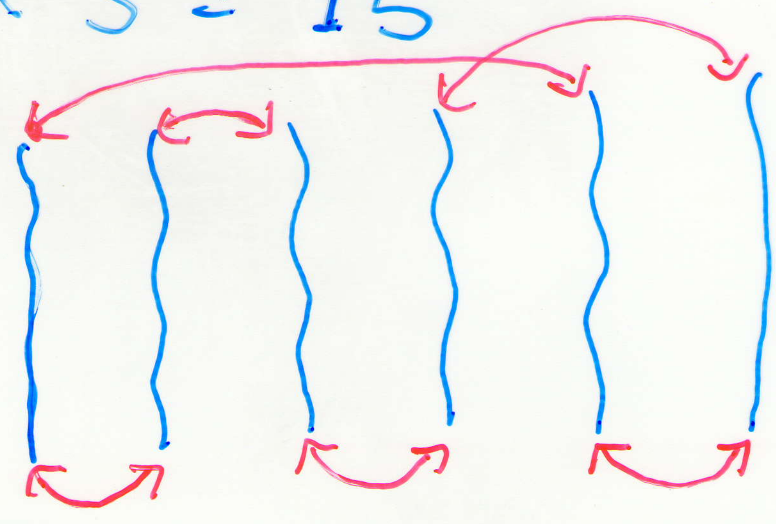
Qual'è la probabilità di avere fortuna?

$$P = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$$



Numero allacciamenti totali

$= 5 \times 3 = 15$

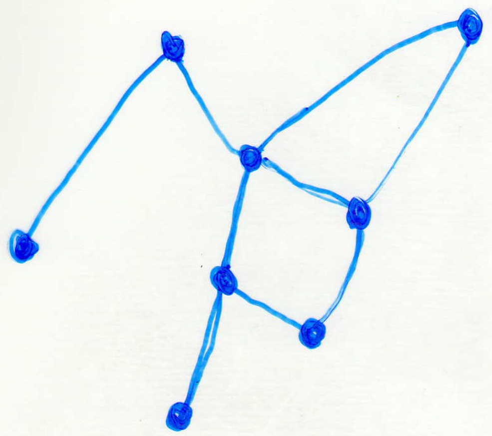


Numero allacciamenti favorevoli

$= 4 \times 2 = 8 \Rightarrow \boxed{P = \frac{8}{15} > \frac{1}{2}}$

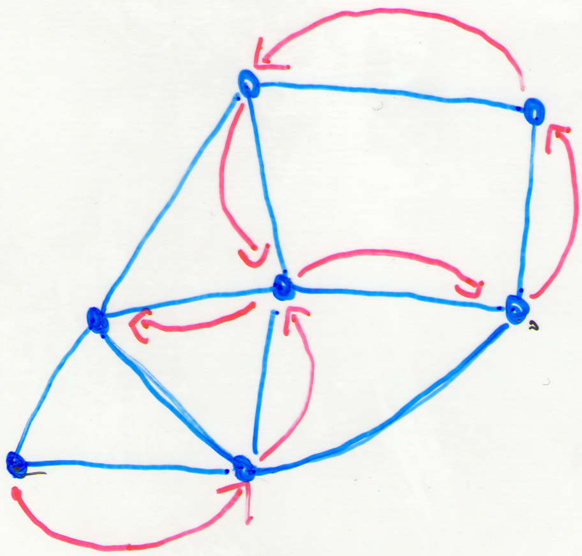
INTERLUDIO

Teoria dei Grafi



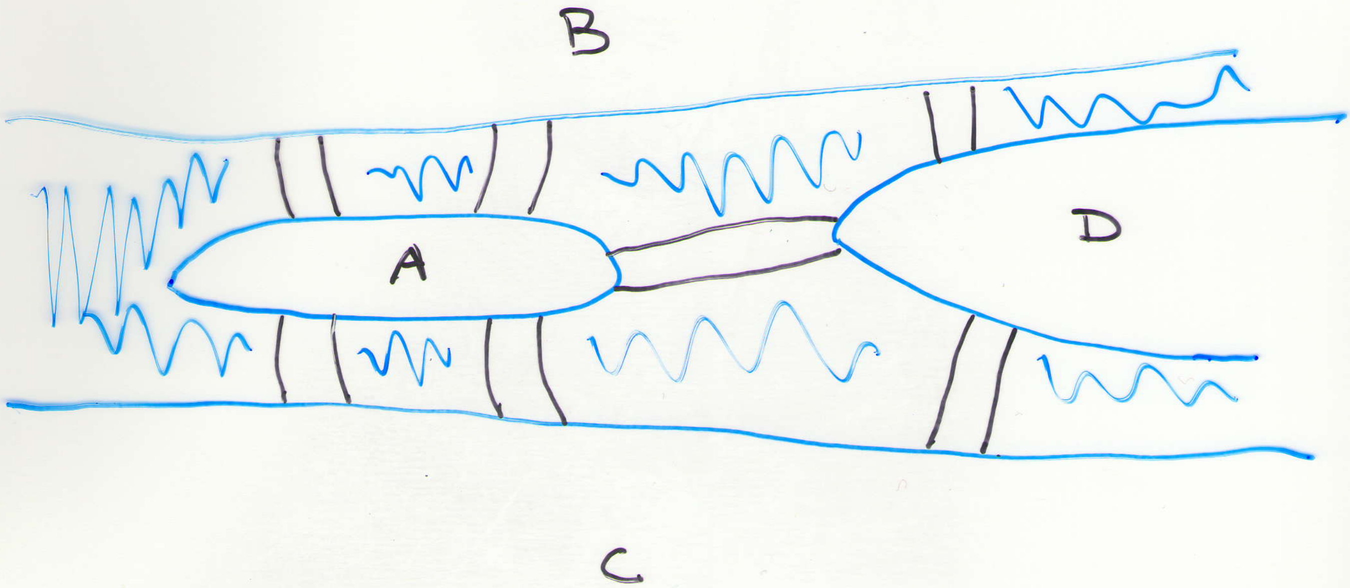
• = vertice

— = lato

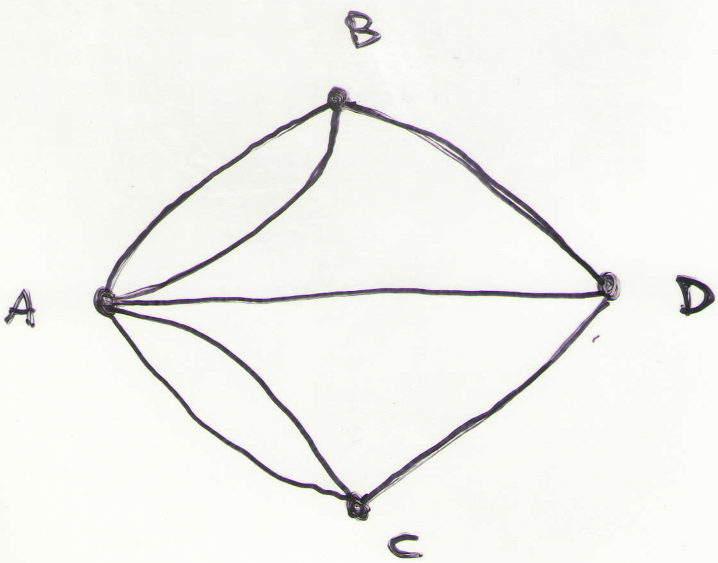


→ = CAMMINO SUL GRAFO.

I PONTI DI KÖNIGSBERG ED I CAMMINI EULERIANI.



È possibile fare una passegiata passando su ogni ponte una ed una sola volta?



2x Numero passaggi + 1 = numero dispari

I

=

2x Numero passaggi

=

numero pari

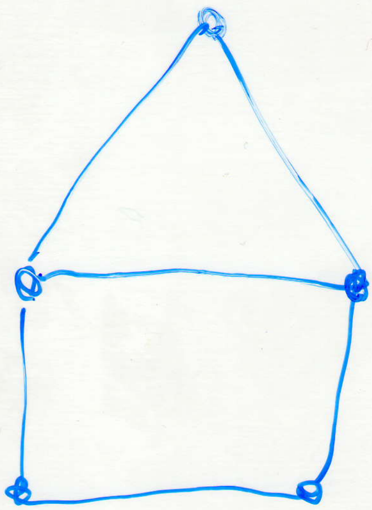
=

pari

pari

F

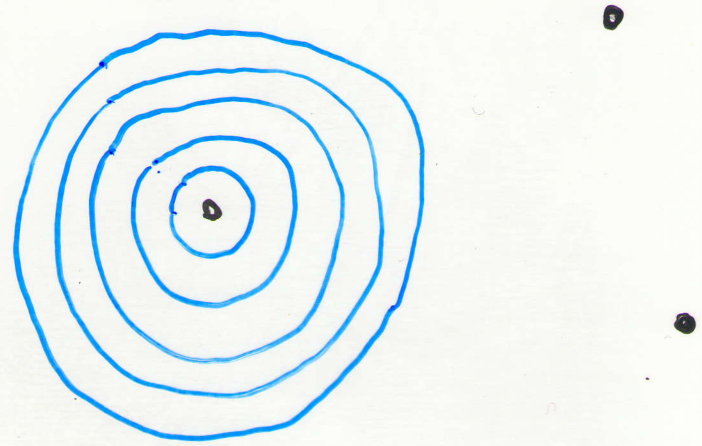
dispari



LA TORRE DI HANOI ED I CAMMINI HAMILTONIANI

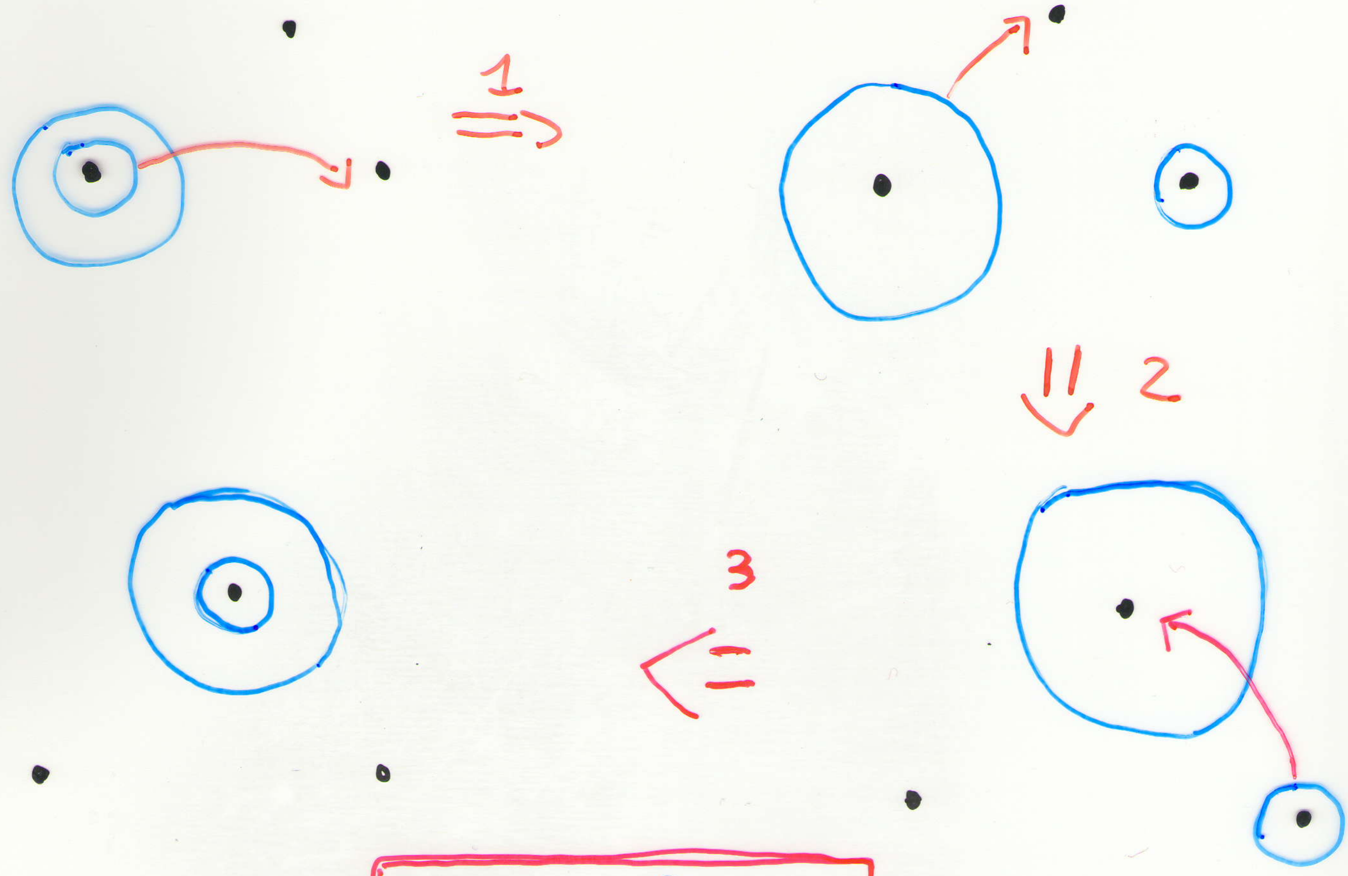
Proiezione dall'alto.

n dischi



Trasferire la pila di dischi in un supporto (•) diverso con la proibizione di avere un disco di diametro maggiore sopra uno di diametro minore.

$n = 2$



$$\boxed{3 = 2^2 - 1}$$

Teorema: Il modo ottimale di farlo con n dischi prevede

$$\boxed{2^n - 1}$$

mosse.

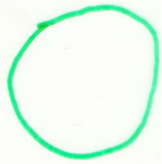
Numeri di Mersenne.

Dimostrazione:

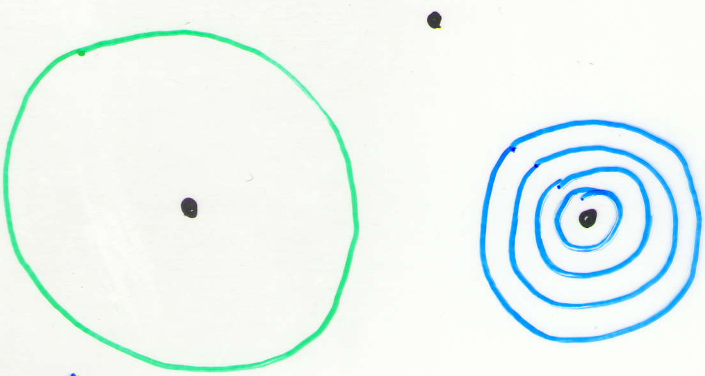
PER INDUZIONE!

VERO PER $n = 2$.

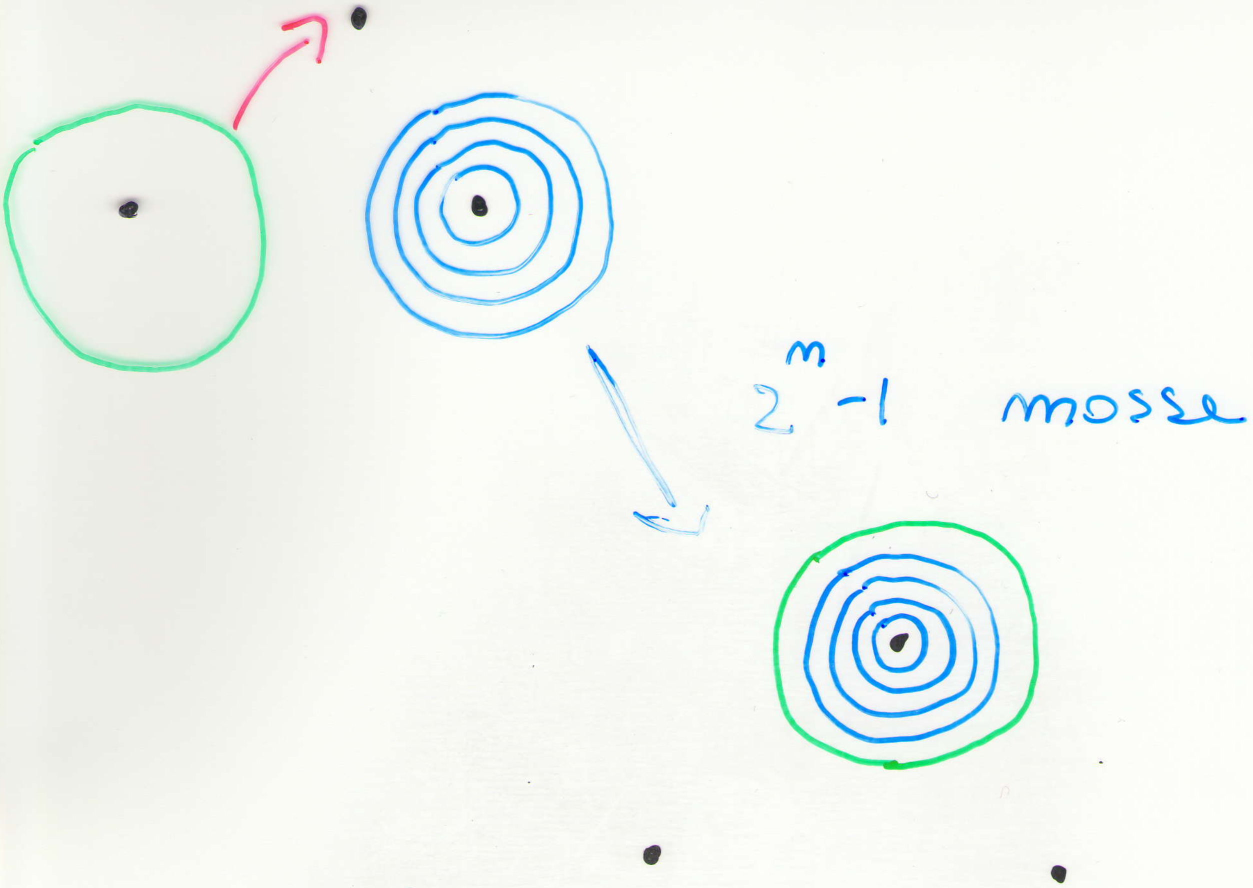
Ipotizzo vero per $n \Rightarrow$ vero per $n+1$.

Per poter muovere 

Devo avere



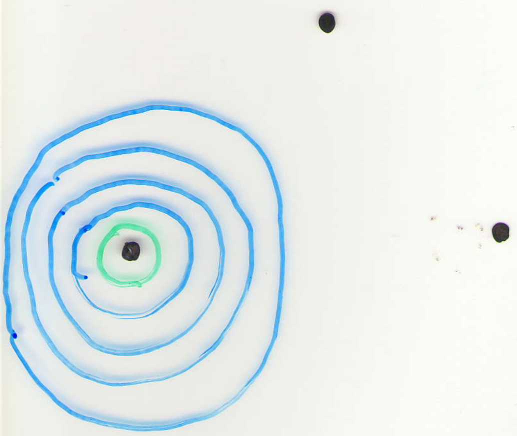
Servono $2^n - 1$ mosse



IN TOTALE

$$2^m - 1 + 1 + 2^m - 1 = \boxed{2^{m+1} - 1}$$

STRATEGIA OTTIMALE



MUOVERE ○ UNA VOLTA SI ED UNA NO SEMPRE NELLO STESSO VERSO

QUANDO NON SI MUOVE ○ FARE L'UNICA MOSSA POSSIBILE.

RISULTATO

○ → ANTIORARIO

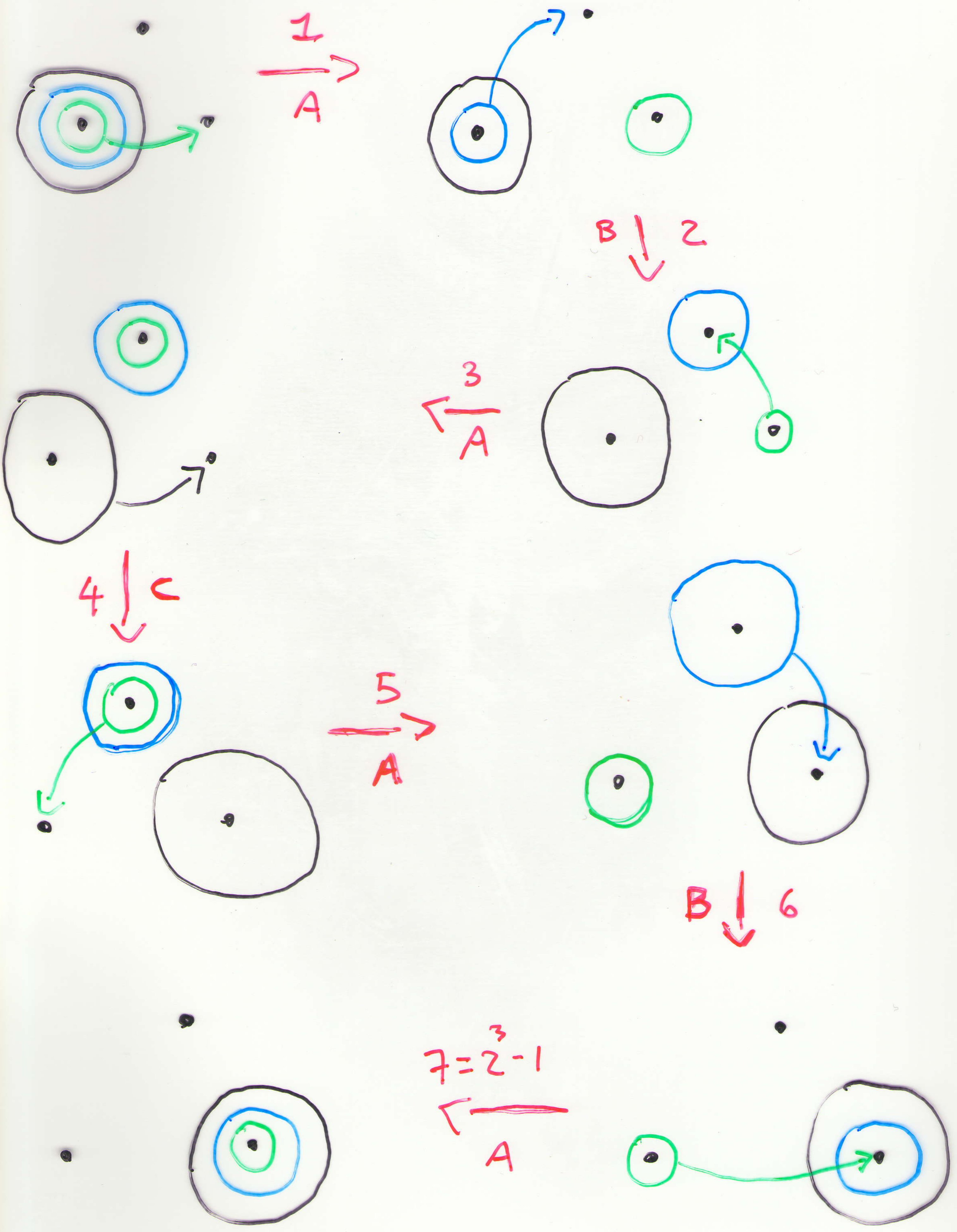
○ → ORARIO

○ → ANTIORARIO

○ → ORARIO

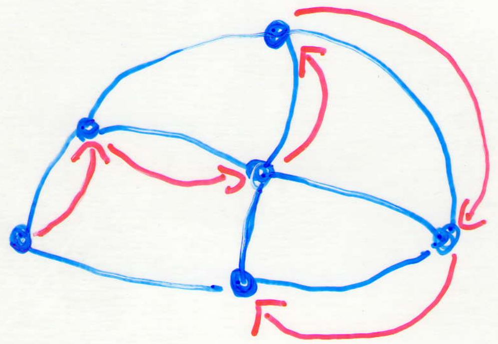
○ → ANTIORARIO

$n=3$

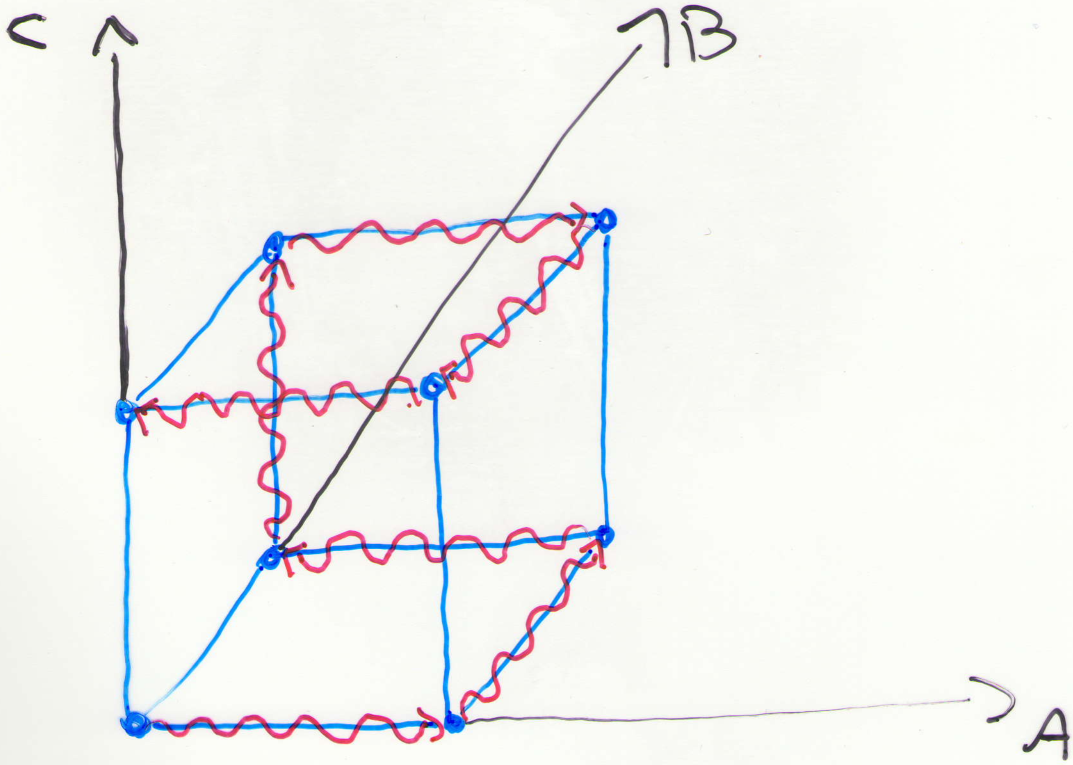


CAMMINO HAMILTONIANO

VISITA TUTTI I VERTICI DI UN GRAFO UNA ED UNA SOLA VOLTA.

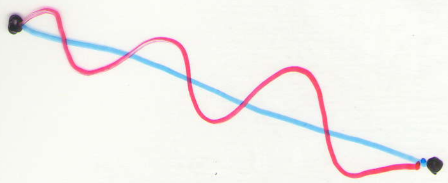


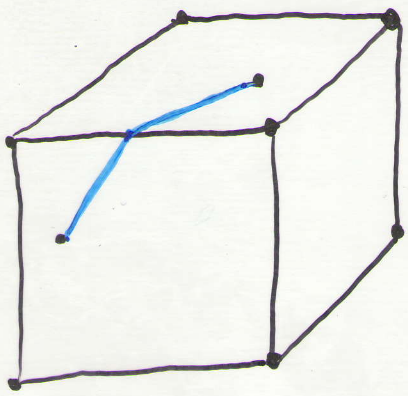
ABACABA



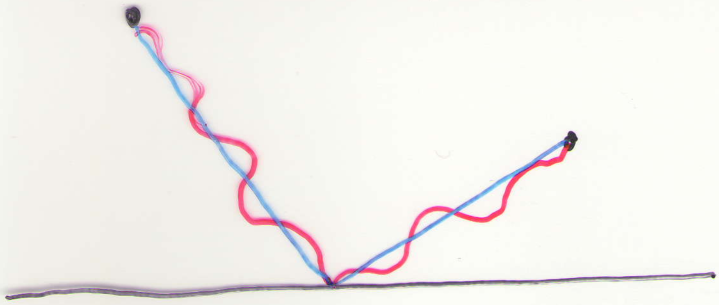
GEODETICHE

Una geodetica è il cammino più breve tra 2 punti.





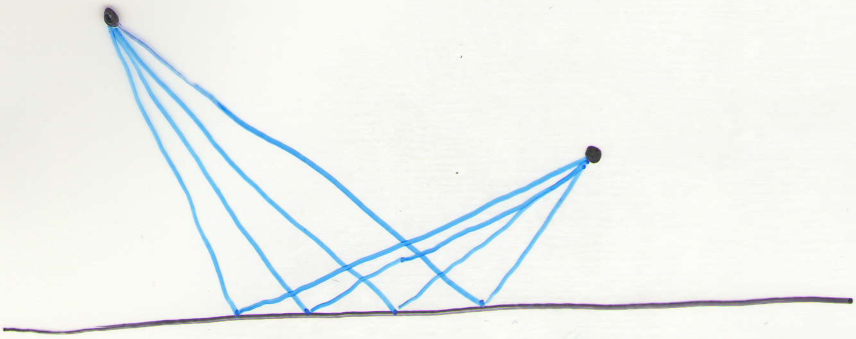
Qual'è la strada più breve per spegnere l'incendio?



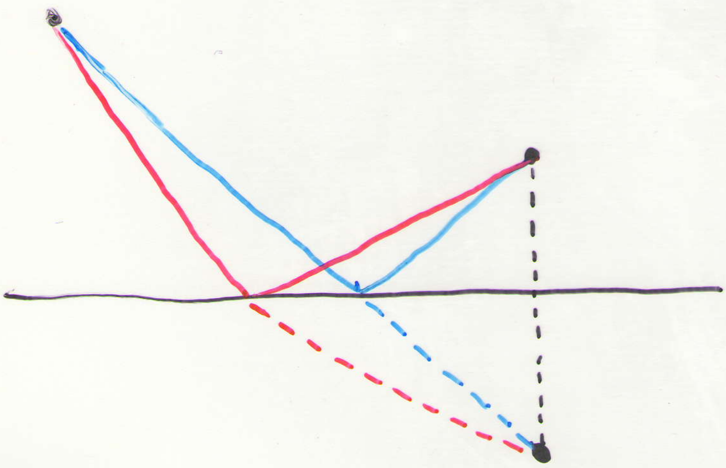
NO

↓

linee rette



?



Disuguaglianza Triangolare: un lato di un Triangolo è minore della somma dei rimanenti

$\Updownarrow$

Geodetiche sono linee rette.