Algoritmi e Strutture Dati

Capitolo 4
Ordinamento: Quicksort (*) e metodi di ordinamento lineari

Punto della situazione

- Problema dell'ordinamento:
  - Lower bound – $\Omega(n \log n)$
  - Upper bound – $O(n \log n)$
  - Algoritmi ottimi:
    - Mergesort (non *in loco* e complessità $\Theta(n \log n)$)
    - Heapsort (*in loco* e complessità $\Theta(n \log n)$)
- Proviamo a costruire un nuovo algoritmo che ordini *in loco*, che costi mediamente $\Theta(n \log n)$, e che sia molto efficiente nella pratica (per ordinare sequenze fino a circa 10.000 elementi)

QuickSort (*)

Usa la tecnica del divide et impera:

1. Divide: scegli un elemento x della sequenza (perno) e partiziona la sequenza in elementi $\leq x$ ed elementi $>x$
2. Risolvi i due sottoproblemi ricorsivamente
3. Impera: restituisci la concatenazione delle due sottosequenze ordinate

Rispetto al MergeSort, divide complesso ed impera semplice

QuickSort non *in loco*

Quicksort(array A)

1. Scegli un elemento x in A
2. Partiziona A rispetto ad x calcolando
3. $A_1=\{y \in A : y \leq x\}$
4. $A_2=\{y \in A : y > x\}$
5. **if** ($|A_1|>1$) **then Quicksort**(A_1)
6. **if** ($|A_2|>1$) **then Quicksort**(A_2)
7. Copia la concatenazione di A_1 e A_2 in A

Nota: Si usano 2 array ausiliari, cioè l'ordinamento non è *in loco*

Partizione in loco

- Scegli un perno a caso, e scorri l'array "in parallelo" da sinistra verso destra (indice inf) e da destra verso sinistra (indice sup)
  - da sinistra verso destra, ci si ferma su un elemento **maggiore** del perno
  - da destra verso sinistra, ci si ferma su un elemento **minore o uguale** al perno
- Scambia gli elementi e riprendi la scansione
- Quando gli indici si invertono (cioè, inf=sup+1), fermati; in questo momento inf punta ad un elemento maggiore del perno, mentre sup punta ad un elemento minore-uguale al perno; allora, se il perno non è puntato da inf o sup, scambia il perno con:

  Caso 1: l'elemento puntato da sup, se il perno si trova alla sua sinistra;

  Caso 2: l'elemento puntato da inf, se il perno si trova alla sua destra.

Tempo di esecuzione di una scansione: $\Theta(n)$

QuickSort *in loco*

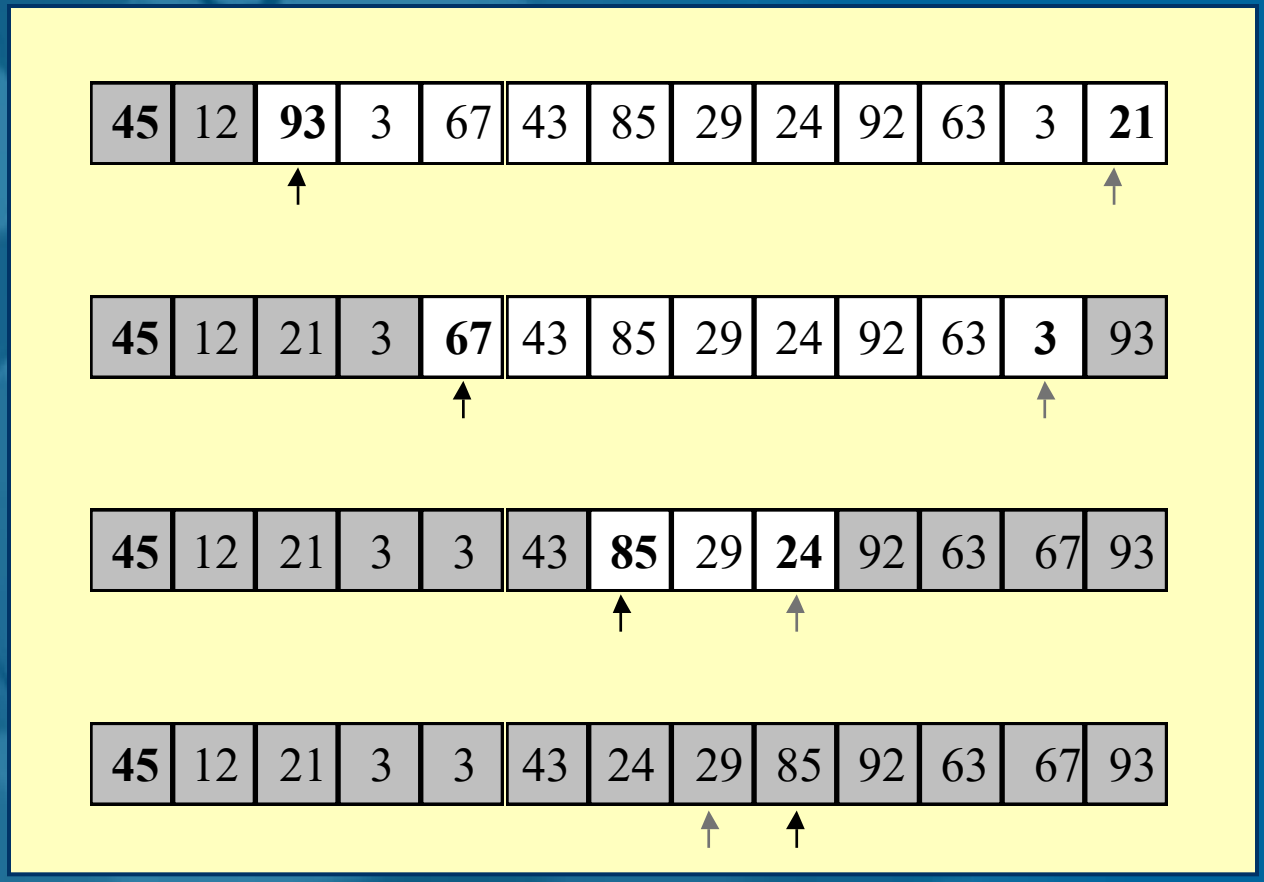
```
    procedura partition(array A, indici i e f) → indice
1.      x ← A[i]
2.      inf ← i
3.      sup ← f + 1
4.      while ( true ) do
5.          do inf ← inf + 1 while ( inf ≤ f and A[inf] ≤ x )
6.          do sup ← sup − 1 while ( A[sup] > x )
7.          if ( inf < sup ) then scambia A[inf] ed A[sup]
8.          else break
9.      scambia A[i] ed A[sup]
10.     return sup

    algoritmo quickSort(array A, indici i e f)
11.     if ( i ≥ f ) then return
12.     m ← partition(A, i, f)
13.     quickSort(A, i, m − 1)
14.     quickSort(A, m + 1, f)
```

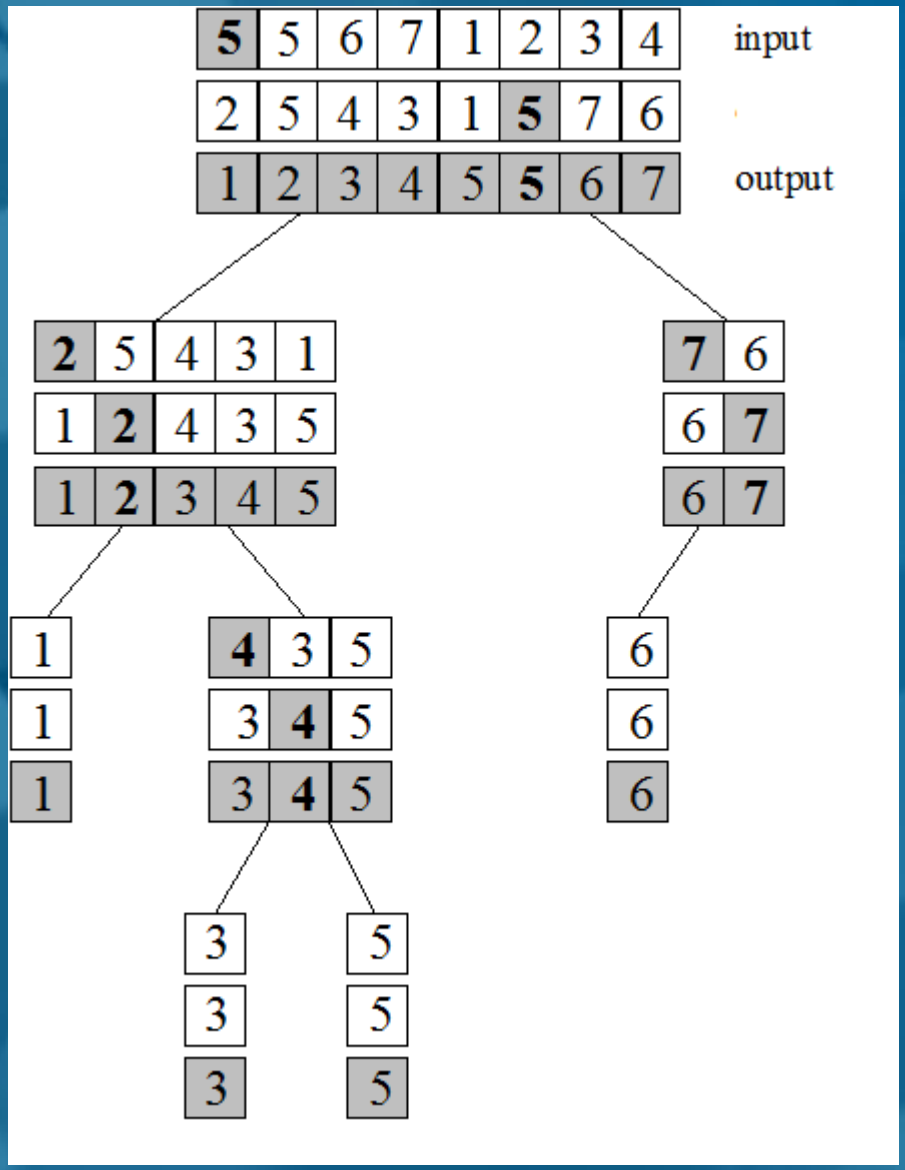
Si noti che se se inf supera il limite destro f, ciò significa che il perno è > di tutti gli elementi della sequenza, quindi il **while** di riga 6 decrementerà sup a f, mentre il **while** di riga 4 andrà in **break**, con scambio finale a riga 9 tra A[i] e A[f]

Nota: Viene lanciato chiamando `quickSort(A,1,n)`; si noti che viene scelto come perno sempre l'elemento in prima posizione nella sequenza, e quindi devo sempre scambiare il perno con A[sup] (Caso 1)

Partizione in loco: un esempio



Infine, si scambia 45 con 29, ottenendo <29,12,21,3,3,43,24,45,85,92,63,67,93 >



Esempio di esecuzione

L'albero delle chiamate ricorsive può essere sbilanciato… cosa succede nel caso peggiore?

Analisi di Quicksort

Siano a e b le dimensioni delle sottosequenze A_1 e A_2; allora, il numero di confronti C(n) (operazione dominante) è pari a:

$$C(n) = C(a) + C(b) + (n-1) \quad \text{per } n>1, \quad C(1)=0$$

Confronti eseguiti ad ogni passata bidirezionale

Analisi del caso peggiore

- Nel caso peggiore, il perno scelto ad ogni passo è il minimo o il massimo degli elementi nell'array (a=0 e b=n-1, oppure a=n-1 e b=0)

- Il numero di confronti diventa pertanto:

$$C(n)=C(n-1) + (n-1) \quad \text{per } n>1, \; C(1)=0$$

- Svolgendo per iterazione si ottiene

$$C(n) = C(n-1)+(n-1) = [C(n-2)+(n-2)]+(n-1) = \ldots$$

$$= [C(1)+1]+2+\ldots +(n-2)+(n-1) = 1+2+\ldots+(n-2)+(n-1) \Rightarrow$$

$$C(n) = \Theta(n^2) \Rightarrow T_{WORST}(n)=\Theta(n^2)$$

Analisi del caso migliore

- Nel caso migliore, il perno scelto ad ogni passo è il mediano nell'array (a=b=n/2)
- Il numero di confronti diventa pertanto:

$$C(n)=2\cdot C(n/2) + (n-1) = 2C(n/2) + \Theta(n)$$

e applicando il teorema master (caso 2)

$$C(n) = \Theta(n \log n) \Rightarrow T_{BEST}(n)=\Theta(n \log n)$$

Analisi del caso medio

- Possiamo affinare l'analisi del caso peggiore, dimostrando che $T_{AVG}(n)=\Theta(n \log n)$. Osserviamo infatti che il perno è un elemento che contiene un valore scelto uniformemente a caso nello spazio dei valori ammissibile, e quindi tale elemento ha la stessa probabilità, pari a 1/n, di occupare una qualsiasi posizione dell'array dopo il partizionamento, il numero di confronti nel caso atteso è:

$$C(n) = \sum_{a=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left[C(a)+C(n-a-1)+(n-1) \right]$$

dove a e (n-a-1) sono le dimensioni dei sottoproblemi risolti ricorsivamente

Analisi del caso medio (2)

Osserviamo che C(a) e C(n-a-1) generano esattamente gli stessi termini nella sommatoria, e quindi:

$$C(n)= \sum_{a=0}^{n-1} \frac{1}{n}\left[C(a)+C(n-a-1)+(n-1)\right] = n-1+\frac{2}{n}\sum_{a=0}^{n-1} C(a)$$

Moltiplicando entrambi i membri per n:

$$n\,C(n) = n(n-1) + 2\sum_{a=0..n-1} C(a) \qquad (1)$$

o anche, passando da n a n-1:

$$(n-1)\,C(n-1) = (n-1)(n-2) + 2\sum_{a=0..n-2} C(a) \qquad (2)$$

e sottraendo la (2) dalla (1):

$$n\,C(n) - (n-1)\,C(n-1) = 2\,C(n-1) + n(n-1) - (n-1)(n-2)$$

e svolgendo e semplificando:

$n\,C(n) = (n+1)\,C(n-1) + 2(n-1)$ cioè $n\,C(n) \leq (n+1)\,C(n-1) + 2n$

Analisi del caso medio (3)

Dividiamo ora $n\,C(n) \leq (n+1)\,C(n-1) + 2n$ per $n(n+1)$:

$C(n)/(n+1) \leq C(n-1)/n + 2/(n+1) \leq (C(n-2)/(n-1) + 2/n) + 2/(n+1)$

$\leq ((C(n-3)/(n-2) + 2/(n-1)) + 2/n) + 2/(n+1) \leq \ldots$

e proseguendo fino a che l'argomento di C diventa 1:

$$C(n)/(n+1) \leq C(1)/2 + 2 \sum_{i=1..n} 1/(i+1) = 2 \sum_{i=1..n} 1/(i+1)$$

e per n che tende all'infinito la sommatoria (serie armonica) tende a $\ln n + 0.577\ldots$, cioè:

$C(n)/(n+1) \leq 2(\ln n + 0.577) = O(\log n)$, cioè $C(n) = O(n \log n)$.

Poiché chiaramente $C(n) = \Omega(n \log n)$ in quanto il caso medio deve costare almeno come il caso migliore, ne consegue che

$$T_{AVG}(n) = \Theta(n \log n).$$

Un confronto con l'Insertion Sort

Ricordiamo che nell'IS:

- $T_{BEST}(n)=\Theta(n)$
- $T_{AVG}(n)=\Theta(n^2)$
- $T_{WORST}(n)=\Theta(n^2)$

mentre nel QS:

- $T_{BEST}(n)=\Theta(n \log n)$
- $T_{AVG}(n)=\Theta(n \log n)$
- $T_{WORST}(n)=\Theta(n^2)$

$\Rightarrow$ È interessante notare che il caso medio dell'IS costa come il suo caso peggiore, mentre il caso medio del QS costa come il suo caso migliore! Perché secondo voi?

Ordinamenti lineari

(per dati di input di tipo numero intero e con ulteriori proprietà particolari)

Un semplice esempio

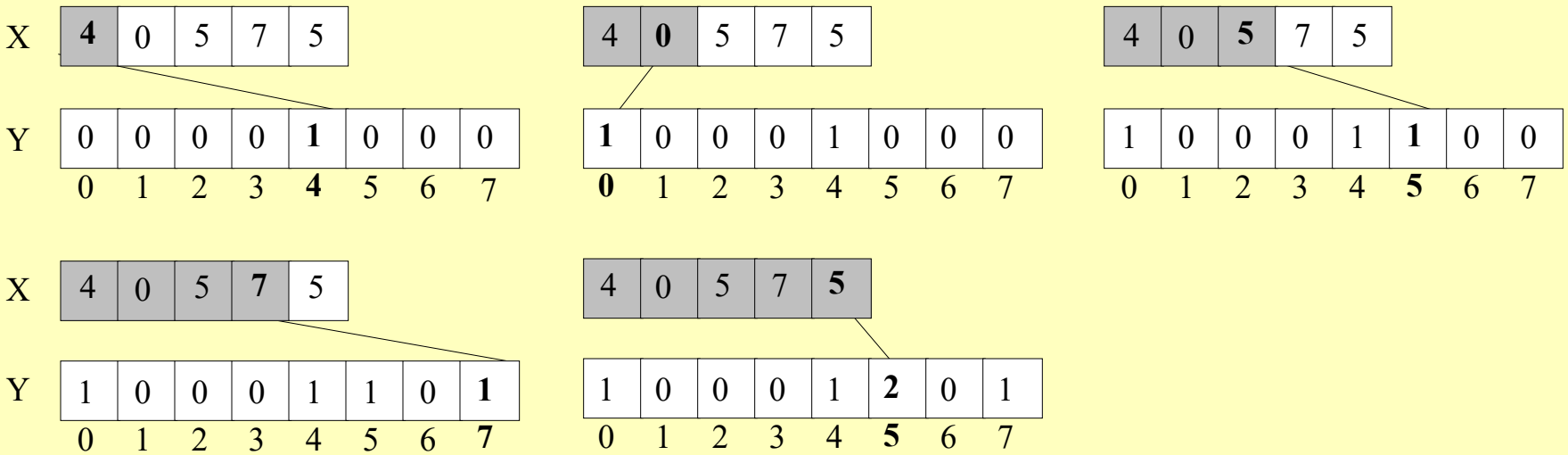
- Supponiamo che gli n elementi da ordinare siano tutti distinti e appartenenti all'intervallo [0,n-1]
- In quanto tempo possiamo ordinarli?

☺ $\Theta(n)$: utilizzo un array di appoggio di dimensione n nel quale vado a scrivere in $\Theta(n)$ i valori 0,1,2,…,n-1. Si noti che in questo modo sono anche in grado di verificare se l'input soddisfa realmente le ipotesi.

- Contraddice il lower bound? No, perché non è un algoritmo basato su confronti tra elementi!

IntegerSort: fase 1

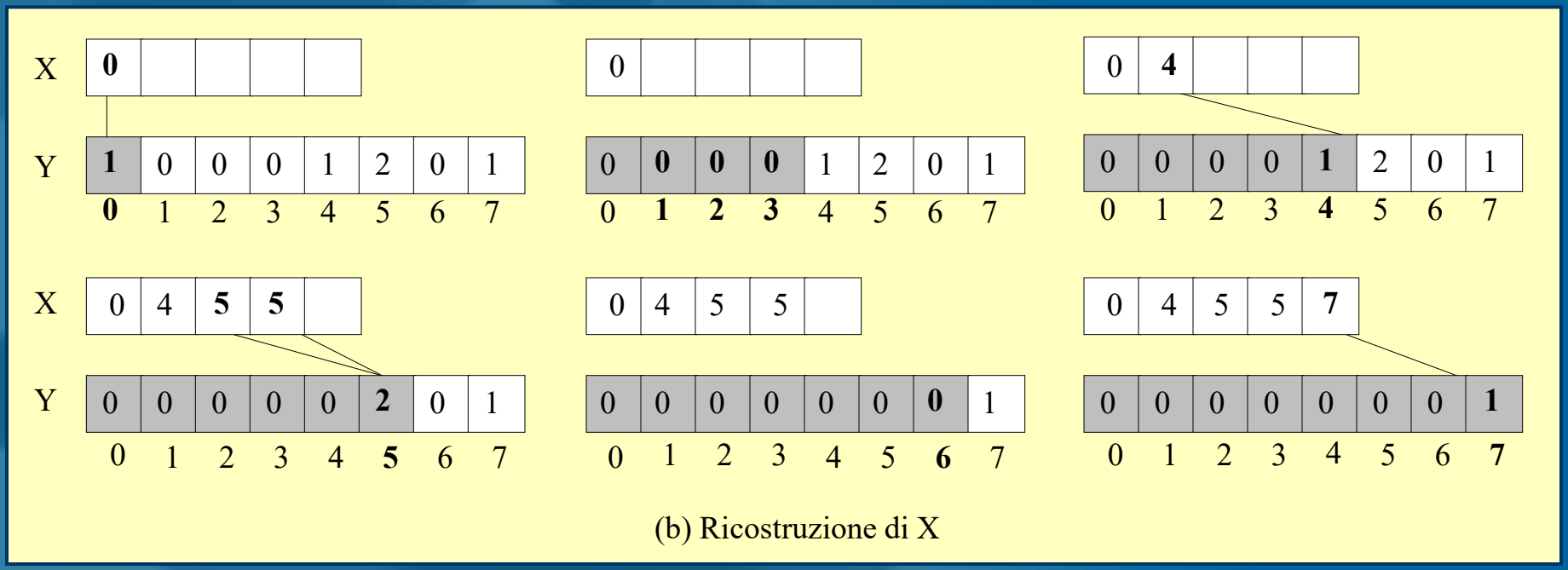
Ordina n interi con valori in [0,k=O(n)] in tempo Θ(n)
Inizialmente, scorre l'array di input X da sinistra verso destra, e mantiene un array Y di appoggio di k+1 contatori tale che Y[i] = numero di volte che il valore i compare in X (suppongo che il primo indice dell'array sia pari a 0)



(a) Calcolo di Y

IntegerSort: fase 2

Successivamente, scorre Y da sinistra verso destra e, se Y[i]=k, scrive in X il valore i per k volte



(b) Ricostruzione di X

IntegerSort: analisi

- Tempo $\Theta(k)$ per inizializzare Y a 0 (si noti che devo conoscere a priori k)
- Tempo $\Theta(n)$ per calcolare i valori dei contatori
- Tempo $\Theta(n+k)$ per ricostruire X

$\Theta(n+k)$ → Tempo lineare $\Theta(n)$ se $k=O(n)$

Spazio utilizzato: $\Theta(n+k)$, cioè $\Theta(n)$ se $k=O(n)$

BucketSort

Ordina n record con "chiavi" intere in [0,k=O(n)] in tempo $\Theta(n)$

- Basta mantenere un array Y di k liste (i bucket appunto), anziché di contatori, ed operare come per IntegerSort
- La lista Y[i] conterrà gli elementi con chiave uguale a i
- Concatena infine le liste in ordine per i=1,..,k

Tempo e spazio $\Theta(n+k)=\Theta(n)$ se k=O(n), come per IntegerSort

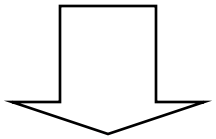
Stabilità

- Un algoritmo di ordinamento viene detto stabile se preserva l'ordine iniziale (ovvero nella sequenza di input) tra elementi aventi la stessa chiave

- Il BucketSort può essere reso stabile appendendo gli elementi di input in coda alla opportuna lista in Y, man mano che essi si presentano

Esempio

4	2	1	2	0	3	2	1	4	0	2	3	0

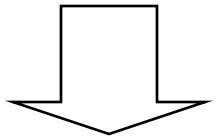


2

0 2

0 1 2 3 4

0 1 2 3 4



0	0	0	1	1	2	2	2	2	3	3	4	4

RadixSort

Ordina n interi con valori in $[0,k=O(n^c)]$, $c>1$, in tempo $\Theta(n)$

- Cosa fare se il massimo valore $k=\omega(n)$, ad esempio se $k = \Theta(n^c)$?
- Rappresentiamo gli elementi in base b (che come vedremo deve essere scelta **opportunamente**), ed eseguiamo una serie di BucketSort con chiavi in $[0,b-1]$
- Partiamo dalla cifra meno significativa verso quella più significativa

Per b=10

Correttezza (per induzione)

- Dimostriamo per induzione che dopo la t-esima passata di BucketSort, i numeri sono correttamente ordinati rispetto alle t cifre meno significative
- Passo base: per t=1, è banalmente vero;
- Alla t-esima passata:
  - se x e y hanno una diversa t-esima cifra meno significativa, la t-esima passata di BucketSort li ordina rispetto a tale cifra, e quindi l'enunciato è vero;
  - altrimenti, se x e y hanno la stessa t-esima cifra meno significativa, la proprietà di stabilità del BucketSort li mantiene nell'ordine stabilito durante la passata precedente, e quindi l'enunciato è vero perché per ipotesi induttiva alla fine della (t-1)-esima passata x e y sono ordinati correttamente rispetto alle t-1 cifre meno significative.

Tempo di esecuzione (e spazio utilizzato)

- $\Theta(\log_b k)$ passate di BucketSort
- Ciascuna passata richiede tempo (e spazio) $\Theta(n+b)$, e quindi $T(n)=\Theta((n+b)\log_b k)$

Scegliendo $b = \Theta(n)$, si ha $\log_b k = \dfrac{\log k}{\log b} = \Theta\left(\dfrac{\log k}{\log n}\right)$

e quindi $T(n)=\Theta\left(n\dfrac{\log k}{\log n}\right)$ ⇒ se $k=O(n^c)$, c costante

⇒ $T(n)=\Theta\left(n\dfrac{\log n^c}{\log n}\right) = \Theta(nc)= \Theta(n)$

- E il cambiamento di base? E' facile vedere che costa $\Theta(n \log_b n^c)=\Theta(n \log_n n^c)=\Theta(nc)=\Theta(n)$

Riepilogo Ordinamento

- Nuove tecniche:
  - Incrementale (SelectionSort, InsertionSort)
  - Divide et impera (MergeSort, QuickSort)
  - Strutture dati efficienti (HeapSort)
- Alberi di decisione per la dimostrazione di delimitazioni inferiori
- Proprietà particolari dei dati in ingresso possono aiutare a progettare algoritmi più efficienti: algoritmi lineari