Algoritmi e Strutture Dati

Capitolo 6

Il problema del dizionario

Il tipo dato `Dizionario`

tipo `Dizionario`:
dati: un insieme S di n elementi di tipo $elem$ a cui sono associate chiavi distinte di tipo $chiave$ prese da un universo totalmente ordinato.

operazioni:

`insert`$(elem\ e, chiave\ k)$
aggiunge a S una nuova coppia (e, k)

`delete`$(elem\ e)$
cancella da S l'elemento e

Suppongo sempre che mi venga dato un riferimento diretto all'elemento da cancellare

`search`$(chiave\ k) \rightarrow elem$
se la chiave k è presente in S restituisce un elemento e ad essa associato, e `null` altrimenti

Applicazioni: gestione archivi di dati

Obiettivo

Fornire un'implementazione di un dizionario di n elementi che consenta di fare tutte le operazioni descritte in tempo O(log n).

Quattro implementazioni elementari

1. Array non ordinato
2. Array ordinato
3. Lista non ordinata
4. Lista ordinata

NOTA BENE: Come per le code di priorità, si noti che il dizionario è un tipo di dati dinamico (cioè di dimensione variabile), in quanto soggetta ad inserimenti e cancellazioni. L'uso degli array va quindi inteso pensando alla loro versione dinamica, che implica riallocazioni/deallocazioni di memoria che raddoppiano/dimezzano lo spazio utilizzato. Con tale accorgimento, i costi di riallocazione/deallocazione sono assorbiti (asintoticamente) dai costi per le insert e le delete

Array non ordinato

Tengo traccia in una variabile di appoggio del numero n di elementi effettivamente presenti nel dizionario (dimensione logica dell'array), e gestisco la dimensione fisica dell'array mediante allocazione dinamica

- Insert: O(1) (inserisco in fondo all'array)
- Delete: O(1) (poiché mi viene fornito il riferimento diretto all'elemento da cancellare, lo posso cancellare in O(1) sovracopiando l'ultimo elemento)
- Search: O(n) (devo scorrere l'array); nel caso migliore costa O(1), ovviamente

Array ordinato

Gestione dinamica come sopra; l'array viene inoltre tenuto ordinato in ordine decrescente

- Insert: O(n) (trovo in O(n) mediante scorrimento da destra verso sinistra la giusta posizione, e poi faccio O(n) spostamenti verso destra); nel caso migliore costa O(1), grazie all'accorgimento della scansione da destra verso sinistra, come facevamo in `InsertionSort2`;
- Delete: O(n) (devo fare O(n) spostamenti verso sinistra); nel caso migliore costa O(1), ovviamente
- Search: O(log n) (ricerca binaria); nel caso migliore costa O(1), ovviamente

Lista non ordinata

La considero bidirezionale, e mantengo un puntatore alla testa ed uno alla coda

- Insert: O(1) (inserisco in coda o in testa)
- Delete: O(1) (poiché mi viene fornito il riferimento diretto all'elemento da cancellare, lo posso cancellare in O(1) agendo sui puntatori)
- Search: O(n) (devo scorrere la lista); nel caso migliore costa O(1), ovviamente

Lista ordinata

La considero bidirezionale e ordinata in ordine crescente o decrescente indifferentemente

- Insert: O(n) (devo prima scorrere la lista in O(n) per trovare la giusta posizione, poi inserisco in O(1) agendo sui puntatori); nel caso migliore costa O(1), ovviamente
- Delete: O(1) (poiché mi viene fornito il riferimento diretto all'elemento da cancellare, lo posso cancellare in O(1) agendo sui puntatori)
- Search: O(n) (devo scorrere la lista); nel caso migliore costa O(1), ovviamente

Implementazioni elementari

	Insert	Delete	Search
Array non ord.	O(1)	O(1)	O(n)
Array ordinato	O(n)	O(n)	O(log n)
Lista non ordinata	O(1)	O(1)	O(n)
Lista ordinata	O(n)	O(1)	O(n)

☹ Ognuno dei 4 metodi elementari ha almeno un'operazione che costa O(n). Voglio fare meglio…

Lower bound $\Omega(\log n)$ per la ricerca

- Ricordiamo che per il problema della ricerca di un elemento in un insieme non ordinato si applica **il lower bound banale di** $\Omega(n)$. Tuttavia, ad esempio, nel caso di insiemi ordinati la ricerca binaria costa $O(\log n)$. Possiamo migliorarla?
- Consideriamo l'albero di decisione di un qualsiasi algoritmo che risolve il problema della ricerca in un insieme di n elementi tramite confronti
- L'albero deve contenere almeno $n+1$ foglie (ogni foglia specifica una tra le n posizioni dove si può trovare l'elemento, più la foglia "non trovato")
- Un albero binario con k foglie in cui ogni nodo interno ha al più due figli, ha altezza

$$h(k) \geq \log k$$ (vedi lower bound sull'ordinamento)

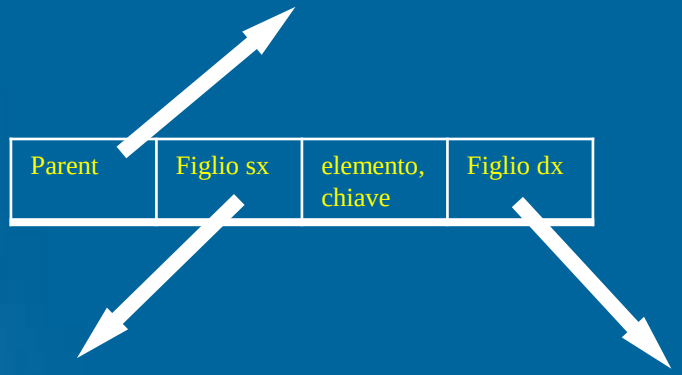
⇒ L'altezza $h(n+1)$ dell'albero di decisione è $\Omega(\log n)$

☺ La ricerca binaria quindi è **ottimale e non può essere ulteriormente migliorata**

⇒ Proviamo a definire una struttura a puntatori su cui applicare una qualche forma di ricerca binaria!

Alberi Binari di Ricerca
(ABR, o BST = Binary Search Tree)

Definizione di ABR

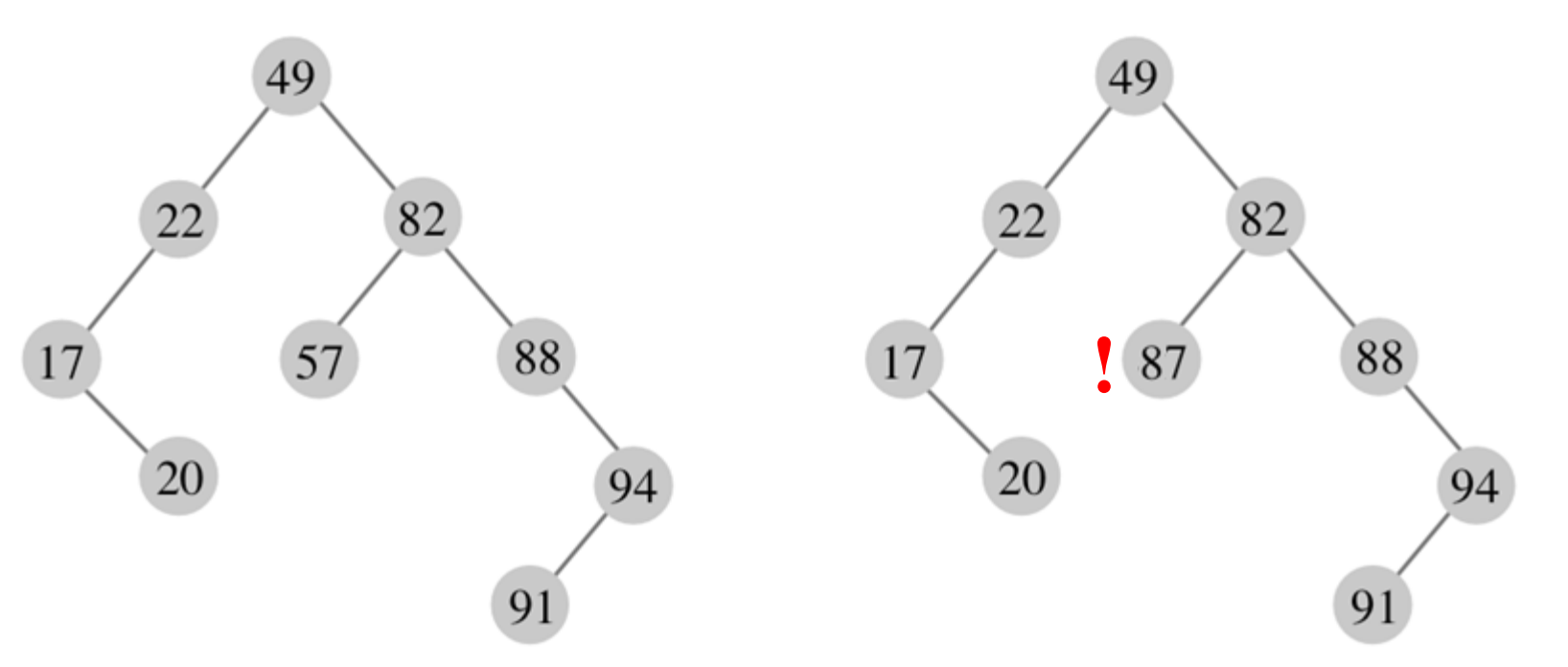


Implementazione del dizionario mediante un **albero binario** in cui ogni nodo v contiene una coppia **(elem(v),chiave(v))** del dizionario, nonché un puntatore al padre **parent(v)**, un puntatore al figlio sinistro **sin(v)** e un puntatore al figlio destro **des(v),** e soddisfa le seguenti proprietà:

- le chiavi nel sottoalbero sinistro di v sono < chiave(v)
- le chiavi nel sottoalbero destro di v sono > chiave(v)

$\Rightarrow$ Vedremo che tali proprietà inducono un ordinamento totale sulle chiavi del dizionario!

Esempi



Albero binario di ricerca

Albero binario non di ricerca

Visita simmetrica di un ABR

- Visita in ordine simmetrico – dato un nodo v, elenco prima il sotto-albero sinistro di v (in ordine simmetrico), poi il nodo v, poi il sotto-albero destro di v (in ordine simmetrico)

```
algoritmo Inorder-tree-walk(node v)
if (v ≠ null)
    then Inorder-tree-walk(sin(v))
         stampa chiave(v)
         Inorder-tree-walk(des(v))
```

- Inorder-tree-walk(radice dell'ABR) visita tutti i nodi dell'ABR
- Analisi complessità: la complessità della procedura considerata è $T(n) = \Theta(n)$. Infatti:

$$T(n) = T(n') + T(n'') + O(1) \qquad \text{con } n'+n''=n-1$$

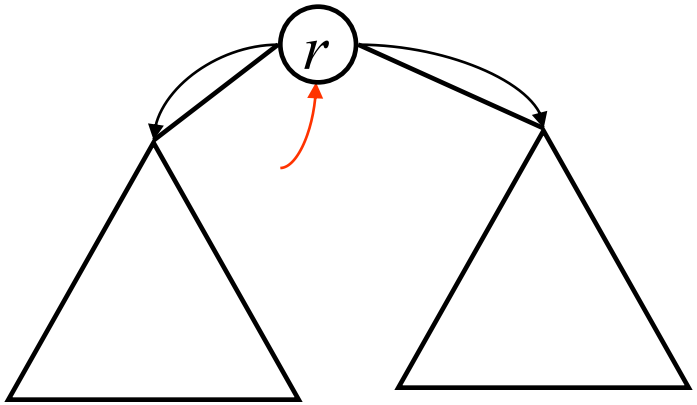
Proprietà della visita simmetrica di un ABR

Inorder-tree-walk(radice dell'ABR) visita i nodi dell'ABR in ordine crescente rispetto alla chiave!

Verifica: Indichiamo con h l'altezza dell'albero. Per induzione sull'altezza dell'ABR:

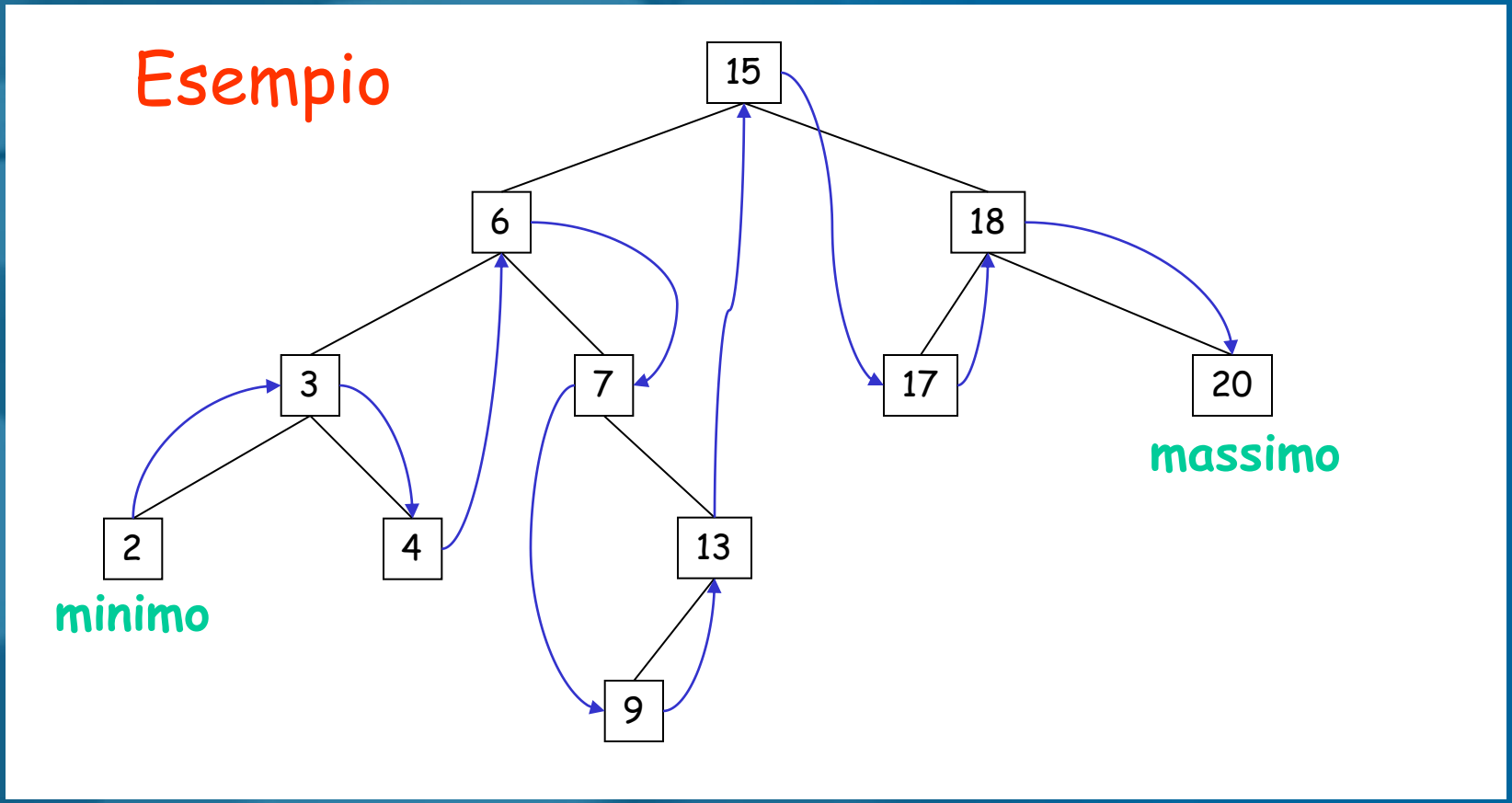
Base (h=0): banale (l'ABR consiste di un unico nodo);

Passo induttivo (h generico): ipotizzo che la procedura sia corretta per h-1



Albero di altezza ≤ h-1. Tutti i suoi elementi sono minori della radice

Albero di altezza ≤ h-1. Tutti i suoi elementi sono maggiori della radice

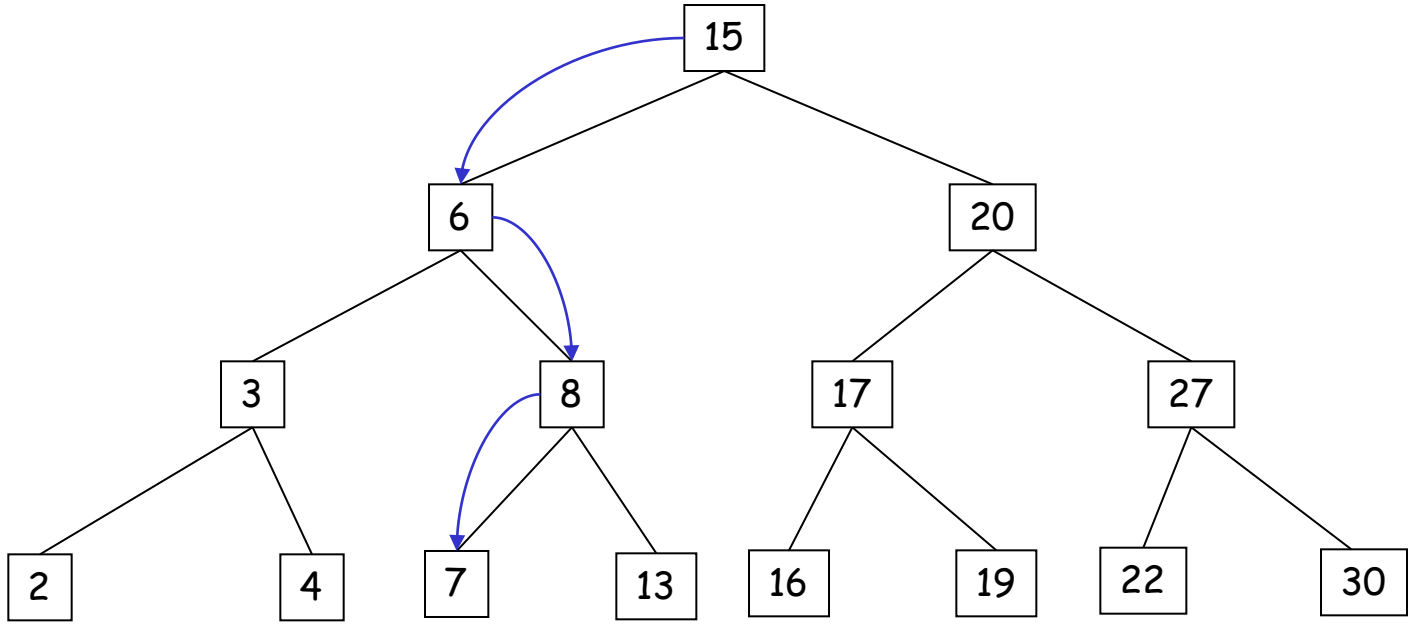


search(chiave k) → elem

Analizziamo ora i costi di search, insert e delete su un ABR. Iniziamo dall'operazione di search. Per la proprietà di ordinamento totale appena mostrata, similmente alla ricerca binaria si traccia un cammino nell'albero partendo dalla radice: su ogni nodo, se la chiave cercata è diversa da quella del nodo, si decide se proseguire la ricerca nel sottoalbero sinistro o destro, a seconda se la chiave cercata è minore o maggiore della chiave del nodo corrente

```
algoritmo search(chiave k) → elem
1.    v ← radice di T
2.    while ( v ≠ null ) do
3.        if ( k = chiave(v) ) then return elem(v)
4.        else if ( k < chiave(v) ) then v ← sin(v)
5.        else v ← des(v)
6.    return null
```

search(7)



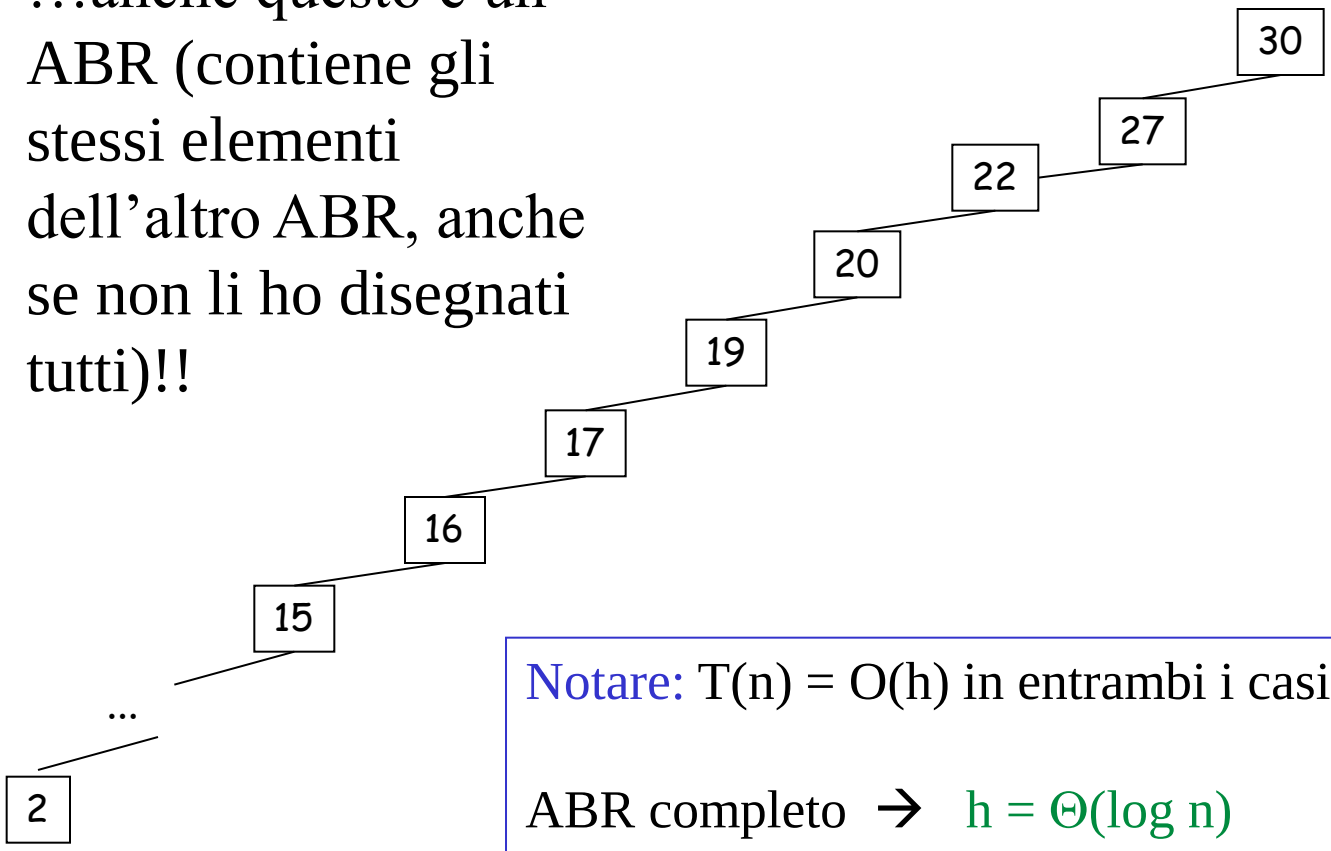
Confronto con la ricerca binaria

- La complessità della procedura di ricerca considerata è $T(n) = O(h)$, ove h è l'altezza dell'ABR. Si noti che nel caso migliore, potrebbe costare $O(1)$
- Nell'esempio precedente, l'ABR era completo, e quindi $h=\Theta(\log n)$
- Per le proprietà dell'ABR, quando esso è completo, per ogni nodo v la chiave associata è l'elemento mediano nell'insieme ordinato delle chiavi associate ai nodi costituiti dal sottoalbero sinistro di v, da v, e dal sottoalbero destro di v

⇨ Ad ogni discesa di livello, dimezzo lo spazio di ricerca, in modo analogo a quanto avveniva per l'array ordinato!!

… ma un ABR non sempre è completo…

…anche questo è un ABR (contiene gli stessi elementi dell'altro ABR, anche se non li ho disegnati tutti)!!



Notare: T(n) = O(h) in entrambi i casi, però:

ABR completo → h = Θ(log n)
ABR "linearizzato" → h = Θ(n)

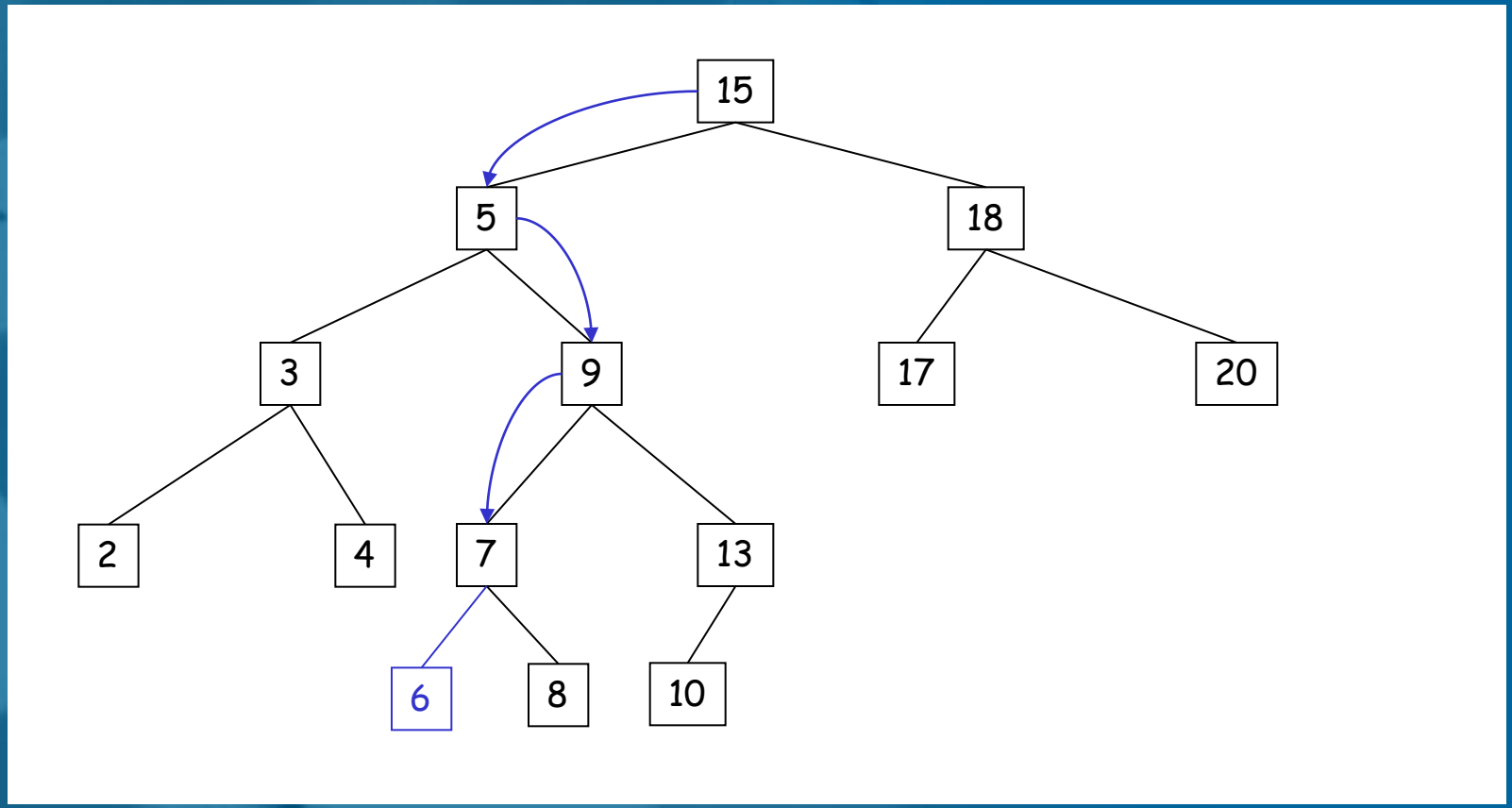
insert(elem e, chiave k)

La insert viene eseguita simulando una search, in modo da inserire il nuovo elemento proprio nella giusta posizione dell'ABR:

1. Cerca la chiave k nell'albero (che per l'ipotesi di univocità sulle chiavi non comparirà nell'ABR), identificando così il nodo v che diventerà padre del nodo che conterrà il nuovo elemento; tale nodo v deve essere un nodo dal quale la ricerca di k non può proseguire, e quindi v non ha sottoalbero sinistro e/o destro
2. Crea un nuovo nodo u con elem=e e chiave=k
3. Appendi u come figlio sinistro/destro di v in modo che sia mantenuta la proprietà di ordinamento totale

$\Rightarrow$ La complessità della procedura considerata è $T(n) = O(h)$, ove h è l'altezza dell'ABR

insert(e,6)



Se seguo questo schema l'elemento *e* viene posizionato nella posizione giusta. Infatti, per costruzione, ogni antenato di *e* si ritrova *e* nel giusto sottoalbero.

Interrogazioni ausiliarie su un ABR

Per implementare la delete, faremo invece uso delle seguenti operazioni ausiliare sull'ABR:

- `max`(nodo u) – dato un nodo u di un ABR, restituisce il nodo del sottoalbero dell'ABR radicato in u avente chiave più grande (si noti che potrebbe essere u stesso, se u non ha un sottoalbero destro)
- `min`(nodo u) – dato un nodo u di un ABR, restituisce il nodo del sottoalbero dell'ABR radicato in u avente chiave più piccola (si noti che potrebbe essere u stesso, se u non ha un sottoalbero sinistro)
- `predecessor`(nodo u) – dato un nodo u di un ABR, restituisce il nodo dell'ABR con chiave immediatamente più piccola di quella associata ad u (o NULL se u contiene l'elemento minimo dell'ABR).
- `successor`(nodo u) – dato un nodo u di un ABR, restituisce il nodo dell'ABR con chiave immediatamente più grande di quella associata ad u (o NULL se u contiene l'elemento massimo dell'ABR).

Ricerca del massimo/minimo

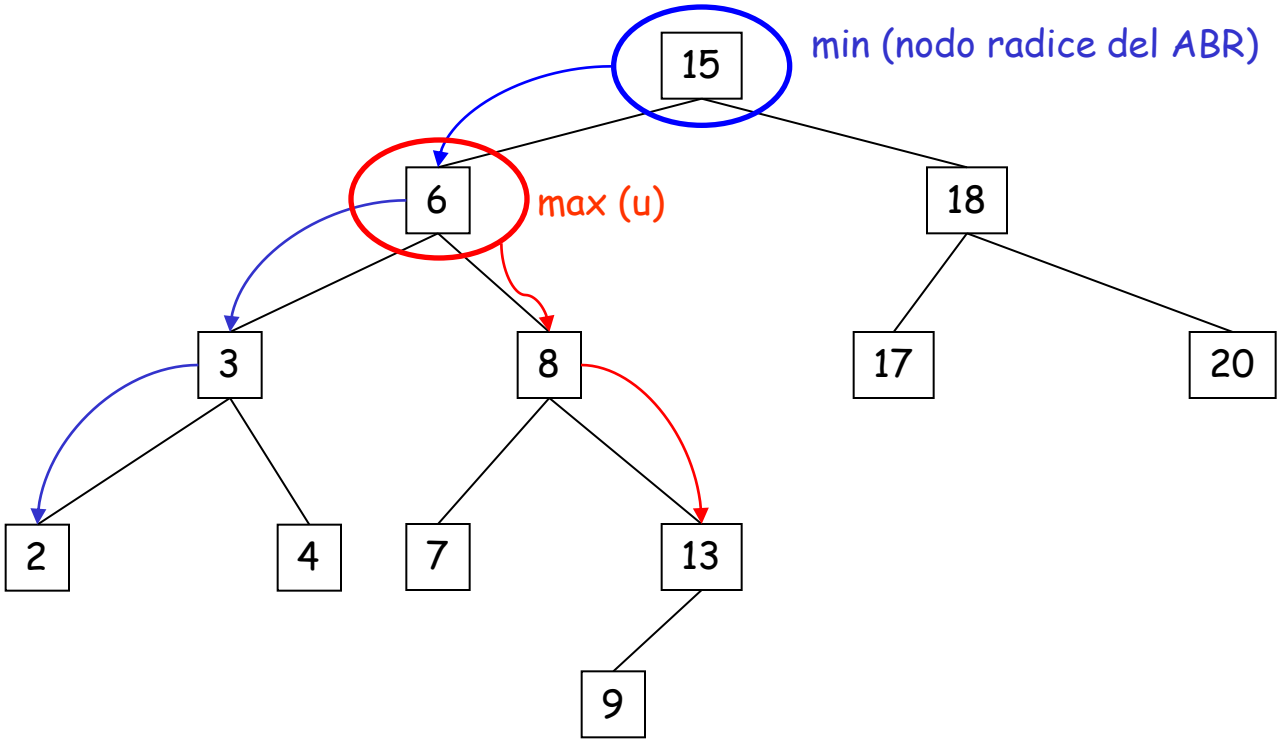
```
algoritmo max(nodo u) → nodo
1.    v ← u
2.    while ( des(v) ≠ null ) do
3.        v ← des(v)
4.    return v
```

- La procedura `min`(nodo *u*) si definisce in maniera del tutto analoga cambiando "destro" con "sinistro"

⇒ La complessità della procedura considerata è T(n) = O(h(u)), ove n è il numero di nodi dell'ABR e h(u) è l'altezza del sottoalbero radicato in u, e quindi h(u) = O(h) (h è l'altezza dell'ABR)

- Se l'argomento *nodo u* coincide con la radice dell'albero, allora `min` e `max` restituiscono il nodo con chiave minima e massima dell'intero dizionario, rispettivamente

Esempio di esecuzione



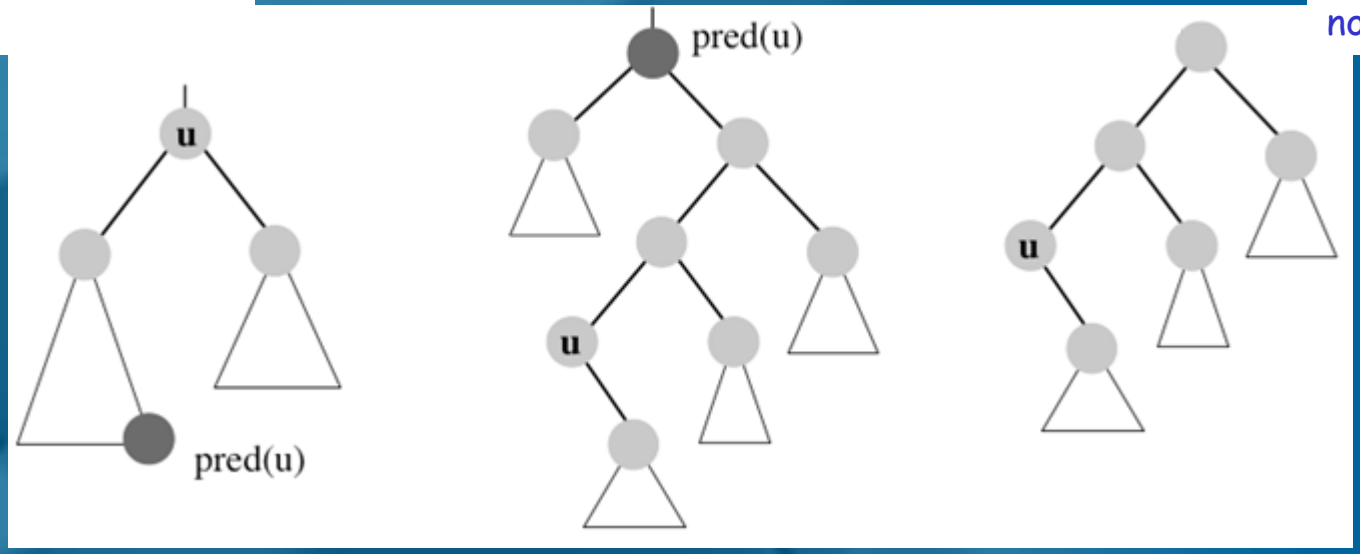
Ricerca del predecessore

Caso 2: **u** non ha un sottoalbero sinistro: Antenato più prossimo di **u** il cui sottoalbero **destro** contiene **u** (si noti infatti che **u** è il **minimo** tra gli elementi più grandi di **pred(u)**, e quindi **u** è il successore di **pred(u)**, ovvero **pred(u)** è il predecessore di **u**)

Complessità: O(h)

Caso 1: **u** ha un sottoalbero sinistro: **max** del sottoalbero **sinistro**

Caso 3: **u** è il minimo dell'albero, e quindi non ha predecessore



Ricerca del predecessore

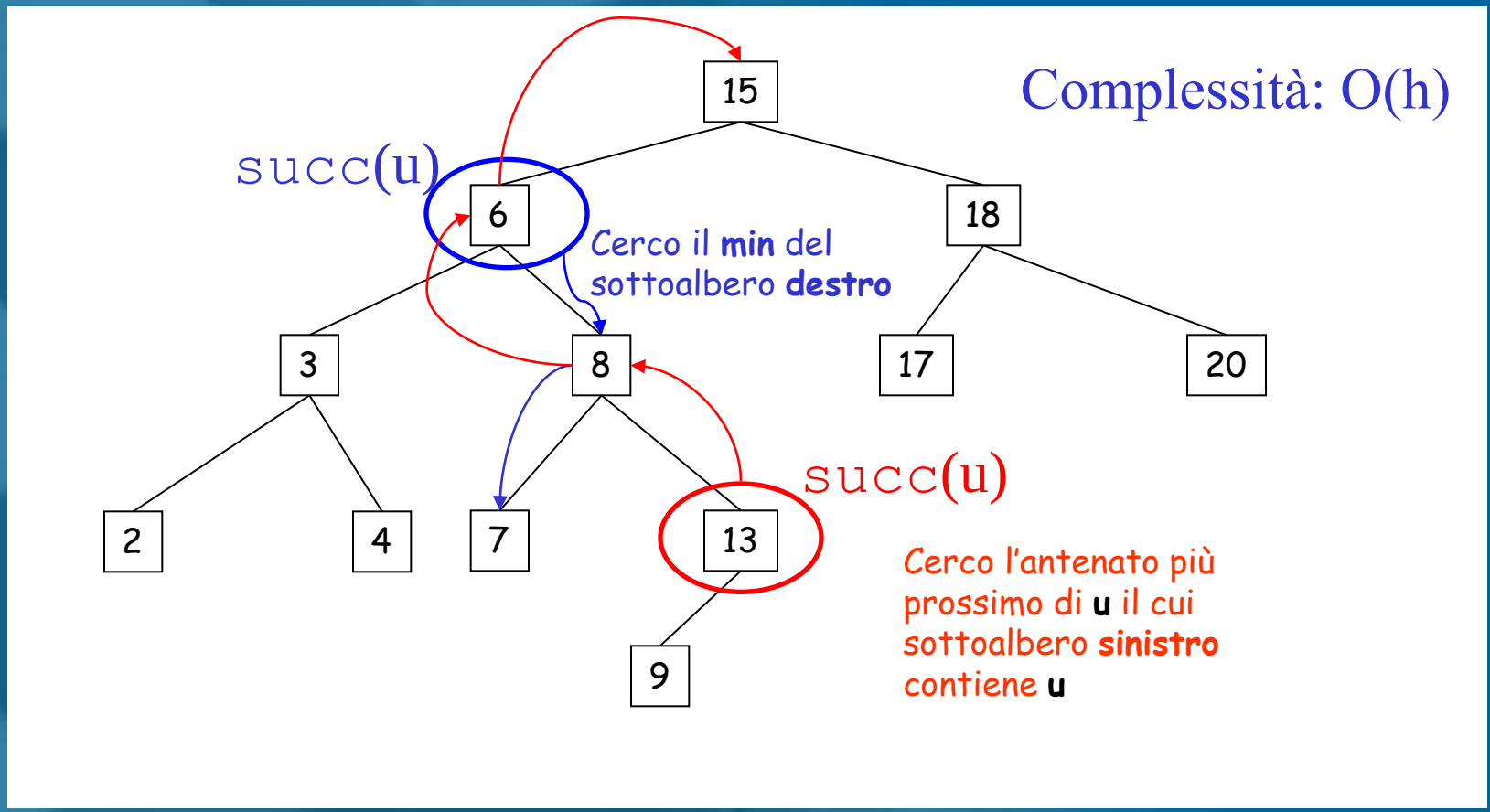
algoritmo `pred`$(nodo\ u) \rightarrow nodo$

1. **if** (u ha figlio sinistro $sin(u)$) **then**
2. **return** `max`$(sin(u))$
3. **while** ($parent(u) \neq null$ e u è figlio sinistro di suo padre) **do**
4. $u \leftarrow parent(u)$
5. **return** $parent(u)$

Complessità: O(h)

Ricerca del successore

La ricerca del **successore** di un nodo è simmetrica: cambio "sinistro" con "destro" e "max" con "min"



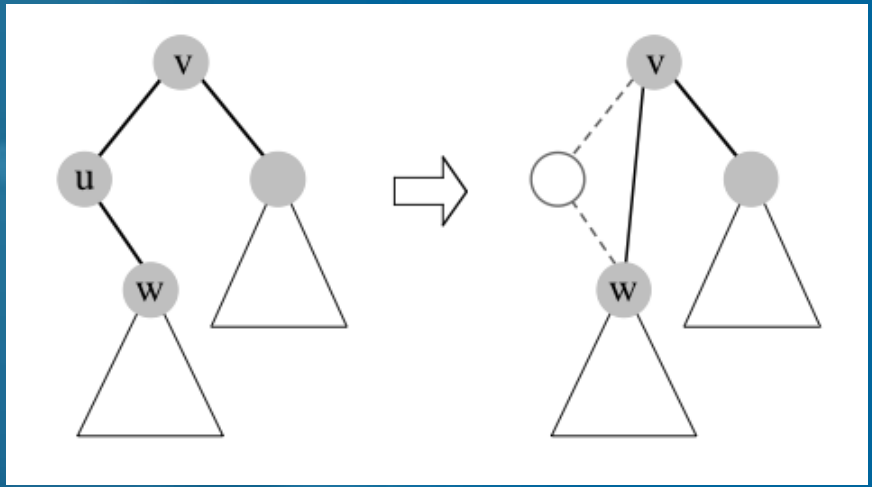
delete(elem e)

Siamo pronti per trattare l'operazione di cancellazione. Sia u il nodo contenente l'elemento e da cancellare; ci sono 3 possibilità:

1) u è una foglia: rimuovila

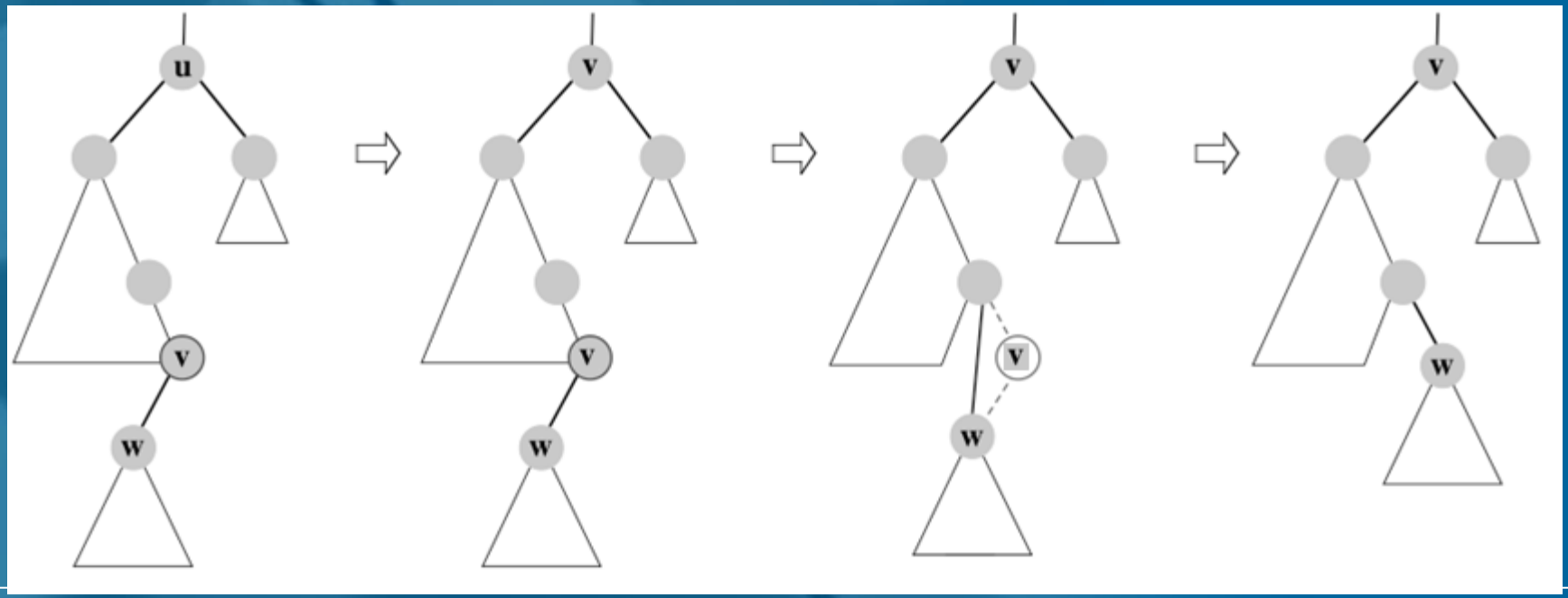
2) u ha un solo figlio:

aggiralo



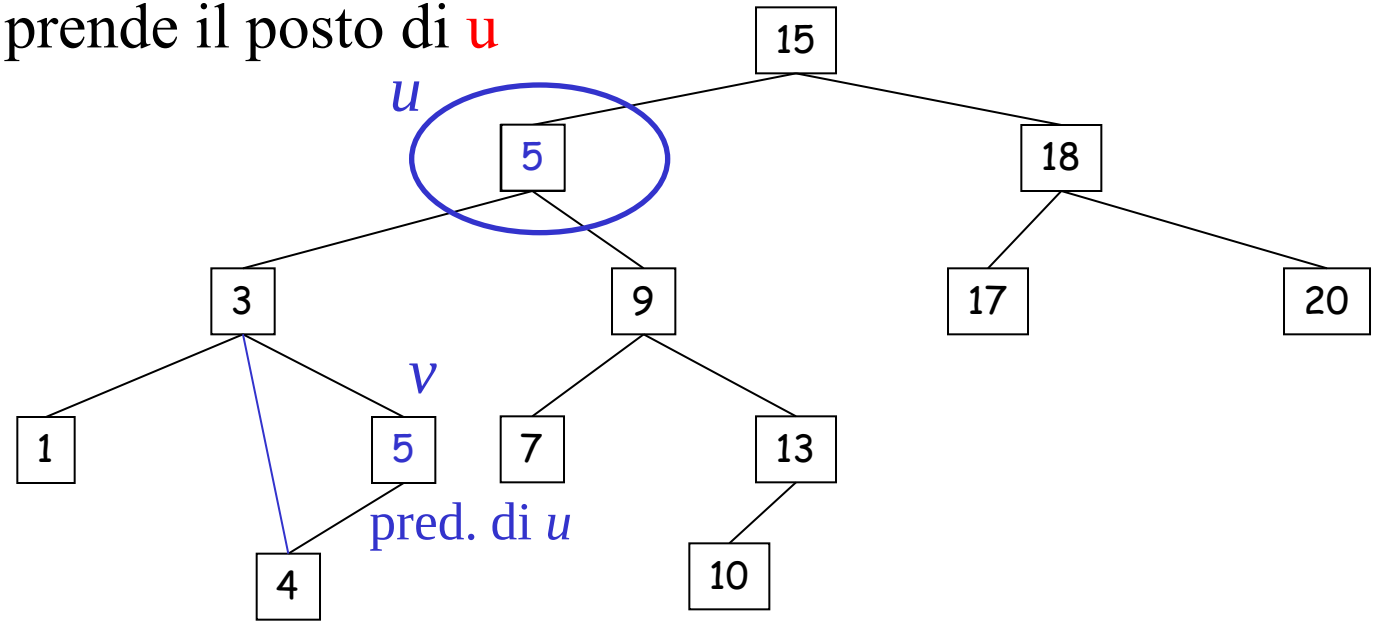
delete(elem e)

3) u ha due figli: sostituiscilo con il predecessore, e rimuovi fisicamente il predecessore; tale predecessore sarà il massimo del sottoalbero sinistro (caso 1 dell'algoritmo `pred`), in quanto u ha un sottoalbero sinistro; quindi, tale predecessore deve avere al più un solo figlio (non può avere il figlio destro!), e ricadremo quindi in uno dei 2 casi precedenti. Si noti che si può analogamente usare allo stesso scopo il successore di u. Vediamo un esempio in cui si ricade nel caso 2):



delete (*u*)

v prende il posto di u



Infine v viene aggirato

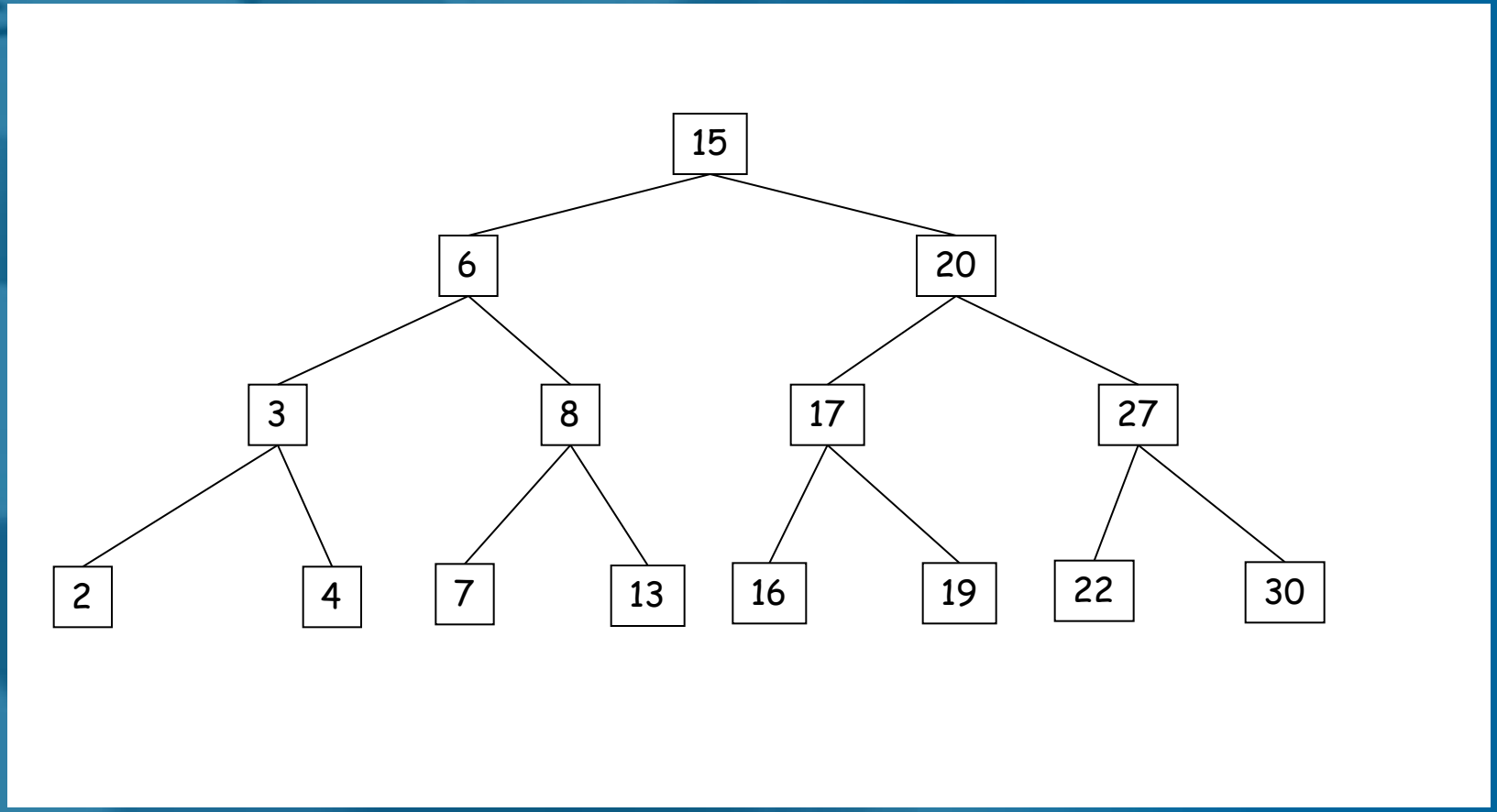
Costo dell'operazione di cancellazione

- Nei casi 1) e 2) $T(n)=O(1)$, mentre nel caso 3) $T(n)=O(h(u))=O(h)$
- Ricapitolando, le operazioni di ricerca, inserimento e cancellazione hanno costo $O(h)$ dove h è l'altezza dell'albero

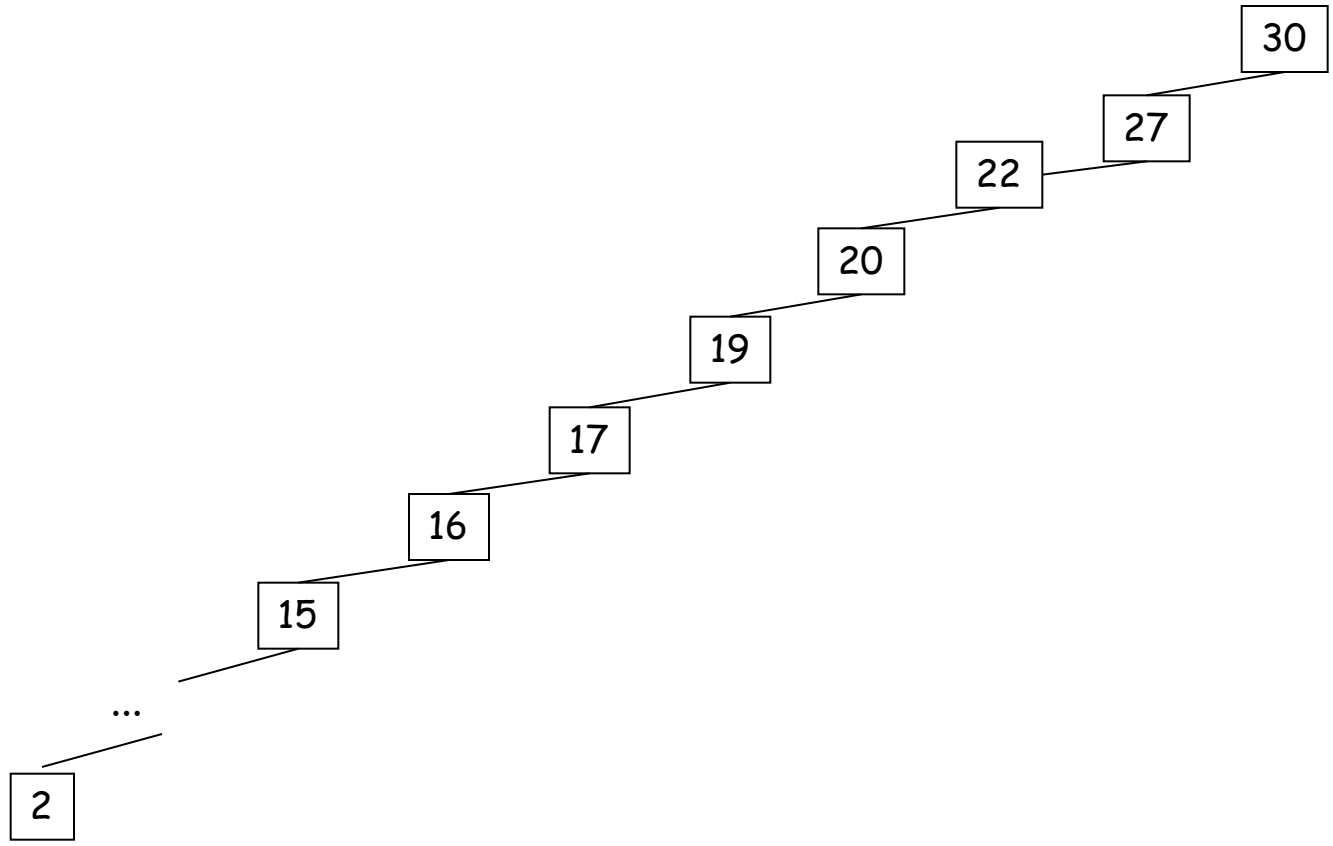
☺ Per alberi molto "bilanciati", $h= \Theta(\log n)$

☹ …ma per alberi molto "sbilanciati", $h=\Theta(n)$

Un albero binario di ricerca molto “bilanciato”…



Un albero binario di ricerca molto “sbilanciato”…



Esercizi di approfondimento

1. La visita in ordine anticipato di un ABR funziona come segue: dato un nodo v, elenca prima il nodo v, poi il sotto-albero sinistro di v (in ordine anticipato), e infine il sotto-albero destro di v (in ordine anticipato). Fornire lo pseudo-codice di tale visita, nonché una sua esecuzione su un ABR quasi completo di altezza 4 (con chiavi a piacere).
2. La visita in ordine posticipato di un ABR funziona come segue: dato un nodo v, elenca prima il sotto-albero sinistro di v (in ordine posticipato), poi il sotto-albero destro di v (in ordine posticipato), e infine il nodo v. Fornire lo pseudo-codice di tale visita, nonché una sua esecuzione su un ABR con 20 nodi di altezza 5 (con chiavi a piacere).