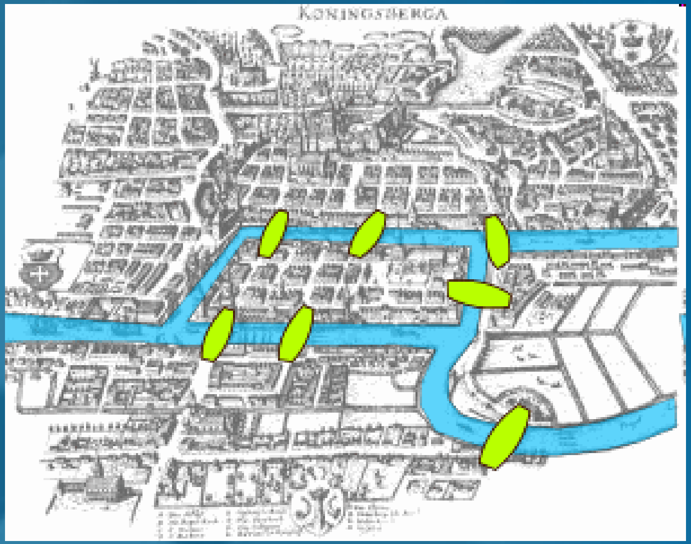
Algoritmi e Strutture Dati

Capitolo 11
Grafi e visite di grafi

Origini storiche

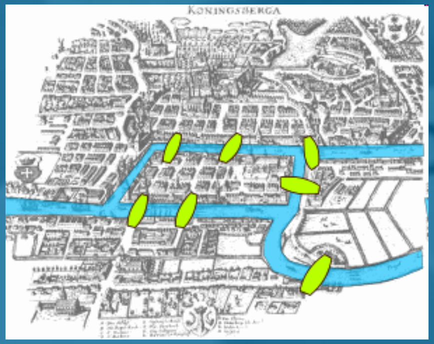
Nel 1736, il matematico svizzero Eulero [1707-1783], affrontò l'annoso problema dei 7 ponti di Königsberg (Prussia):

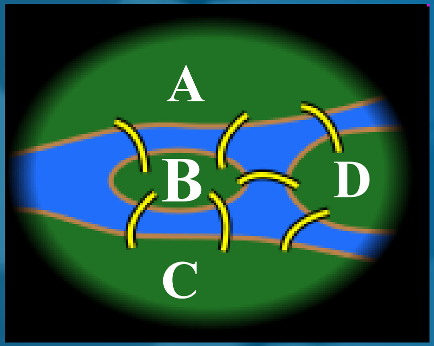


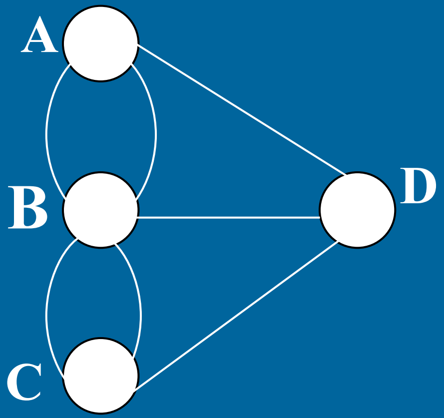
È possibile o meno fare una passeggiata che parta da un qualsiasi punto della città e percorra una ed una sola volta ciascuno dei 7 ponti?

Origini storiche (2)

Eulero affrontò il problema schematizzando topologicamente la pianta della città, epurando così l'istanza da insignificanti dettagli topografici:







…e così Königsberg venne rappresentata con un insieme di 4 punti (uno per ciascuna zona della città), opportunamente uniti da 7 linee (una per ciascun ponte)

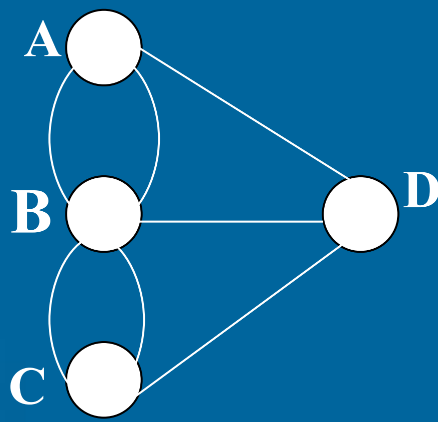
Definizione di grafo

Un grafo $G=(V,E)$ consiste in:

- un insieme $V=\{v_1,\ldots, v_n\}$ di vertici (o nodi);

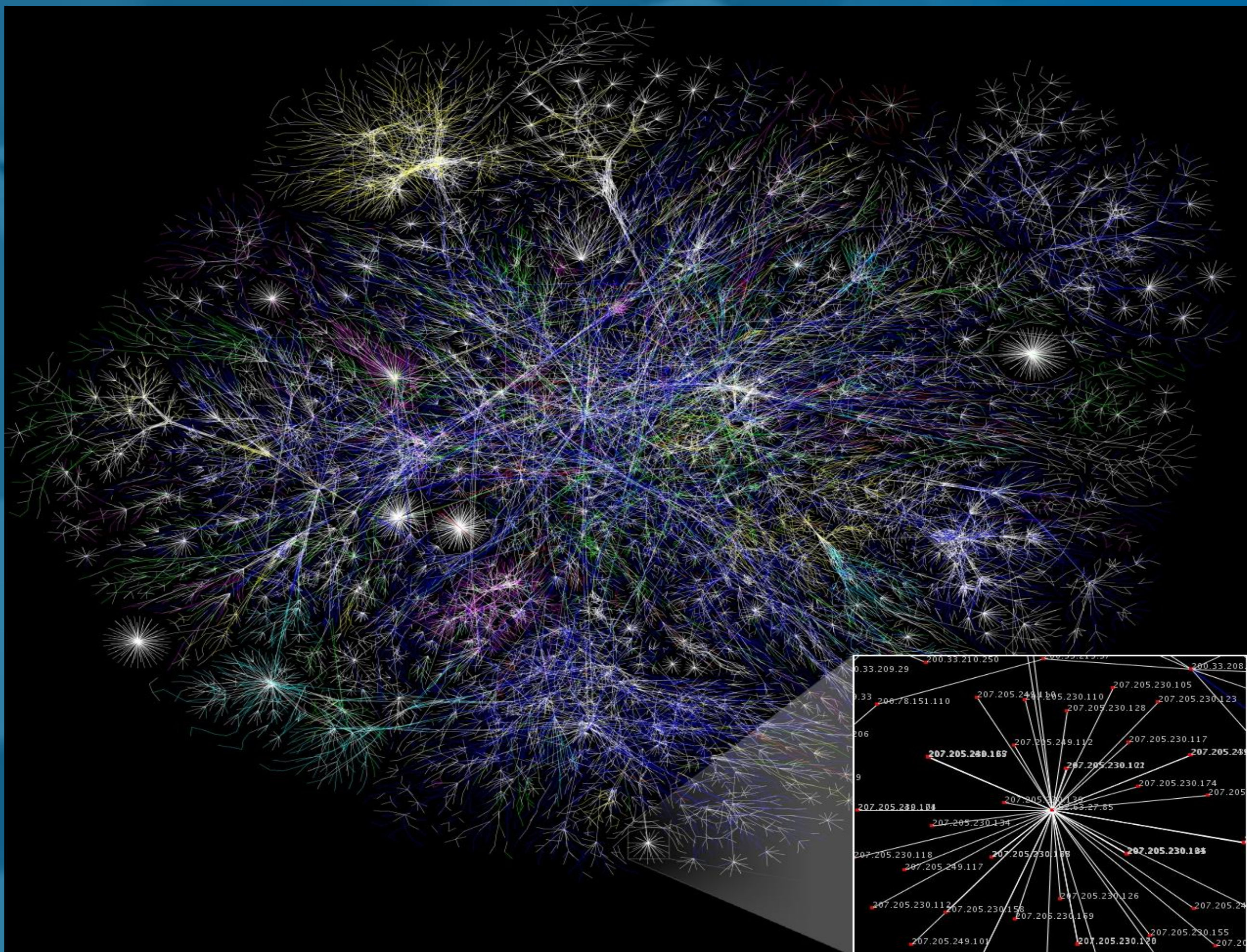
- un insieme $E=\{(v_i,v_j) \mid v_i,v_j \in V\}$ di coppie (non ordinate) di vertici, detti archi.

Esempio: Grafo di Eulero associato alla città di Königsberg: V={A,B,C,D}, E={(A,B), (A,B), (A,D), (B,C), (B,C), (B,D), (C,D)}



Nota: È più propriamente detto multigrafo, in quanto contiene archi paralleli.

Un grafo più complesso: Internet



V:= insieme dei nodi terminali e di transito connessi alla rete

E:= insieme delle coppie (x,y) tali che il nodo x ha un collegamento fisico con il nodo y

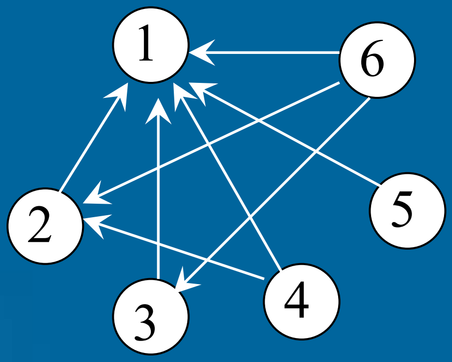
Stima # nodi ed archi di Internet: ordine di 1 miliardo

Definizione di grafo diretto

Un grafo diretto $D=(V,A)$ consiste in:

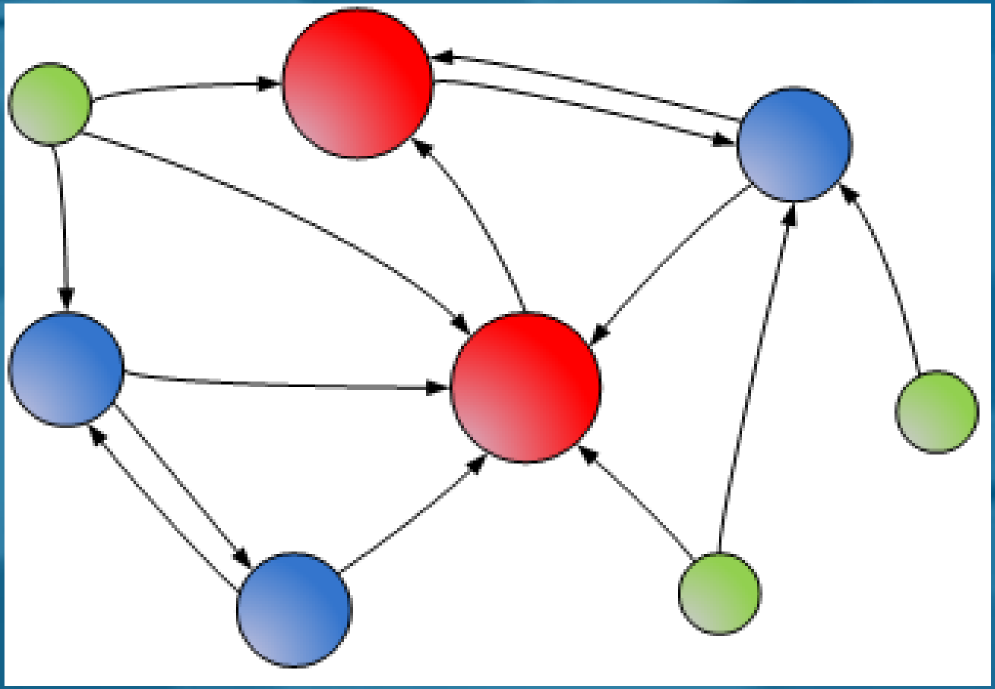
- un insieme $V=\{v_1,\ldots, v_n\}$ di vertici (o nodi);
- un insieme $A=\{(v_i,v_j) \mid v_i,v_j \in V\}$ di coppie ordinate di vertici, detti archi diretti.

Esempio: Disegnare il grafo diretto che ha come vertici i primi 6 numeri interi, e ha un arco diretto da x verso y se $x \neq y$ e x è un multiplo di y



$\Rightarrow V=\{1,\ldots,6\}, A=\{(2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1), (4,2), (6,2),(6,3)\}$

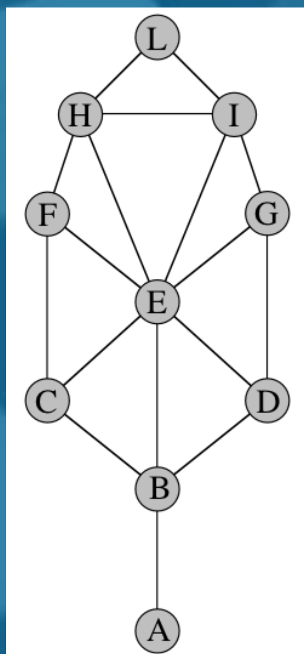
Un grafo diretto più complesso: Webgraph



V:= insieme dei siti web
A:= insieme delle coppie (x,y) tali che il sito x ha un collegamento ipertestuale al sito y (si notino l'orientamento e l'esistenza di nodi isolati)

Stima # nodi ed archi del Webgraph: circa 600 milioni di nodi e ordine di centinaia di miliardi di archi

Terminologia (1/3)



Esempio: Sia G=(V,E) un grafo (non diretto) con V={A,B,C,D,E,F,G,H,I,L}, ed E={(A,B),(B,C),(B,D),(B,E),(C,E) ,(C,F),(D,E),(D,G),(E,F),(E,G),(E,H) ,(E,I),(F,H),(G,I),(H,I) ,(H,L),(I,L)}

n = numero di vertici (nell'esempio, n=10)

m = numero di archi (nell'esempio, m=17)

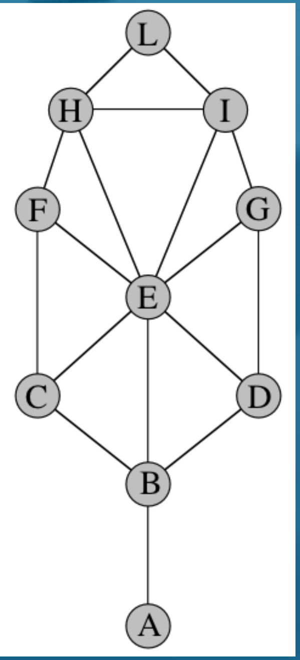
Due nodi sono detti adiacenti se sono collegati da un arco (ad es., L ed I)

(L,I) è incidente ad L e ad I (detti estremi)

I ha grado 4: $\delta(I)=4$ ⇒ $\sum_{v \in V} \delta(v)=2m$

Il grafo ha grado 7 = $\max_{v \in V}\{\delta(v)\}$

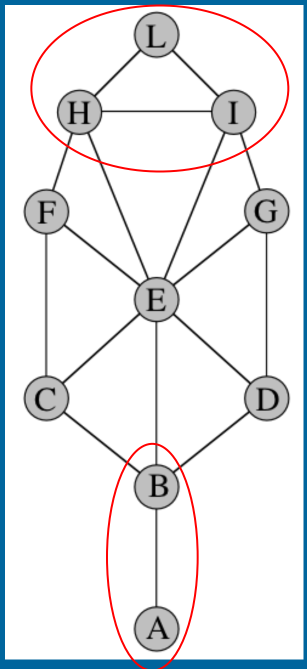
Terminologia (2/3)



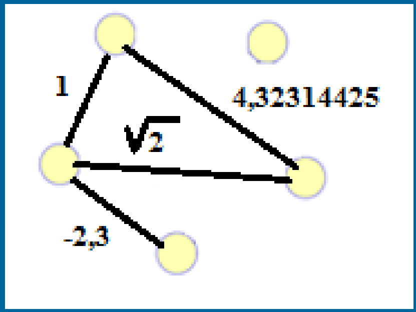
- Un cammino semplice in $G=(V,E)$ tra una coppia di nodi (x,y) è una sequenza di nodi $<v_0=x,v_1,\ldots,v_{k-1},v_k=y>$ **distinti** (cioè, senza nodi ripetuti) e **adiacenti** (cioè, $(v_i,v_{i+1})\in E$ per $i=0,\ldots,k-1$) che parte da x e arriva in y. La lunghezza del cammino è data dal numero di archi che lo compongono. Ad esempio, <L,I,E,C,B,A> è un cammino semplice di lunghezza 5 tra L ed A
- Se il grafo è diretto, il cammino deve rispettare il verso di orientamento degli archi
- La lunghezza del più corto cammino tra due vertici si dice *distanza* tra i due vertici: ad esempio, L ed I hanno distanza 1, mentre L ed A hanno distanza 4. In particolare, un nodo è a distanza 0 da se stesso
- Se esiste un cammino per ogni coppia di vertici, allora il grafo si dice connesso, altrimenti si dice disconnesso
- Un cammino da un vertice a se stesso si dice ciclo (ad esempio, <L,I,H,L> è un ciclo)

Terminologia (3/3)

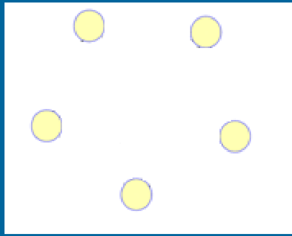
- Un grafo H=(V′,E′) è un sottografo di G=(V,E) $\Leftrightarrow$ $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.
- Dato un grafo G=(V,E), il sottografo indotto da un insieme di vertici $V' \subseteq V$ è il grafo $H[V'] = (V', E')$ ove $E' = \{(x,y) \in E$ t.c. $x,y \in V'\}$.
  - ad esempio, il sottografo indotto da L,H,I,B,A nel seguente grafo è:

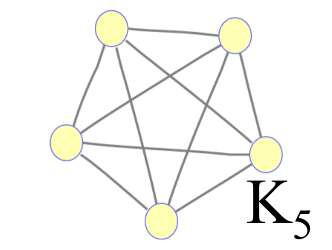


- Grafo pesato: è un grafo G=(V,E,w) in cui ad ogni arco $(x,y) \in E$ viene associato un valore w(x,y) definito dalla funzione peso w (definita su un opportuno insieme, di solito i numeri reali).



Due grafi molto particolari





- Grafo totalmente disconnesso: è un grafo $G=(V,E)$ tale che $V\neq\phi$ ed $E=\phi$.
- Grafo completo (o clique): è un grafo tale che per ogni coppia di nodi esiste un arco che li congiunge. Il grafo completo con n vertici verrà indicato con K_n $\Rightarrow |E|=C_{n,2}=n\cdot(n-1)/2$
- $\Rightarrow$ ne consegue che un grafo senza cappi (archi da un nodo a se stesso) o archi paralleli può avere un numero di archi m compreso tra 0 e $n(n-1)/2=\Theta(n^2)$. In particolare, se il grafo è connesso, allora $m\geq n-1$ (lo dimostriamo nella prossima slide). Quindi, per grafi connessi:

$$n-1\leq m\leq n(n-1)/2, \text{ cioè } m=\Omega(n) \text{ ed } m=O(n^2).$$

- Nota bene: se un grafo ha $m\geq n-1$ archi, non è detto che sia connesso.
- Domanda: Qual è il numero minimo di archi che deve avere un grafo per essere sicuramente connesso? $|E(K_{n-1})|+1$

Un grafo speciale: l'albero

Def.: Un albero è un grafo connesso ed aciclico

Teorema: Sia T=(V,E) un albero; allora |E|=|V|-1.

Dim: Infatti, per induzione su |V|:

- $|V|=1 \Rightarrow |E|=0=|V|-1$;
- Supposto vero per |V|=k-1>1, sia T un albero di k nodi; poiché T è connesso ed aciclico, ha almeno una foglia (cioè un nodo di grado 1; infatti, se tutti i nodi avessero grado almeno 2, allora il grafo conterrebbe cicli (dimostratelo!)); allora, rimuovendo tale nodo e l'arco associato, si ottiene ancora un grafo connesso ed aciclico, (cioè un albero, per definizione) di k-1 nodi, che per ipotesi induttiva ha k-2 archi; ne consegue che T ha k-1 archi.

$\Rightarrow$ l'albero è il grafo connesso con il minimo numero di archi: basta togliere un arco e diventerà disconnesso!

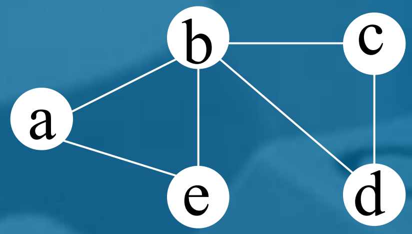
Torniamo al problema dei 7 ponti…

- Definizione: Un grafo G=(V,E) si dice percorribile o Euleriano se e solo se contiene un cammino (non semplice, in generale) che passa una ed una sola volta su ciascun arco in E.
- Teorema di Eulero: Un grafo G=(V,E) connesso è percorribile se e solo se ha tutti i nodi di grado pari, oppure se ha esattamente due nodi di grado dispari.

$\Rightarrow$ Il problema dei 7 ponti non ammette soluzione, in quanto i 4 nodi hanno tutti grado dispari, e quindi il grafo non è percorribile.

Dimostrazione del teorema di Eulero

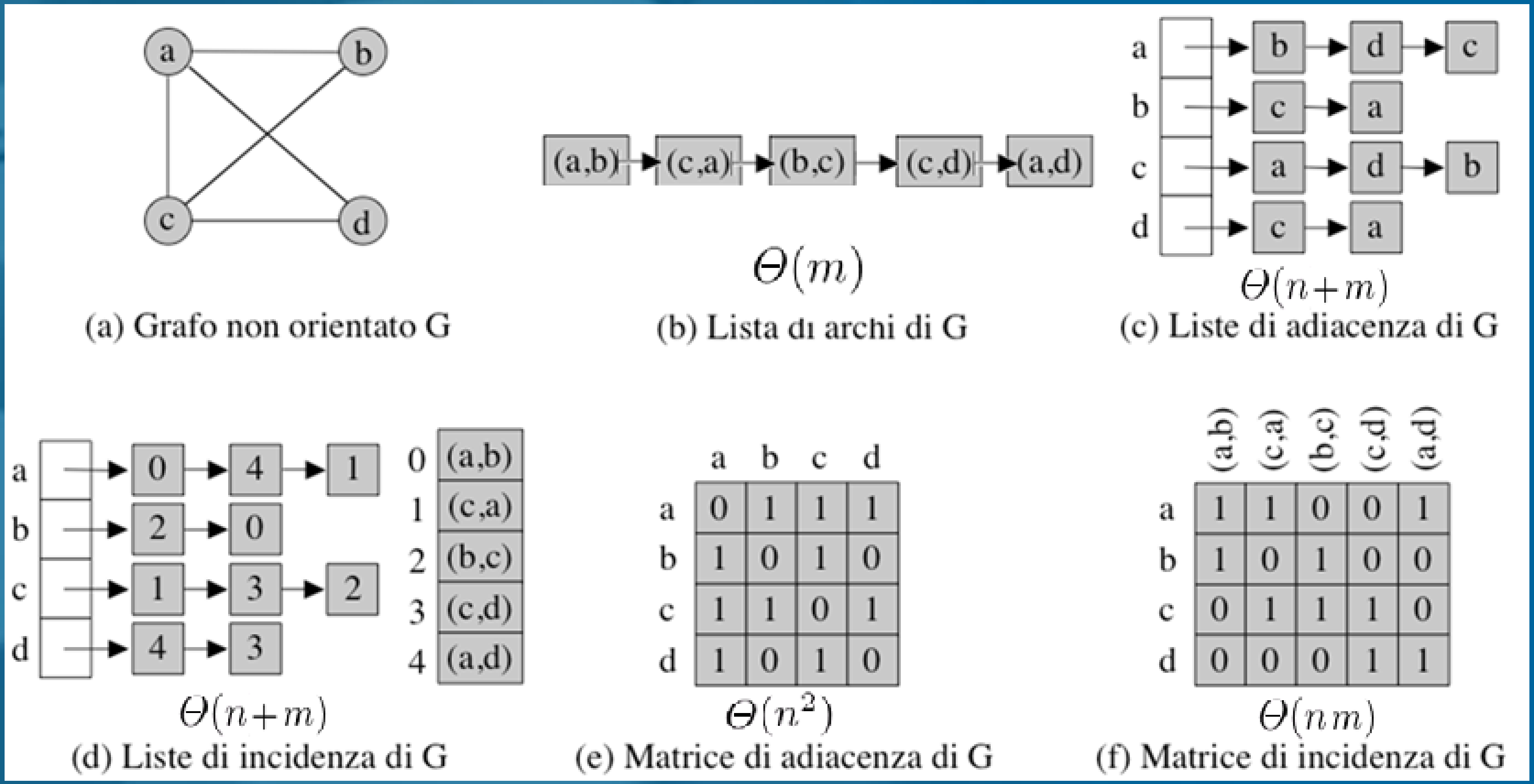
Idea della dimostrazione (costruttiva): Un grafo con tutti i nodi di grado pari può essere percorso nel seguente modo: poiché i nodi hanno tutti grado pari, per ogni arco entrante in un vertice ci sarà un corrispondente arco uscente; si parte quindi da un qualsiasi nodo, e si percorrono gli archi, eliminandoli una volta percorsi, e avendo cura di scegliere il prossimo arco da percorrere in modo tale che la sua rimozione non disconnetta il grafo (finché questo è possibile!) perché altrimenti si potrebbe non percorrere tutto il grafo: ad esempio, nel seguente grafo, se partiamo dal vertice a e arriviamo in b, dobbiamo proseguire in c o in d, non in e



Si noti che il percorso terminerà sul nodo di partenza. Invece, per percorrere un grafo avente due nodi di grado dispari e tutti gli altri di grado pari, è necessario partire da uno qualsiasi dei due nodi di grado dispari, e procedere con le stesse accortezze di cui sopra; si noti che in questo caso il percorso terminerà sull'altro nodo di grado dispari.

Strutture dati per rappresentare grafi

Grafi non diretti



(a) Grafo non orientato G

(b) Lista di archi di G

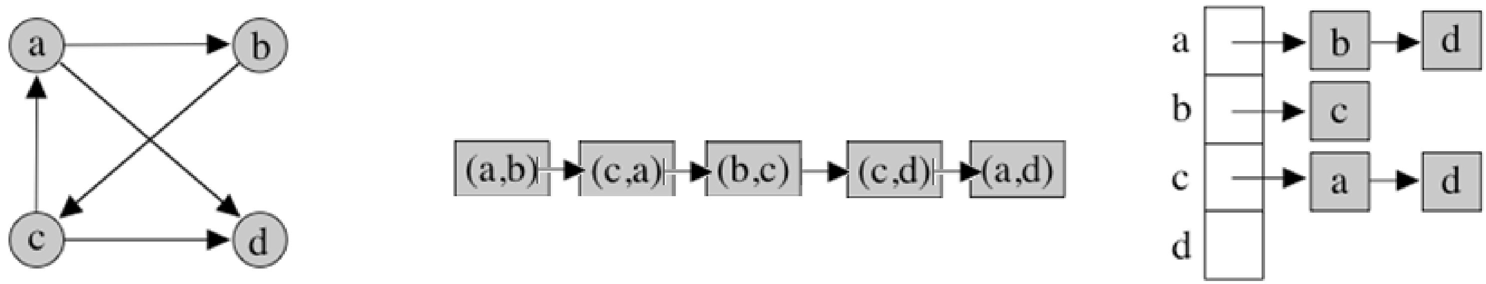
(c) Liste di adiacenza di G

(d) Liste di incidenza di G

(e) Matrice di adiacenza di G

(f) Matrice di incidenza di G

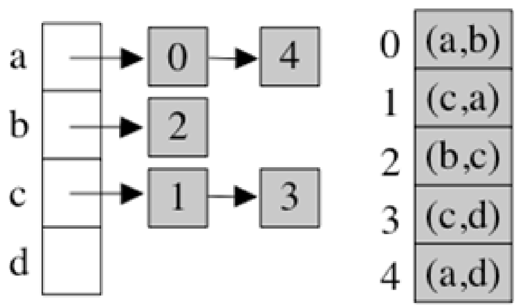
Grafi diretti



(a) Grafo orientato G

(b) Lista di archi di G

(c) Liste di adiacenza di G



(d) Liste di incidenza di G

	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	0	0	1	0
c	1	0	0	1
d	0	0	0	0

(e) Matrice di adiacenza di G

	(a,b)	(c,a)	(b,c)	(c,d)	(a,d)
a	1	-1	0	0	1
b	-1	0	1	0	0
c	0	1	-1	1	0
d	0	0	0	-1	-1

(f) Matrice di incidenza di G

Prestazioni della lista di archi (grafi non diretti)

Operazione	Tempo di esecuzione
grado(v)	$\Theta(m)$
archiIncidenti(v)	$\Theta(m)$
sonoAdiacenti(x, y)	$O(m)$
aggiungiVertice(v)	$O(1)$
aggiungiArco(x, y)	$O(1)$
rimuoviVertice(v)	$\Theta(m)$
rimuoviArco(e)	$O(1)$

Suppongo che mi venga dato un riferimento diretto all'arco da cancellare

Prestazioni delle liste di adiacenza (grafi non diretti)

Operazione	Tempo di esecuzione
grado(v)	$\Theta(\delta(v))$
archiIncidenti(v)	$\Theta(\delta(v))$
sonoAdiacenti(x,y)	$O(\max\{\delta(x),\delta(y)\})$
aggiungiVertice(v)	$O(1)$
aggiungiArco(x,y)	$O(1)$
rimuoviVertice(v)	$O(m)$
rimuoviArco$(e=(x,y))$	$O(\delta(x)+\delta(y))$

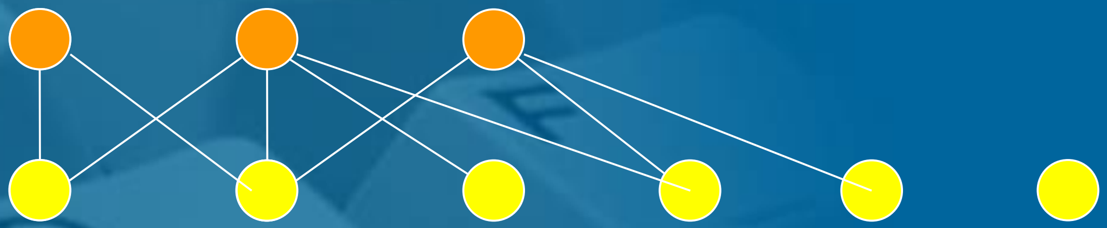
Prestazioni della matrice di adiacenza (grafi non diretti)

Operazione	Tempo di esecuzione
grado(v)	$\Theta(n)$
archiIncidenti(v)	$\Theta(n)$
sonoAdiacenti(x, y)	$O(1)$
aggiungiVertice(v)	$\Theta(n)$
aggiungiArco(x, y)	$O(1)$
rimuoviVertice(v)	$\Theta(n)$
rimuoviArco($e = (x, y)$)	$O(1)$

Suppongo di gestire le matrici dinamicamente

Approfondimento: Grafi bipartiti

- È un grafo G=(V=(A,B),E) tale che ogni arco ha come estremi un nodo in A ed un nodo in B



- Un grafo bipartito si dice completo se per ogni $x \in A$ ed $y \in B$, $(x,y) \in E$
- Con $K_{a,b}$ si indica il grafo bipartito completo di ordine (a,b), ovvero tale che $|A|=a$ e $|B|=b$
- Domanda 1: $K_{3,3}$ è planare (si può cioè disegnare senza che vi siano intersezioni di archi)? E K_4? E K_5?
- Domanda 2: gli alberi sono grafi bipartiti?