Appunti di Analisi Matematica (1)*

Docente: *Klaus Engel*

Università degli Studi dell'Aquila

http://people.disim.univaq.it/~klaus.engel

= %7E

* Note scritte in collaborazione con il prof. *Fabio Camilli*, Università degli Studi "G. d'Annunzio" Chieti – Pescara

Indice

CAPITOLO 0

Concetti Fondamentali

In questo capitolo introduttivo raccoglieremo alcuni concetti di matematica che servono successivamente ed inoltre stabiliremo le principale notazioni.

Insiemi

Intuitivamente un *insieme* è una raccolta di oggetti (chiamati *elementi*) distinguibili tra di loro che formano una totalità.
Per indicare un'insieme si usano generalmente lettere maiuscole $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$, per gli elementi invece lettere minuscole $a, b, c, \ldots, x, y, z$.

Prima di fare esempi introduciamo alcune

<u>NOTAZIONI</u>. • Spesso useremo i cosiddetti *quantificatori*

$$\boxed{\forall = \text{“per ogni”}} \qquad \text{e} \qquad \boxed{\exists = \text{“esiste”}}$$

- Per evidenziare che $A = B$ *per definizione* scriviamo $A := B$ oppure $B =: A$.
- $\Rightarrow$ indica un'*implicazione*.
- $\lightning$ indica una *contraddizione*.
- $\in$ indica il simbolo di *appartenenza*, $\notin$ indica il simbolo di *non-appartenenza*.
- $\subset$, $\subseteq$ indicano i simboli di *inclusione*.

Per definire un insieme in pratica ci sono 2 possibilità:

- elencando gli elementi tra parentesi graffe, per esempio $A := \{1, 2, 3\}$, oppure
- attraverso una proprietà che caratterizza gli elementi dell'insieme, per esempio $P := \{n : n \text{ è un numero primo}\}$.

<u>Osservazioni</u>. • L'ordine degli elementi elencati non conta, per esempio $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{3, 1, 2\}$.

- Elementi ripetuti valgono una volta solo, per esempio $\{1, 2, 2, 3, 1, 3, 1, 2\} = \{1, 2, 3\}$.

Consideriamo alcuni

<u>Esempi</u>. • Siano $A := \{1, 2, 3\}$, $B := \{2, 7, 8\}$, $C := \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$, allora $2 \in A$, $5 \notin B$, $A \subseteq C$, $A \notin C$, $A \notin A$.

- L'insieme senza alcun elemento si chiama *insieme vuoto* e si usa la notazione $\emptyset := \{\}$.
- Data un insieme A si definisce l'*insieme delle parti* $\mathcal{P}(A) := \{X : X \subseteq A\}$. Se A ha n elementi, allora $\mathcal{P}(A)$ ha 2^n elementi.

  Per esempio, se $A = \{1, 2, 3\}$ (con 3 elementi), allora $\mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\big\}$ (con $2^3 = 8$ elementi).

Questa vista semplificata di insiemi, che comunque è sufficiente per i nostri scopi, porta facilmente a problemi come si vede dal seguente

<u>Esempio</u>. *Paradosso di Russell:* Consideriamo l'insieme

$$A := \big\{X : X \text{ è un'insieme tale che } X \notin X\big\}.$$

Ora per A stesso si deve verificare $A \in A$ oppure il contrario $A \notin A$. Però

- $A \in A \Rightarrow A \notin A$ ↯ poiché A per ipotesi non verifica la condizione che definisce gli elementi X di A, ma anche
- $A \notin A \Rightarrow A \in A$ ↯ poiché A per ipotesi verifica la condizione che definisce gli elementi X di A.

Operazioni tra insiemi. Dati due insiemi A e B chiamiamo

- $A \cup B := \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$ *l'unione* tra A e B;
- $A \cap B := \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$ *l'intersezione* tra A e B;
- $A \setminus B := \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$ la *differenza* tra A e B;
- $A \times B := \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$ il *prodotto cartesiano* tra A e B, gli elementi (a, b) si chiamano *coppie ordinate*.

Osservazione. Se A e B sono insiemi, allora

- vale sempre $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$ (si dice che $\cup$ e $\cap$ sono operazioni *commutative*);
- in generale $A \setminus B \neq B \setminus A$ e $A \times B \neq B \times A$;
- le coppie $(a, b) \in A \times B$ sono ordinate, cioè $(a, b) = (b, a)$ solo se $a = b$;
- se A ha n elementi e B ha m elementi, allora $A \times B$ ha $n \cdot m$ elementi;
- definiamo $A^2 := A \times A$.

Consideriamo un

Esempio. Se $A := \{1, 2, 3\}$, $B := \{2, 7, 8\}$, allora

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 7, 8\}$,
- $A \cap B = \{2\}$,
- $A \setminus B = \{1, 3\} =: C \neq B \setminus A = \{7, 8\}$
- $A \times C = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$ con $3 \cdot 2 = 6$ elementi.

Insiemi Numerici. Definiamo i seguenti insiemi molto importanti:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &:= \{n : n \text{ è un numero naturale}\} = \{0,1,2,3,4,5,\dots\} = \text{insieme dei } \textit{numeri naturali}, \\
\mathbb{Z} &:= \{n : n \text{ è un numero intero}\} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\} = \text{insieme dei } \textit{numeri interi}, \\
\mathbb{Q} &:= \{r : r \text{ è un numero razionale}\} = \left\{\tfrac{p}{q} : p,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\} = \text{insieme dei } \textit{numeri razionali}, \\
\mathbb{R} &:= \{x : x \text{ è un } \textit{numero reale}\} \\
&= \left\{p,\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots \,|\, p \in \mathbb{Z}, \alpha_k \in \{0,1,2,\dots,9\}\,\forall\, k \in \mathbb{N}\right\} = \text{insieme dei } \textit{numeri reali}.
\end{aligned}$$

<u>Esempi</u>. • $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ($\to$ corso di Algebra e Geometria) è data da

$$\sqrt{2} = 1,414213562\dots.$$

In questo caso vale $p = 1$, $\alpha_0 = 4$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 1$, $\alpha_5 = 3$, $\alpha_6 = 5$,....

- Per $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ invece vale

$$\pi = \underbrace{3}_{=p},\underbrace{1}_{=\alpha_0}\underbrace{4}_{=\alpha_1}\underbrace{1}_{=\alpha_2}\underbrace{5}_{=\alpha_3}\underbrace{9}_{=\alpha_4}\underbrace{2}_{=\alpha_5}\underbrace{6}_{=\alpha_6}\dots$$

Proprietà dei Numeri Reali $\mathbb{R}$

(1) In $\mathbb{R}$ valgono per le operazioni *somma* "+" e *prodotto* "·" le regole dell'algebra, per esempio $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ vale

$$x + y = y + x, \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Più precisamente si dice che $(\mathbb{R}, +, \cdot\,)$ è un *campo* $\rightarrow$ corso di Algebra e Geometria.

(2) In $\mathbb{R}$ esiste un'*ordinamento totale* "<", cioè per $x, y \in \mathbb{R}$ vale una e una sola delle relazioni

$$x = y, \quad x < y \quad \text{oppure} \quad y < x.$$

(3) $\mathbb{R}$ è *completo*, cioè "la retta reale non ha buchi".

Prima di spiegare meglio la Proprietà (3) di $\mathbb{R}$ facciamo alcune

<u>Osservazioni</u>. • anziché $y < x$ scriviamo anche $x > y$, inoltre $x \leq y$ (o $y \geq x$) significa $x < y$ oppure $x = y$.

- Usando l'ordinamento in $\mathbb{R}$ definiamo per $a, b \in \mathbb{R}$ i seguenti insiemi detti *intervalli*:

$$\begin{aligned}
[a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} = \textit{intervallo chiuso},\\
(a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} = \textit{intervallo aperto},\\
[a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},\\
(a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},\\
(-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} = \textit{intervallo chiuso},\\
[a, +\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} = \textit{intervallo chiuso},\\
(-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} = \textit{intervallo aperto},\\
(a, +\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x\} = \textit{intervallo aperto},\\
(-\infty, +\infty) &:= \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

- Valgono le seguenti regole:
  - Se $a \leq b$ e $x \leq y$ allora $a + x \leq b + y$.
  - Se $a \leq b$ e $x > 0$ allora $a \cdot x \leq b \cdot x$.
  - *Attenzione:* Se $a \leq b$ e $x < 0$ allora $a \cdot x \geq b \cdot x$.
  - Se $0 < a \leq b$ allora $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.
- Le Proprietà (1) e (2) valgono anche in $\mathbb{Q}$, cioè anche $\mathbb{Q}$ è un campo ordinato.

Per continuare servono i concetti di

Maggioranti ed Estremo Superiore. Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Se $s \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq s$ per ogni $a \in A$, allora s si chiama *maggiorante* di A.

(b) Se $s_0 \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di A tale che $s_0 \leq s$ per ogni maggiorante s di A, allora s_0 si chiama *estremo superiore* di A.
Notazione: $\sup A := s_0 =$ *maggiorante più piccolo* di A.

(c) Se $s_0 = \sup A \in A$ allora s_0 si chiama anche *massimo* di A. Notazione: $\max A := s_0 =$ elemento più grande di A.

<u>Osservazioni</u>. Valgono le seguenti caratterizzazioni:

$$s_0 = \sup A \iff \begin{cases} \bullet\ a \leq s_0\ \forall\ a \in A \text{ (cioè } s_0 \text{ è un maggiorante)} \\ \bullet\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ a \in A \text{ tale che } s_0 - \varepsilon < a \\ \quad \text{(cioè } s_0 - \varepsilon \text{ non è più un maggiorante),} \end{cases}$$

$$s_0 = \max A \iff \begin{cases} \bullet\ a \leq s_0\ \forall\ a \in A \\ \bullet\ s_0 \in A. \end{cases}$$

<u>Esempi</u>.
- Se $A = (0, 1]$, allora $\sup A = \max A = 1$.
- Se $A = (0, 1)$, allora $\sup A = 1 \notin A$ e quindi $\max A$ non esiste.

<u>Osservazione</u>.

- Non tutti gli insiemi hanno maggioranti, per esempio $A = \mathbb{N}$ non ha maggiorante poiché non esiste $s \in \mathbb{R}$ tale che $n \leq s$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In tal caso si scrive $\sup A = +\infty$.
- Nell'ipotesi che $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ abbia un maggiorante (e in tal caso ne ha infiniti), allora si dice che A è *superiormente limitato*.
  Per esempio $A = (0, 1)$ è superiormente limitato poiché $s = 2$ è un maggiorante di A.

Dopo questo intermezzo torniamo alla Proprietà 3 dei numeri reali, cioè alla completezza di $\mathbb{R}$.

L'Assioma della Completezza. *$\mathbb{R}$ è completo, cioè ogni insieme $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ superiormente limitato ammette estremo superiore.*
In altre termini, se A ha maggioranti, allora esiste sempre il maggiorante più piccolo.

<u>Esempi</u>.

- $A := \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ è superiormente limitato. Per esempio, $s = 1{,}5$ è un maggiorante poiché se x è tale che

$$x > 1{,}5 \Rightarrow x^2 > (1{,}5)^2 = 2{,}25 \Rightarrow x \neq A.$$

  Quindi $A \subset (-\infty, 1{,}5]$ e la completezza di $\mathbb{R}$ implica che esiste $s_0 = \sup A$. Ora si può verificare che $s_0^2 = 2$, cioè $s_0 = \sqrt{2}$.

- Sia $A = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\right\} \subset \mathbb{Q}$. Usando la formula del binomio di Newton (cfr. pagina 13) si può verificare che $s = 3$ è un maggiorante di A. Quindi esiste $s_0 = \sup A =: e$.

<u>Osservazioni</u>.

- $e = 2{,}7182818284\ldots \notin \mathbb{Q}$ viene chiamato *numero di Nepero* che insieme a π è la costante più importante della matematica.
- Il secondo esempio dimostra che in $\mathbb{Q}$ la Proprietà (3) non vale, cioè $\mathbb{Q}$ *non* è completo. In parole povere questo significa che la retta razionale ha buchi, per esempio in e, ma anche in $\sqrt{2}$ oppure in π.

Analogamente ai concetti di maggiorante ed estremo superiore si introducono i concetti di

Minoranti ed Estremo Inferiore. Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Se $r \in \mathbb{R}$ tale che $r \leq a$ per ogni $a \in A$, allora r si chiama *minorante* di A.

(b) Se $r_0 \in \mathbb{R}$ è un minorante di A tale che $r_0 \geq r$ per ogni minorante r di A, allora r_0 si chiama *estremo inferiore* di A.
Notazione: $\inf A := r_0 =$ *minorante più grande* di A.

(c) Se $r_0 = \inf A \in A$ allora r_0 si chiama anche *minimo* di A. Notazione: $\min A := r_0 =$ elemento più piccolo di A.

<u>Osservazioni</u>. Valgono le seguenti caratterizzazioni:

$$r_0 = \inf A \iff \begin{cases} \bullet\ r_0 \leq a \ \forall\ a \in A \text{ (cioè } r_0 \text{ è un minorante),} \\ \bullet\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, a \in A \text{ tale che } a < r_0 + \varepsilon \\ \quad \text{(cioè } r_0 + \varepsilon \text{ non è più un minorante);} \end{cases}$$

$$r_0 = \min A \iff \begin{cases} \bullet\ r_0 \leq a \ \forall\ a \in A, \\ \bullet\ r_0 \in A. \end{cases}$$

<u>Esempi</u>.
- Se $A = [0, 1]$, allora $\inf A = \min A = 0$.
- Se $A = (0, 1]$, allora $\inf A = 0 \notin A$ quindi $\min A$ non esiste.

<u>Osservazione</u>.
- Non tutti gli insiemi hanno minoranti, per esempio $A = \mathbb{Z}$ non ha minoranti poiché non esiste $r \in \mathbb{R}$ tale che $r \leq n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. In tal caso si scrive $\inf A = -\infty$.
- Nell'ipotesi che $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ abbia un minorante (e in tal caso ne ha infiniti), allora si dice che A è *inferiormente limitato*. Per esempio $A = (0, +\infty)$ è inferiormente limitato poiché $s = -1$ è un minorante di A.
- Se A è superiormente e anche inferiormente limitato, allora si chiama *limitato*. Per esempio $A = (0, 1] \cup [3, 5)$ è limitato mentre $\mathbb{N}$ non lo è.

Funzioni

Definizione 0.1. Se A, $B \neq \emptyset$ sono due insiemi, allora una *funzione* f da A a B è una legge (spesso data in forma di una formula) che a ogni $a \in A$ associa un unico $b \in B$. In breve si scrive

$$f : A \to B, \quad f(a) = b.$$

Inoltre si chiama

- A il *dominio* di f,
- B il *codominio* di f,
- $f(A) := \{f(a) : a \in A\} \subseteq B$ l'*immagine* di f,
- $G(f) := \big\{\big(a, f(a)\big) : a \in A\big\} \subset A \times B$ il *grafico* di f.

Esempio. Per $x \in \mathbb{R}$ definiamo il suo *modulo* (oppure *valore assoluto*) come

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Per esempio $|3| = 3$, $|-4| = -(-4) = 4$. Quindi $f(x) := |x|$, $x \in \mathbb{R}$ definisce una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con immagine $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$. Il grafico $G(f) \subset \mathbb{R}^2$ è riportato nella Figura 1.

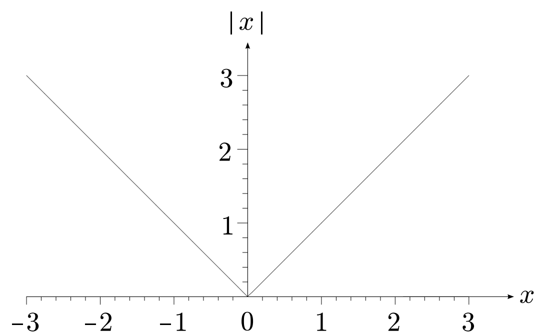


Figura 1. Il grafico del modulo.

<u>Osservazioni</u>. Per il modulo valgono le seguente relazioni importanti: Se $x, y, l \in \mathbb{R}$, allora

- $|x| \geq 0$,
- $|x| = 0 \iff x = 0$,
- $|x| < l \iff -l < x < l \iff x \in (-l, l)$,
- $|-x| = |x|$ e $\big||x|\big| = |x|$,
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ e $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$,
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*disuguaglianza triangolare*),
- $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$ (*disuguaglianza triangolare inversa*).

L'importanza del modulo si basa in particolare sulla seguente

<u>Osservazione</u>. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{|x - y| = \textit{distanza tra } x \textit{ e } y \textit{ sulla retta reale}}$$

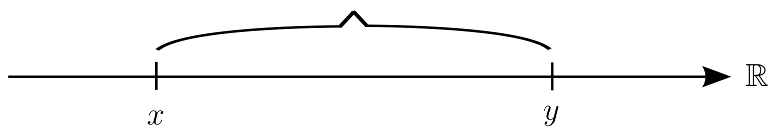


Figura 2. Modulo e distanze sulla retta reale

Quindi il modulo ci permette di misurare distanze.

Fattoriale e Coefficienti Binomiali

Definizione 0.2. Per $n \in \mathbb{N}$ definiamo il suo *fattoriale*

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Per esempio $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Osservazioni.

- $n!$ = numero di permutazioni di n oggetti distinti. Per esempio per tre oggetti a, b, c esistono $3! = 6$ permutazioni: *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*.
- Se $n \geq 1$ allora vale $n! = n \cdot (n-1)!$.

Definizione 0.3. Per $n, k \in \mathbb{N}$ con $0 \leq k \leq n$ definiamo il *coefficiente binomiale* (che si legge "n su k")

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Per esempio $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$.

Osservazioni. Per $n, k \in \mathbb{N}$ con $0 \leq k \leq n$ vale

- $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$, cioè i coefficienti binomiali sono sempre numeri naturali.
- $\binom{n}{k}$ = numero di sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ di k elementi. Per esempio l'insieme $\{1, 2, 3, \ldots, 89, 90\}$ ha $\binom{90}{6} = 622.614.630$ sottoinsiemi con 6 elementi. Quindi la probabilità di fare 6 al SuperEnalotto giocando una scheda è $\frac{1}{622.614.630} = 0.0000000016061\ldots$
- $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k}$, per esempio $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{12}{2} = 6$.

<u>Osservazioni</u>. Per i coefficienti binomiali valgono le seguenti proprietà.

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Le prime due regole si possono utilizzare per calcolare coefficienti binomiali con il *triangolo di Tartaglia*. La terza regola stabilisce la simmetria di questo triangolo.

$$\begin{array}{r|ccccc}
\binom{n}{k} & k=0 & =1 & =2 & =3 & =4 \\
\hline
n=0 & 1 & & & & \\
=1 & 1 & 1 & & & \\
=2 & 1 & \boxed{2}+ & \boxed{1} & & \\
 & & & \| & & \\
=3 & 1 & 3 & \boxed{3} & 1 & \\
=4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}$$

per esempio $\binom{2}{1} + \binom{2}{2} = \binom{3}{2}$.

Formula del Binomio di Newton

Introduciamo dapprima il concetto di *sommatoria*:

Se per $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$ sono dati $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ allora poniamo per la loro somma

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n.$$

Per esempio $\sum_{k=2}^{5} \sqrt{k} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}$.

Per le sommatorie valgono le seguente regole

- $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{i=m}^{n} a_i = \dots \sum_{l=m}^{n} a_l$.
- $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+1}^{n+1} a_{k-1}$.
- $r \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} r \cdot a_k$ per ogni $r \in \mathbb{R}$.
- $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{l} a_k + \sum_{k=l+1}^{n} a_k$ per ogni $m \leq l < n$.
- $\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k)$.

Se inoltre definiamo $a^0 := 1$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ allora vale la

<u>Proposizione</u> 0.4 (*Formula del Binomio di Newton*). *Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, allora*

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}}$$

Per esempio per $n = 4$ troviamo i coefficienti binomiali necessari nella 4. riga del triangolo di Tartaglia e quindi risulta:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= \mathbf{1} \cdot a^0 b^4 + \mathbf{4} \cdot a^1 b^3 + \mathbf{6} \cdot a^2 b^2 + \mathbf{4} \cdot a^3 b^1 + \mathbf{1} \cdot a^4 b^0 \\ &= b^4 + 4 \cdot ab^3 + 6 \cdot a^2 b^2 + 4 \cdot a^3 b + a^4.\end{aligned}$$

Principio di Induzione

Dato un numero fisso $n_0 \in \mathbb{N}$ supponiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ sia data un'affermazione $A(n)$.

<u>Problema</u>. Verificare che $A(n)$ sia vera per ogni $n \geq n_0$, cioè verificare un numero *infinito* di affermazioni.

<u>Esempio</u>. Per $n \geq 1 =: n_0$ sia $A(n)$ l'affermazione che vale la formula

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}}$$

Per esempio $A(3)$: $1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot (3+1)}{2} = 6$ che è vera. Abbiamo quindi dato un numero infinito di formule da verificare e ovviamente non si può procedere verificandole una per una.

Per risolvere questo problema useremo il seguente

<u>Teorema</u> 0.5 (*Principio di Induzione*). *Se*

- (base dell'induzione) $A(n_0)$ *è vera, e*
- (passo induttivo) *l'ipotesi* $\underbrace{A(n) \text{ vera}}_{\text{ipotesi dell'induzione}}$ *implica che anche* $A(n+1)$ *è vera,*

allora $A(n)$ *è vera per ogni* $n \geq n_0$.

<u>Osservazione</u>. In un certo senso il principio di induzione formalizza l'*effetto domino*: La base fa cadere il primo pezzo mentre il passo induttivo afferma che con un pezzo cade sempre anche quello successivo. Quindi se facciamo cadere il primo pezzo alla fine cadranno tutti i pezzi.

<u>Esempio</u>. Dimostreremo per induzione che $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ per ogni $n \geq 1$.

- *Base:* Dobbiamo verificare $A(1)$, cioè che vale $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$ che è vero.

- *Passo induttivo:* Sotto l'ipotesi che $A(n)$ sia vera *per un certo* $n \geq n_0$ (non per tutti n, quello infatti è da verificare!) dobbiamo verificare che anche l'affermazione successiva $A(n+1)$ vale. Allora per ipotesi vale

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

quindi risulta

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{(n+1)} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\ &= \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\end{aligned}$$

che è esattamente $A(n+1)$, cioè la formula che si ottiene sostituendo in $A(n)$ il numero n con $(n+1)$.

Consideriamo altri due esempi.

<u>Esempio</u> (*Disuguaglianza di Bernoulli*). Se $x \geq -1$, allora

$$\boxed{(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}}$$

Dimostrazione. Per induzione.

- *Base:* Per $n = 0$ l'affermazione diventa $(1+x)^0 = 1 + 0 \cdot x$ che è vera.

- *Passo induttivo:* Supponiamo che per un certo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x. \tag{$*$}$$

Sotto questo ipotesi dobbiamo verificare la disuguaglianza che si ottiene sostituendo n con $n+1$. Perciò moltiplichiamo $(*)$ con $1 + x \geq 0$

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} = (1+x) \cdot (1+x)^n &\geq (1+x) \cdot (1 + n \cdot x) \\ &= 1 + (n+1) \cdot x + \underbrace{n \cdot x^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + (n+1) \cdot x\end{aligned}$$

che era da verificare.

$\square$

ESEMPIO (*Progressione Geometrica*). Sia $1 \neq q \in \mathbb{R}$, allora

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}}$$

DIMOSTRAZIONE. Per induzione.

- *Base:* Per $n = 0$ l'affermazione diventa $\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$ che è vera.
- *Passo induttivo:* Supponiamo che per un certo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \tag{\#}$$

Sotto questo ipotesi dobbiamo verificare la formula che si ottiene sostituendo n con $n+1$, cioè che vale anche

$$\sum_{k=0}^{(n+1)} q^k = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}.$$

Perciò sommiamo su entrambi i lati dell'equazione (#) la quantità q^{n+1} e otteniamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \\ &= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+2}}{1-q}\end{aligned}$$

che era da verificare. □

<u>Esercizi</u>.

- Verificare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, il numero $n + n^2$ è pari.
- Verificare che per un insieme A con $n \in \mathbb{N}$ elementi l'insieme $\mathcal{P}(A)$ delle parti ha 2^n elementi.

Concludiamo con la seguente domanda.

Dov'è l'errore? *Tutti i cavalli sono bianchi.*

Dimostrazione. Sia $A(n)$ l'affermazione "*tutti i cavalli in un insieme di n cavalli hanno lo stesso colore*".

- *Base:* Per $n = 1$ l'affermazione è ovviamente vera.
- *Passo induttivo:* Supponendo che in un insieme di n cavalli tutti hanno sempre lo stesso colore dobbiamo verificare che anche in un insieme di $n + 1$ cavalli tutti hanno lo stesso colore. Allora togliendo dall'insieme di $n + 1$ cavalli un cavallo rimangono n cavalli che per ipotesi hanno lo stesso colore. Rimettiamo il cavallo tolto dall'insieme e togliamo un'altro. Di nuovo rimane un insieme con n cavalli che per ipotesi hanno lo stesso colore. Quindi per transitività tutti i $n + 1$ cavalli hanno lo stesso colore.

Inoltre ieri ho visto un cavallo bianco in televisione e quindi tutti cavalli sono bianchi. $\square$

CAPITOLO 1

Successioni Numeriche

Lo scopo di questo capitolo è di studiare il comportamento di un'espressione dipendente da un parametro naturale n per n sempre più grande, cioe "*per n tendente a $+\infty$*".

Iniziamo con la definizione rigorosa di una successione.

Definizione 1.1. Una *successione numerica* è una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, cioè una regola che fa corrispondere a ogni $n \in \mathbb{N}$ un unico $a(n) \in \mathbb{R}$.

Generalmente si usa la notazione $a_n := a(n)$. Inoltre si rappresenta una successione elencando tutti i valori assunti in ordine crescente oppure attraverso una formula che definisce gli elementi a_n.

Esempio. $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a(n) := \frac{1}{n+1}$ definisce una successione che si può rappresentare come

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots\right) \qquad \text{oppure} \qquad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Può accadere che una formula che definisce gli elementi a_n di una successione non ha senso per alcuni valori di n, cioè il dominio di a non è tutto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ ma soltanto un sottoinsieme della forma $\{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, n_0 + 3, \ldots\}$. Comunque anche in questo caso si parla di successioni.

Esempio. La formula $a_n := \frac{1}{n\cdot(n-3)}$ definisce una successione $a : \{4, 5, 6, 7, \ldots\} \to \mathbb{R}$ (il problema è che qui il denominatore si annulla per $n = 0$ e $n = 3$ e quindi non sono definiti gli elementi a_0 e a_3). In questo caso si scrive

$$(a_n)_{n\geq 4} = \left(\frac{1}{n\cdot(n-3)}\right)_{n\geq 4}$$

Altri esempi di successioni sono

- $(2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots)$ (successione dei numeri primi),
- $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ (cfr. pagina 35),
- $(q^n)_{n\in\mathbb{N}} = (q^0, q^1, q^2, q^3, \ldots)$ per un $q \in \mathbb{R}$ fisso (*successione geometrica)*.

Convergenza, Divergenza e Irregolarità per Successioni

Come già accennato sopra vogliamo studiare il seguente

PROBLEMA. Studiare il comportamento degli elementi a_n di una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ per n sempre più grande.

Consideriamo alcuni

ESEMPI.

- Per la successione $(a_n)_{n\geq 1} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$ gli elementi tendono a $l = 0$ se n diventa sempre più grande.
- Per la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$ gli elementi superano qualsiasi valore fissato se n diventa sempre più grande.
- Per la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (+1, -1, +1, -1, +1, -1, \ldots)$ gli elementi oscillano tra i valori -1 e 1.

Nelle seguenti definizioni formalizziamo questi tre tipi di comportamenti per le successioni.

Definizione 1.2 (*Successione convergente*). (i) Si dice che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è *convergente al limite* $l \in \mathbb{R}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|l - a_n| < \varepsilon \text{ per ogni } n \geq n_0.$$

In questo caso si scrive

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = l} \qquad \text{oppure} \qquad \boxed{a_n \to l \text{ per } n \to +\infty}$$

(ii) Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si chiama successione *infinitesima*.

OSSERVAZIONE. Per una successione convergente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vale che $a_n \to l$ per $n \to +\infty \iff l - a_n \to 0$ per $n \to +\infty$.

<u>Esempio</u>. Verificare che
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Dimostrazione. È da verificare che per $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$ segue che
$$\frac{1}{n} = \left|0 - \frac{1}{n}\right| < \varepsilon.$$
Però, $\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$, quindi scegliendo $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ risulta
$$\left|0 - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \text{ per ogni } n \geq n_0,$$
cioè $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. In altre parole $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ è infinitesima. □

<u>Proposizione</u> 1.3 (*Unicità del limite*). *Il limite di una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente è unico.*

Dimostrazione. Per assurdo[1] supponiamo che esiste una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l_1 \qquad \text{e} \lim_{n\to+\infty} a_n = l_2$$
con $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ e $l_1 \neq l_2$. Allora $\varepsilon := \frac{|l_1-l_2|}{4} > 0$ e quindi esistono $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tale che
$$|l_1 - a_n| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq n_1 \qquad \text{e} \qquad |l_2 - a_n| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq n_2$$
Usando la disuguaglianza triangolare risulta per $N := \max\{n_1, n_2\}$
$$\begin{aligned} |l_1 - l_2| &= |(l_1 - a_N) + (a_N - l_2)| \leq |l_1 - a_N| + |a_N - l_2| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \frac{|l_1-l_2|}{2}. \end{aligned}$$
Dividendo per $|l_1 - l_2| > 0$ segue $1 < \frac{1}{2}$ ↯. Quindi il limite è unico. □

[1]Per i tre principali modi di dimostrazioni cfr. pagina 258.

<u>Esercizio</u>. Utilizzando la definizione di convergenza verificare che $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2}$.

<u>Definizione</u> 1.4 (*Successione divergente*). Si dice che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- *diverge a* $+\infty$, se per ogni $M > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > M$ per ogni $n \geq n_0$ e in questo caso si scrive
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \qquad \text{oppure} \qquad a_n \to +\infty \text{ per } n \to +\infty;$$
- *diverge a* $-\infty$, se per ogni $M < 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < M$ per ogni $n \geq n_0$ e in questo caso si scrive
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \qquad \text{oppure} \qquad a_n \to -\infty \text{ per } n \to +\infty.$$
- *diverge* se diverge a $+\infty$ oppure $-\infty$.

Per esempio $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$.

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ammette limite finito (cioè se converge) oppure infinito (cioè se diverge), allora si dice *regolare*. Rimane quindi la classe delle successioni che non ammettono limite.

<u>Definizione</u> 1.5 (*Successione irregolare*). Se la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è convergente né divergente allora si dice *irregolare* (oppure *oscillante*).

Per esempio la successione $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ è irregolare. Più in generale consideriamo il seguente

<u>Esempio</u> (*Successione geometrica*). Per $q \in \mathbb{R}$ fisso definiamo $a_n := q^n$. Allora la *successione geometrica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(i) diverge a $+\infty$ se $q > 1$,

(ii) è costante (cioè $a_n = a_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$) se $q = 1$ e quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a_0 = 1$,

(iii) è infinitesima se $|q| < 1$,

(iv) è irregolare se $q \leq -1$.

Dimostrazione. Verifichiamo soltanto (i). Per ipotesi $q > 1$ e quindi $q - 1 > 0$. Per la disuguaglianza di Bernoulli segue

$$q^n = \big(1 + (q-1)\big)^n \geq 1 + n \cdot (q-1) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Ora per $M > 0$ scegliamo $n_0 \in \mathbb{N}$ con $n_0 > \frac{M-1}{q-1}$. Allora risulta che

$$q^n \geq 1 + n \cdot (q-1) \geq 1 + n_0 \cdot (q-1) > 1 + \frac{M-1}{q-1} \cdot (q-1) = M \quad \text{per ogni } n \geq n_0.$$

Quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ per ogni $q > 1$. □

Consideriamo un'altra successione importante.

Esempio (*Successione armonica*). Per $\alpha \in \mathbb{R}$ fisso definiamo $a_n := n^\alpha$. Allora la *successione armonica* $(a_n)_{n\geq 1}$

(i) diverge a $+\infty$ se $\alpha > 0$,

(ii) è costante (cioè $a_n = a_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$) se $\alpha = 0$ e quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a_1 = 1$,

(iii) è infinitesima se $\alpha < 0$,

Il prossimo risultato dà una condizione necessaria per la convergenza di una successione.

Proposizione 1.6. *Una successione convergente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è* limitata, *cioè esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tale che*

$$m \leq a_n \leq M \quad \textit{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrazione. Se $l := \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ allora per $\varepsilon = 1$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|l - a_n| < 1$, cioè $l - 1 < a_n < l + 1$, per ogni $n \geq n_0$. Quindi per

$$m := \min\{l - 1, a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}\} \quad \text{e} \quad M := \max\{l + 1, a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}\}$$

segue $m \leq a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, cioè $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata. □

Il contrario della proposizione precedente non vale, cioè una successione limitata non deve essere convergente, basta considerare la successione $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ che è limitata ma non converge.

Cerchiamo ora modi per semplificare lo studio della convergenza di una successione senza dover verificare direttamente la definizione.

Regole per il Calcolo dei Limiti

Problema. Data una successione "*complicata*" $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, studiare la sua convergenza.

Una soluzione parziale per questo problema fornisce il seguente risultato

Proposizione 1.7 (*Regole per il calcolo dei limiti*). *Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni convergenti con $a_n \to l_1$ e $b_n \to l_2$ per $n \to +\infty$. Allora per $n \to +\infty$*

(i) $a_n \pm b_n \to l_1 \pm l_2$;

(ii) $a_n \cdot b_n \to l_1 \cdot l_2$;

(iii) $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{l_1}{l_2}$ *se* $l_2 \neq 0$;

(iv) $(a_n)^{b_n} \to {l_1}^{l_2}$ *se* $l_1 > 0$;

(v) $|a_n| \to |l_1|$.

Dimostrazione. Verifichiamo solo (ii) cioè che $a_n \cdot b_n \to l_1 \cdot l_2$ per $n \to +\infty$:
Visto che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, per la proposizione precedente esiste $M > 0$ tale che $|a_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre poiché $a_n \to l_1$ e $b_n \to l_2$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|l_1 - a_n| < \frac{\varepsilon/2}{M + |l_2|} \qquad \text{e} \qquad |l_2 - b_n| < \frac{\varepsilon/2}{M + |l_2|} \qquad \forall\, n \geq n_0.$$

Quindi con la disuguaglianza triangolare segue

$$\begin{aligned}
|l_1 \cdot l_2 - a_n \cdot b_n| &= \big|(l_1 \cdot l_2 \overbrace{- a_n \cdot l_2) + (a_n \cdot l_2}^{=0} - a_n \cdot b_n)\big| \leq |\, l_1 \cdot l_2 - a_n \cdot l_2 \,| + |\, a_n \cdot l_2 - a_n \cdot b_n \,| \\
&= |l_1 - a_n| \cdot |l_2| + |a_n| \cdot |l_2 - b_n| \leq \frac{\varepsilon/2}{M + |l_2|} \cdot |l_2| + M \cdot \frac{\varepsilon/2}{M + |l_2|} \\
&= \varepsilon/2 \cdot \underbrace{\frac{|l_2|}{M + |l_2|}}_{\leq 1} + \varepsilon/2 \cdot \underbrace{\frac{M}{M + |l_2|}}_{\leq 1} \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0,
\end{aligned}$$

cioè $a_n \cdot b_n \to l_1 \cdot l_2$ per $n \to +\infty$. □

<u>Esempi</u>. • Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{7n^2-2n+3}{-3n^2+n-1}.$$

L'espressione rappresenta il rapporto di due successioni ma scritto così non si può ancora utilizzare la regola per $\frac{a_n}{b_n}$ poiché sia il numeratore sia il denominatore divergono. Comunque basta mettere in evidenza nel numeratore e nel denominatore la quantità che cresce più rapidamente, in questo caso n^2. Utilizzando le regole per somma, differenza, prodotto e rapporto otteniamo

$$\frac{7n^2-2n+3}{-3n^2+n-1} = \frac{n^2 \cdot \overbrace{(7-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2})}^{\to 7-2\cdot 0+3\cdot 0^2=\mathbf{7}}}{n^2\cdot \underbrace{(-3+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})}_{\to -3+0-0^2=\mathbf{-3}}} \to -\frac{7}{3}$$

• Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+3}-\sqrt{n}.$$

Non si può applicare direttamente la regola per le differenze poiché i due termini *divergono* entrambi. Per procedere si sfrutta la formula $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$:

$$\begin{aligned}\sqrt{n+3}-\sqrt{n} &= \left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}\\ &= \frac{n+3-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} \to \frac{3}{+\infty} = 0\end{aligned}$$

Qui l'ultimo passaggio viene giustificato dalla seguente

<u>Osservazione</u>. Le regole per il calcolo dei limiti si possono estendere alle successioni regolari se al limite si ottiene una delle seguenti *forme determinate*: Per ogni $a \in \mathbb{R}$ definiamo

$$\pm\infty + a := \pm\infty \qquad \pm\infty \cdot a := \begin{cases} \pm\infty & \text{se } a > 0 \\ \mp\infty & \text{se } a < 0 \end{cases} \qquad \frac{a}{\pm\infty} := 0$$

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) := \pm\infty \qquad (\pm\infty)\cdot(\pm\infty) := +\infty \qquad (\pm\infty)\cdot(\mp\infty) := -\infty$$

$$q^{+\infty} := \begin{cases} +\infty & \text{se } q > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < q < 1 \end{cases} \qquad q^{-\infty} := \begin{cases} 0 & \text{se } q > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < q < 1 \end{cases} \qquad q^0 := 1 \text{ se } q > 0$$

Per esempio, se $a_n \to -3$ e $b_n \to +\infty$ allora $a_n \cdot b_n \to -3 \cdot (+\infty) = -\infty$ oppure $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{-3}{+\infty} = 0$.

<u>Osservazione</u>. La forma determinata $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ si può generalizzare: Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitata, cioè esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tale che $m \leq a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $\frac{a_n}{b_n} \to 0$ per ogni successione divergente $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $a_n \cdot c_n \to 0$ per ogni successione infinitesima $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Quindi possiamo definire altre 2 forme determinate

$$\frac{\text{“limitata”}}{\pm\infty} = 0 \qquad \text{e} \qquad \text{“limitata”} \cdot 0 = 0.$$

Esempi concreti sono dati da

$$\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \to 0 \qquad \text{e} \qquad \cos(n^2)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0.$$

in quanto $-1 \leq \sin(x), \cos(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{n} \to +\infty$ e $\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$ per $n \to +\infty$.

<u>Osservazione</u>. Con le forme determinate abbiamo esteso le operazioni algebriche in alcuni casi per gli elementi dei *numeri reali estesi*

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Non si possono però definire tutte le operazioni tra elementi in $\overline{\mathbb{R}}$, per esempio le seguenti operazioni rappresentano *forme indeterminate*:

$$(\pm\infty) - (\pm\infty) \qquad 0\cdot(\pm\infty) \qquad \frac{0}{0}$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \qquad \frac{a}{0} \text{ per ogni } a \in \mathbb{R} \qquad 1^{\pm\infty}$$

$$(\pm\infty)^0 \qquad 0^0$$

Quindi se per la composizione di due successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al limite otteniamo una forma indeterminata, allora non si può dire nulla sul comportamento della composizione avendo soltanto informazioni sulla convergenza o divergenza di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Esempio</u>. Verifichiamo che $(+\infty)-(+\infty)$ è indeterminata, cioè sapendo soltanto che $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$ non si può dire nulla sul comportamento di $a_n - b_n$ per $n \to +\infty$. Basta considerare $b_n := n$ e

- $a_n := n \Rightarrow a_n - b_n = 0 \to 0$, cioè la differenza converge;
- $a_n := n^2 \Rightarrow a_n - b_n = n^2 - n = n^2(1 - \frac{1}{n}) \to +\infty \cdot 1 = +\infty$, cioè la differenza diverge;
- $a_n := n + (-1)^n \Rightarrow a_n - b_n = (-1)^n$, cioè la differenza è irregolare.

Le regole per il calcolo dei limiti manifestano che il concetto di limite è compatibile con le operazioni algebriche.

<u>Esercizio</u>. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n \cdot \left(\sqrt{5} - \sqrt{5 - \frac{2}{n}}\right).$$

(Risultato $l = \frac{\sqrt{5}}{5}$).

Continuiamo studiando il comportamento tra

Limiti e Ordinamento

<u>Teorema</u>. *Se $a_n \to l_1$ e $b_n \to l_2$ per $n \to +\infty$ con $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora*

- $l_1 \leq l_2$ (Teorema del Confronto);
- *se inoltre $a_n \leq c_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $l_1 = l_2$, allora anche $c_n \to l_1$ per $n \to +\infty$* (Teorema dei Carabinieri).

In particolare il Teorema dei Carabinieri è molto utile per studiare successioni complicate $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ incastrandole tra 2 successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ più semplici (cioè tra i due carabinieri).

<u>Esempi</u>. • Vogliamo studiare la convergenza della successione $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$c_n := \left(\frac{1}{3+\cos(n^2)}\right)^n.$$

Allora,

$$-1 \leq \cos(n^2) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 2 = 3-1 \leq 3+\cos(n^2) \leq 3+1 = 4 \quad \Rightarrow \quad 2^n \leq \big(3+\cos(n^2)\big)^n \leq 4^n$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi segue per gli inversi

$$\Rightarrow \qquad \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^n}_{=:a_n\to 0} \leq \left(\frac{1}{3+\cos(n^2)}\right)^n \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{=:b_n\to 0} \qquad \text{per } n\to+\infty$$

e di consequenza $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$.

• Verifichiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{per ogni } a>0.$$

Consideriamo prima il caso $a>1$ e poniamo $d_n := \sqrt[n]{a}-1>0$ cioè $\sqrt[n]{a} = 1+d_n$ per ogni $n\in\mathbb{N}$. Per la disuguaglianza di Bernoulli segue

$$\underbrace{(1+d_n)^n}_{=a} \geq 1+n\cdot d_n \qquad \Rightarrow \qquad \underbrace{\frac{a-1}{n}}_{\to 0} \geq d_n \geq \underbrace{0}_{\to 0} \qquad \text{per } n\to+\infty.$$

Di conseguenza $d_n\to 0$ e quindi $\sqrt[n]{a} = 1+d_n \to 1+0 = 1$ per $n\to+\infty$. Se $0<a<1$ poniamo $\tilde{a} := \frac{1}{a} > 1$. Da sopra segue quindi

$$\sqrt[n]{\tilde{a}} \to 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\tilde{a}}} \to \frac{1}{1} = 1 \qquad \text{per } n\to+\infty.$$

<u>OSSERVAZIONE</u>. Il concetto di limite per una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è collegato al comportamento degli elementi a_n per n sempre più grande. Quindi i primi elementi non influiscono sulla esistenza oppure sul valore del limite. Nel seguito diremo che una proprietà per una successione vale *definitivamente*, se esiste un n_0 tale che tale proprietà vale per $n > n_0$.

Per esempio la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n-1000)_{n\in\mathbb{N}}$ è positiva definitivamente poiché $a_n > 0$ per ogni $n > 1000 =: n_0$. Invece $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *non* è positiva definitivamente.

<u>OSSERVAZIONI</u>.

- Dal teorema del confronto segue che per una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente al limite l e con $a_n \in [\alpha,\beta]$ definitivamente vale $l \in [\alpha,\beta]$. In particolare segue il *Teorema della permanenza del segno:* Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è positiva definitivamente e $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$ allora $l \geq 0$.

- Non vale l'osservazione precedente per intervalli aperti oppure disuguaglianze strette. Per esempio, se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$ allora <u>NON</u> segue $l > 0$!! Come controesempio basta considerare

$$a_n := \frac{1}{\underbrace{n+1}_{>0\,\forall\, n\in\mathbb{N}}} \to \underbrace{0}_{\not>0} = l \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

- Abbiamo detto che $\frac{a}{0}$ anche per $a \neq 0$ è una forma indeterminata. Tuttavia si potrebbe pensare che sia invece determinata con il valore ∞. Il problema è che non si può stabilire il segno dell'infinito. A questo punto si possono seguire 2 strade:

  – Si introduce un terzo infinito ∞ senza segno e si pone $\frac{a}{0} := \infty$ per ogni $a \neq 0$,

    oppure

  – si considerano soltanto gli infiniti $-\infty$ e $+\infty$ (come faremo nel seguito) e di conseguenza $\frac{a}{0}$ rimane una forma indeterminata come si vede dal seguente esempio: $a_n := \frac{(-1)^n}{n} \to 0$ ma $\frac{1}{a_n} = (-1)^n \cdot n$ è oscillante.

Il problema posto nell'ultima osservazione si può risolvere parzialmente introducendo *infinitesimi* con segno.

Definizione 1.8. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione infinitesima, cioè $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$. Se

- $a_n \geq 0$ definitivamente, allora scriviamo $a_n \to 0^+$ (oppure $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0^+$),
- $a_n \leq 0$ definitivamente, allora scriviamo $a_n \to 0^-$ (oppure $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0^-$).

Così otteniamo altre due forme determinate

$$\frac{a}{0^\pm} := \pm\infty \quad \text{se } a > 0, \qquad\qquad \frac{a}{0^\pm} := \mp\infty \quad \text{se } a < 0.$$

Inoltre abbiamo

$$\frac{a}{\pm\infty} := 0^\pm \quad \text{se } a > 0, \qquad\qquad \frac{a}{\pm\infty} := 0^\mp \quad \text{se } a < 0.$$

Con queste definizioni le regole per il calcolo dei limiti restano validi. Per esempio

- $a_n \to 2,\ b_n \to 0^- \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \frac{2}{0^-} = -\infty$,
- $a_n \to -1,\ b_n \to +\infty \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \frac{-1}{+\infty} = 0^-$.

<u>Problema</u>. Per studiare la convergenza di una successione abbiamo finora avuto bisogno di avere almeno un *candidato* per il suo limite.

Per esempio, come vedremo tra poco la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ma ciò non si può dimostrare usando la definizione oppure le regole per il calcolo dei limiti.

Per risolvere questo problema cerchiamo quindi criteri che implicano la convergenza senza fare riferimento al limite. Prima ci serve una

Definizione 1.9. Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice

- *crescente*, se $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- *decrescente*, se $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- *monotona*, se è crescente oppure decrescente.

Il seguente risultato è molto importante.

TEOREMA 1.10 (*Regolarità delle successione monotone*). *Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona, allora è regolare, cioè ammette limite. Questo limite è finito, cioè $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, se e solo se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata. Inoltre vale*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\} & \text{se } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ è crescente,} \\ \inf\{a_n : n\in\mathbb{N}\} & \text{se } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ è decrescente.} \end{cases}$$

In particolare, ogni successione limitata e monotona è convergente.

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo soltanto che una successione crescente e limitata converge. Per la completezza di $\mathbb{R}$ esiste $l := \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\}\in\mathbb{R}$. Sia $\varepsilon > 0$. Allora usando la caratterizzazione dell'estremo superiore segue che

$$a_n \le l \iff 0 \le l - a_n \quad \forall\, n\in\mathbb{N} \qquad \text{e} \qquad \exists\, a_{n_0} \text{ tale che } l-\varepsilon < a_{n_0} \iff l - a_{n_0} < \varepsilon.$$

Usando inoltre la crescenza di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ otteniamo

$$0 \le l - a_n \le l - a_{n_0} < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \ge n_0$$

e quindi $|l - a_n| < \varepsilon$ per ogni $n \ge n_0$, cioè $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$. □

Per dimostrare l'importanza di questo risultato consideriamo due applicazioni. Inoltre sarà utilizzato per dimostrare il "Teorema degli Zeri", cfr. pagina 87.

Il Metodo di Erone. Per $a > 0$, $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$ definiamo la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ come

$$x_0 := 1,$$
$$x_{n+1} := \frac{1}{k} \cdot \left((k-1)x_n + \frac{a}{{x_n}^{k-1}}\right).$$

In questo caso non è data una formula per calcolare direttamente x_n per un valore $n \in \mathbb{N}$, ma una regola per calcolare il termine successivo x_{n+1} della successione conoscendo quello precedente x_n. Questo modo di definire una successione si dice *per ricorrenza* ed è legata al principio di induzione. Nel seguente grafico è riportato come viene costruito x_{n+1} da x_n:

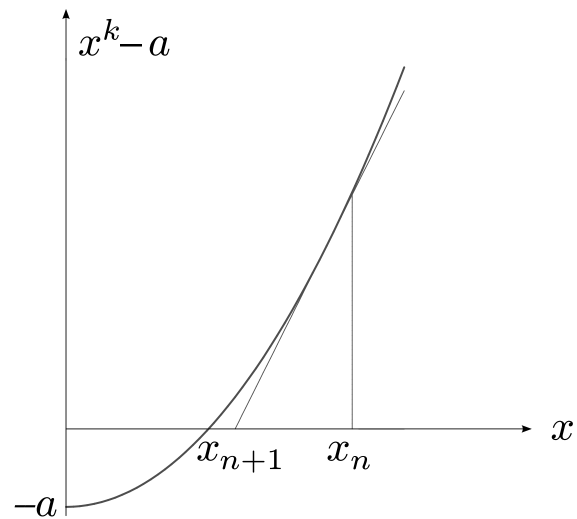


FIGURA 3. Il metodo di Erone.

Si traccia in $x = x_n$ la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^k - a$ che poi interseca l'asse-x in x_{n+1} (come verificheremo a pagina 103). In particolare si vede che $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è

- definitivamente decrescente (per $n \geq 1$), e
- limitata visto che $x_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Quindi per il teorema precedente il limite

$$\lim_{n\to+\infty} x_n =: r \in [0,+\infty)$$

converge. Per calcolare r notiamo che anche $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = r$ e poi usiamo le regole per il calcolo dei limiti: Per $n \to +\infty$ vale

$$r \leftarrow x_{n+1} = \frac{1}{k} \cdot \left((k-1) \underbrace{x_n}_{\to r} + \frac{a}{\underbrace{{x_n}^{k-1}}_{\to r^{k-1}}} \right) \to \frac{1}{k} \cdot \left((k-1)r + \frac{a}{r^{k-1}} \right),$$

di conseguenza

$$r = \frac{1}{k} \cdot \left((k-1)r + \frac{a}{r^{k-1}} \right) \qquad \Rightarrow \qquad r^k = a,$$

cioè abbiamo “costruito”

$$\boxed{r =: \sqrt[k]{a} \quad = \text{radice } k\text{-esima di } a.}$$

Interesse Composto e il Numero "e" di Nepero. Se un capitale di 1 € viene investito a 100% di interesse annuale, allora dopo un anno il capitale è di €

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

se l'interesse viene pagato ogni n-esimo dell'anno. Quindi ci si può chiedere che cosa succede se gli interessi vengono pagati dopo periodi sempre più brevi: per esempio dopo

- ogni mese: $n = 12 \Rightarrow a_{12} = 2,61303529\ldots$,
- ogni giorno: $n = 365 \Rightarrow a_{365} = 2,71456748\ldots$,
- ogni ora: $n = 8760 \Rightarrow a_{8760} = 2,71812669\ldots$,
- ogni secondo: $n = 31536000 \Rightarrow a_{31536000} = 2,71828178\ldots$

etc.

Visto che per n crescente si accumulano sempre più interessi composti, la successione $(a_n)_{n\geq 1} = \left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n\geq 1}$ è crescente. Quindi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è

- crescente, e
- limitata in quanto $a_n \in [2,3]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (usare la formula del binomio di Newton).

Quindi per il teorema precedente sulla convergenza delle successioni monotone $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e si pone

$$\boxed{e := \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \textit{numero di Nepero.}}$$

Per il teorema del confronto vale $e \in [2,3]$. Si può verificare che $e \notin \mathbb{Q}$ e

$$e = 2,718281828459045\ldots$$

Confronto tra Successioni

Definizione 1.11. Se per due successioni si ha $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, allora si dice che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono *asintotiche* e si scrive $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$.

Osservazioni.

- Se $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$, allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hanno lo stesso comportamento asintotico, cioè
  - $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\iff$ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e in tal caso $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$;
  - $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge $\iff$ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge e in tal caso $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$;
  - $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è irregolare $\iff$ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è irregolare.
- "$\sim$" è una *relazione di equivalenza* sull'insieme delle successioni, cioè
  - $a_n \sim a_n$ per $n \to +\infty$ (riflessivita),
  - $a_n \sim b_n \Rightarrow b_n \sim a_n$ per $n \to +\infty$ (simmetria),
  - $a_n \sim b_n$ e $b_n \sim c_n \Rightarrow a_n \sim c_n$ per $n \to +\infty$ (transitività).

Il seguente principio è spesso utile per semplificare il calcolo dei limiti.

Teorema 1.12 (*Principio di Sostituzione*). *Se $a_n \sim a'_n$, $b_n \sim b'_n$ e $c_n \sim c'_n$ per $n \to +\infty$, allora*

$$\frac{a_n \cdot b_n}{c_n} \sim \frac{a'_n \cdot b'_n}{c'_n} \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

In particolare $a_n \cdot b_n \sim a'_n \cdot b'_n$ e $\frac{a_n}{b_n} \sim \frac{a'_n}{b'_n}$ per $n \to +\infty$.

Quindi in *prodotti* e *rapporti* si possono sostituire successioni con altre successioni asintotiche senza cambiare il comportamento asintotico, in particolare senza cambiare il limite se esiste.

<u>Esempi</u>. • $2n^3 - 5n^2 - 3n + 11 \sim 2n^3$ per $n \to +\infty$ poiché

$$\frac{2n^3 - 5n^2 - 3n + 11}{2n^3} = 1 - \frac{5}{2n} - \frac{3}{2n^2} + \frac{11}{2n^3} \to 1 - 0 - 0 + 0 = 1 \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

- $n + 5 \sim n$ poiché $\frac{n+5}{n} = 1 + \frac{5}{n} \to 1$ per $n \to +\infty$. Quindi per il principio di sostituzione segue che $(n+5)^3 \sim n^3$ e

$$\frac{2n^3 - 5n^2 - 3n + 11}{(n+5)^3} \sim \frac{2n^3}{n^3} = 2 \to 2 = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n^3 - 5n^2 - 3n + 11}{(n+5)^3}.$$

è doveroso fare la seguente

<u>Osservazione</u>. Il principio di sostituzione $\boxed{\textbf{!!! NON !!!}}$ vale per somme, differenze o potenze, cioè se $a_n \sim a'_n$ e $b_n \sim b'_n$ allora

- $\not\sim$ $a_n + b_n \sim a'_n + b'_n$ per $n \to +\infty$,
- $\not\sim$ $a_n - b_n \sim a'_n - b'_n$ per $n \to +\infty$,
- $\not\sim$ $(a_n)^{b_n} \sim (a'_n)^{b'_n}$ per $n \to +\infty$,

<u>Controesempi</u>. • (per la somma) $a_n := n + 1 \sim n =: a'_n$ e $b_n := -n \sim -n =: b'_n$ ma $a_n + b_n = (n+1) - n = 1$ e $a'_n + b'_n = n - n = 0$ non sono asintotiche in quanto ammettono limiti diversi.

- (per la potenza) $a_n := 1 + \frac{1}{n} \sim 1 =: a'_n$ e $b_n := n \sim n =: b'_n$ ma $(a_n)^{b_n} = (1 + \frac{1}{n})^n$ e $(a'_n)^{b'_n} = 1^n = 1$ non sono asintotiche sempre poiché ammettono limiti diversi.

Concludiamo questo capitolo con un criterio che è utile per studiare limiti che coinvolgono radici n-esime.

<u>PROPOSIZIONE</u> 1.13. *Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione tale che $a_n > 0$ definitivamente e $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: q$ esiste, allora segue che anche*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

<u>ESEMPIO</u>. Sia $a_n = n$. Allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$ e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

<u>ESERCIZIO</u>. Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$. (Suggerimento: $n = \sqrt[n]{n^n}$)

CAPITOLO 2

Serie numeriche

Consideriamo il seguente

<u>PROBLEMA</u>. Sommare tutti gli elementi di una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cioè dare senso alla somma *infinita*

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

L'idea per risolvere questo problema è di considerare prima le *somme parziali* (oppure *ridotte*) n-esime

$$\boxed{s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N}}$$

e poi mandare $n \to +\infty$.

Convergenza e prime Proprietà

<u>Definizione</u> 2.1. Diremo che la *serie numerica* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

- *converge* alla *somma* $s \in \mathbb{R}$, se $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$ e in questo caso scriveremo $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = s$;
- *diverge* a $\pm\infty$, se $\lim_{n\to+\infty} s_n = \pm\infty$ e in questo caso scriveremo $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \pm\infty$;
- è *irregolare* (oppure *oscillante*), se $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è irregolare.

Quindi studiare una serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ significa studiare la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Esempi</u>. • *Serie geometrica.* Se $q \in \mathbb{R}$ allora

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1, \\ +\infty & \text{se } q \geq 1, \\ \text{è irregolare} & \text{se } q \leq -1. \end{cases}}$$

Dimostrazione. 1° caso $q = 1$: Se $q = 1$ allora $q^k = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e quindi

$$s_n = 1^0 + 1^1 + 1^2 + \ldots + 1^n = n + 1 \to +\infty.$$

2° caso $q \neq 1$: In questo caso le somme parziali valgono (cfr. pagina 17)

$$s_n = q^0 + q^1 + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q}{1-q} \cdot q^n.$$

La tesi ora segue dal comportamento della successione geometrica, cfr. pagina 23 □

• *Serie armonica.*

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = +\infty.}$$

Idea della dimostrazione.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{16}\right)}_{\geq 8\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \ldots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = +\infty.$$

□

<u>Osservazione</u>. Useremo la divergenza della serie armonica per dimostrare che (teoricamente) si può costruire una scala autoportante che supera qualsiasi distanza. Perciò consideriamo gradini della lunghezza $l = 2$ e del peso 1 che sistemiamo uno sul altro (senza usare colle o fissaggi) in maniera di superare una distanza massima. Usando solo 2 gradini è molto semplice: dobbiamo sistemare il gradino sotto tale che lo spigolo capita esattamente sotto il (bari)centro del gradino sopra:

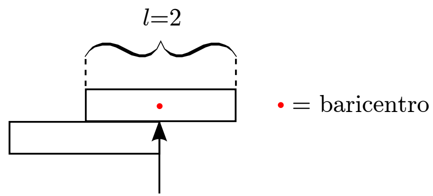


Figura 4. Scala autoportante: 2 gradini.

Continuiamo e sistemiamo un terzo gradino *sotto* i primi due:[1] Se x indica lo sbalzo del secondo al terzo gradino, dalla legge della leva (cfr. Figura 5) segue

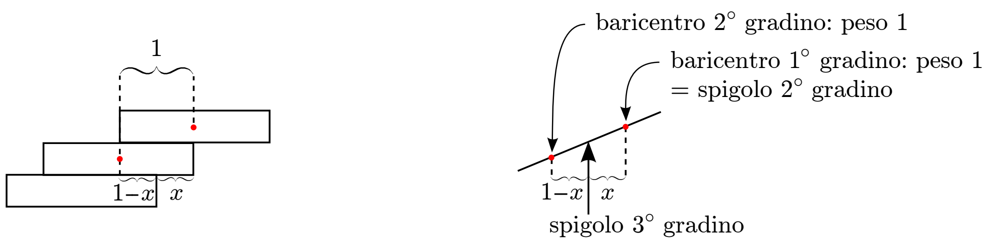


Figura 5. Scala autoportante: 3 gradini.

$$1 \cdot (1 - x) = 1 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}.$$

Continuando in questa maniera arriviamo al punto in cui dobbiamo sistemare il $(n + 1)$-esimo gradino *sotto* quelli n precedenti. Come prima dobbiamo piazzare il gradino sottostante in maniera che lo spigolo capita esattamente sotto il baricentro del corpo fatto dai $n = (n - 1) + 1$ gradini sovrastanti.

[1] sopra non si può aggiungere niente senza che crollasse tutto!

Visto che

– lo spigolo del n-esimo gradino capita esattamente sotto il baricentro del corpo fatto dai primi $(n-1)$ gradini (e quindi dal peso $n-1$) e

– la distanza tra lo spigolo del n-esimo gradino e il suo baricentro è 1

sempre per la legge della leva segue (cfr. Figura 6)

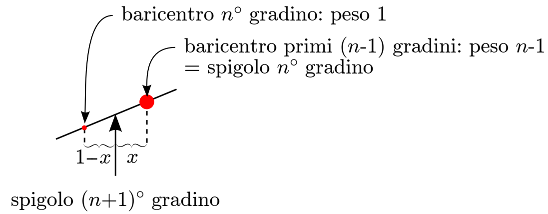
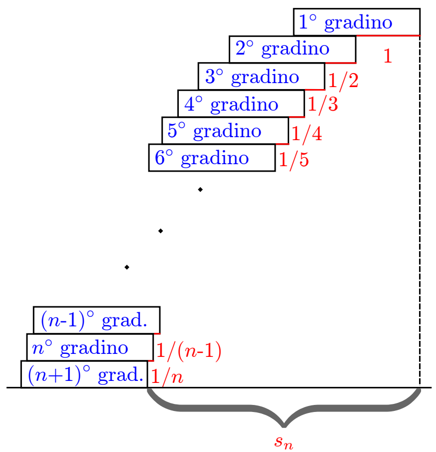


FIGURA 6. Scala autoportante: $n+1$ gradini.

$$1 \cdot (1-x) = (n-1) \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{n}.$$



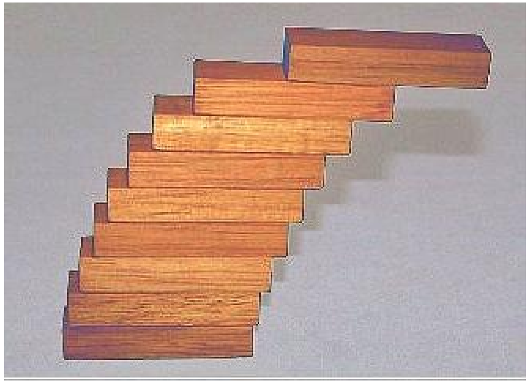


FIGURA 7. Scala autoportante che supera (teoricamente) qualsiasi distanza.

Così con $n+1$ gradini abbiamo costruita una scala autoportante che supera la distanza

$$s_n := 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{n} \to +\infty \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Comunque, con 10.000 gradini di lunghezza $l = 2m$ in questa maniera si superano appena $9,21m$ e per superare $10m$ servono addirittura 22028 gradini!

- *Serie di Mengoli.*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots = 1.$$

Dimostrazione. Per induzione si può dimostrare (Esercizio!)[2] che

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \qquad \text{per } n \to +\infty. \qquad \square$$

Solo in casi rari è possibile trovare una formula esplicita semplice per le somme parziali di una serie. Di conseguenza si pone il seguente

Problema. Come si può studiare la convergenza di una serie $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ *senza* conoscere una formula semplice per le somme parziali s_n?

Evidenziamo che così non chiediamo più di calcolare la somma della serie ma soltanto di verificare che la somma esiste e sia finita. Iniziamo con la seguente

[2] In alternativa si può usare il seguente trucco:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\overbrace{(k+1)-k}^{=1}}{k \cdot (k+1)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)}_{=\text{somma telescopica}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Proposizione 2.2 (*Condizione necessaria*). *Se* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *converge, allora* $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$.

Dimostrazione. Sia $s := \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$, cioè $s = \lim_{n\to+\infty} s_n$. Allora anche $\lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = s$ e quindi $\lim_{n\to+\infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$. Così risulta

$$\begin{aligned} s_n - s_{n-1} &= (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n) - (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) \\ &= a_n \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty. \end{aligned}$$

□

Evidentemente questa condizione è soltanto necessaria ma *non* sufficiente per la convergenza come si vede dalla serie armonica. Come vedremo nel seguente paragrafo l'ordine in $\mathbb{R}$ ci aiuta a risolvere (parzialmente) il problema posto sopra.

Serie a Termini Positivi

Se $a_k \geq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$ cioè $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente. Quindi possiamo usare il teorema sulla regolarità delle successioni monotone (cfr. pagina 31) per studiare il comportamento della serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. In questa maniera otteniamo

Teorema 2.3. *Se* $a_k \geq 0$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$ *(basta anche* $a_k \geq 0$ *definitivamente), allora*

$$\text{la serie} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \begin{cases} \text{converge} & \text{se e solo se } (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ è limitata,} \\ \text{diverge a } +\infty & \text{se e solo se } (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ non è limitata.} \end{cases}$$

Quindi per una serie a termini positivi basta verificare la limitatezza della successione delle somme parziali per ottenere convergenza. Inoltre risulta che una serie a termini positivi non può essere irregolare.

<u>Esempio</u>. Consideriamo la serie a termini positivi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \qquad = \textit{serie esponenziale}$$

Per verificare la convergenza osserviamo che per $k \geq 2$ vale

$$k! = 1 \cdot \underbrace{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}_{\geq 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{k-1}} \geq 2^{k-1} \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{k!} \leq \tfrac{1}{2^{k-1}} = 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^k.$$

Questa relazione vale però anche per $k = 0$ e $k = 1$ e quindi risulta che

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} \leq 2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \leq 2 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4 \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Quindi $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata e di conseguenza $s := \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ converge. Inoltre dal teorema del confronto segue che $s \leq 4$.

<u>Osservazione</u>. In seguito dimostreremo che $s = e$, cioè

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e.}$$

Nell'esempio precedente per dimostrare la convergenza della serie esponenziale l'abbiamo confrontata con la serie geometrica con $q = \frac{1}{2}$. Nel seguente risultato generalizziamo questa idea e consideriamo 2 serie qualsiasi.

<u>Proposizione</u> 2.4 (*Criterio del confronto*). *Sia* $0 \leq a_k \leq b_k$ *definitivamente. Allora*

$$\boxed{\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} b_k}_{maggiorante} \quad \textit{converge} \qquad \Rightarrow \qquad \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k}_{minorante} \quad \textit{converge}}$$

oppure

$$\boxed{\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k}_{minorante} \quad \textit{diverge} \qquad \Rightarrow \qquad \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} b_k}_{maggiorante} \quad \textit{diverge}}$$

<u>Esempio</u>. Consideriamo la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Visto che $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$ per ogni $k \geq 1$ segue dalla divergenza della serie armonica $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ la divergenza di $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Del criterio precedente esiste anche una versione asintotica.

<u>PROPOSIZIONE</u> 2.5 (*Criterio del confronto, versione asintotica*). *Sia* $a_k \geq 0$ *e* $b_k > 0$ *definitivamente tali che converge*

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{a_k}{b_k} =: l \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \ \textit{converge} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \ \textit{converge}$$

oppure

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \ \textit{diverge} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \ \textit{diverge}$$

Se inoltre $l \neq 0$ *(in particolare se* $a_k \sim b_k$ *per* $k \to +\infty$*), allora valgono anche le implicazioni opposte, cioè*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \ \textit{converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \ \textit{converge}$$

oppure

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \ \textit{diverge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \ \textit{diverge}$$

<u>Esempio</u>. Consideriamo la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Per studiare la convergenza confrontiamola con la serie di Mengoli $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\cdot(k+1)}$. Allora

$$\frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k\cdot(k+1)}} = \frac{k\cdot(k+1)}{k^2} = 1 + \frac{1}{k} \to 1 = l \neq 0 \qquad \text{per } k \to +\infty.$$

Quindi, visto che la serie di Mengoli converge, converge anche la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

<u>Osservazione</u>. Usando metodi più sofisticati si può dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

<u>Problema</u>. Data una serie, trovare una serie minorante divergente oppure una serie maggiorante convergente per applicare il Criterio del Confronto.

Una possibilità per affrontare questo problema è di usare come seconda serie la serie geometrica $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ per $q > 0$. Sfruttando questa idea si possono dimostrare i seguenti due criteri.

<u>Proposizione</u> 2.6 (*Criterio della Radice*). *Sia $a_k \geq 0$ definitivamente. Se esiste*

$$q := \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k},$$

allora la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

- *converge se $q < 1$,*
- *diverge se $q > 1$,*
- *non si può concludere nulla sul comportamento della serie se $q = 1$.*

<u>Esempio</u>. Sia $a_k := \frac{a^k}{k^k}$ per $a > 0$ fisso. Allora

$$\sqrt[k]{a_k} = \frac{a}{k} \to 0 = q < 1 \qquad \text{per } k \to +\infty$$

e quindi la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge.

<u>Proposizione</u> 2.7 (*Criterio del Rapporto*). *Sia $a_k > 0$ definitivamente. Se esiste*

$$q := \lim_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k},$$

allora la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

- *converge se $q < 1$,*
- *diverge se $q > 1$,*
- *non si può concludere nulla sul comportamento della serie se $q = 1$.*

<u>Esempio</u> (*Serie Esponenziale*). Sia $a_k := \frac{a^k}{k!}$ per $a > 0$ fisso. Allora

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{a^k}{k!}} = \frac{a^{k+1} \cdot k!}{\underbrace{(k+1)!}_{=k! \cdot (k+1)} \cdot a^k} = \frac{a}{k+1} \to 0 = q < 1 \qquad \text{per } k \to +\infty$$

e quindi la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$ converge.

Concludiamo questo paragrafo con un importante

ESEMPIO (*Serie Armonica Generalizzata*). Sia $a_k := \frac{1}{k^\alpha}$ per $\alpha \in \mathbb{R}$ fisso. Allora sappiamo per il criterio del confronto che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

- diverge per $\alpha = 1 \Rightarrow$ diverge per ogni $\alpha \leq 1$,
- converge per $\alpha = 2 \Rightarrow$ converge per ogni $\alpha \geq 2$

dove le implicazioni seguono dal criterio del confronto: Se

$$\alpha \leq 1 \quad \Rightarrow \quad k \geq k^\alpha \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{k} \leq \tfrac{1}{k^\alpha} \quad \text{cioè} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \tfrac{1}{k} \quad \text{è un minorante divergente,}$$

$$\alpha \geq 2 \quad \Rightarrow \quad k^2 \leq k^\alpha \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{k^2} \geq \tfrac{1}{k^\alpha} \quad \text{cioè} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \tfrac{1}{k^2} \quad \text{è un maggiorante convergente}$$

della serie armonica generalizzata $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Mancano però i parametri $\alpha \in (1, 2)$. Quindi si pone la domanda come si comporta la serie armonica generalizzata per questi parametri. Come vedremo in seguito (cfr. pagina 216) vale la seguente

PROPOSIZIONE 2.8.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad \textit{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 1}$$

OSSERVAZIONE. La serie armonica generalizzata è legata all'ipotesi di Riemann, considerata il più importante problema aperto della matematica.

Serie a Termini di Segno Variabili

Abbiamo visto che la serie armonica diverge:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = +\infty.$$

Cioè facendo un numero sufficientemente grande di passi di lunghezza $\frac{1}{k}$ in avanti si supera qualsiasi limite.

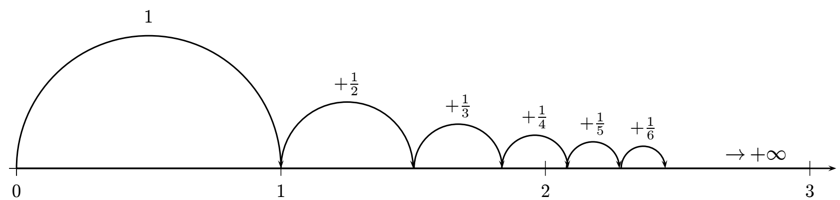


Figura 8. Divergenza della serie armonica

Problema. Che cosa succede se dopo ogni passo invertiamo direzione o, in termini matematici, se i termini cambiamo segno? Cioè come si comporta la *Serie di Leibniz*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \pm \ldots \; ?$$

Per ottenere una idea tracciamo un grafico simile a quello precedente:

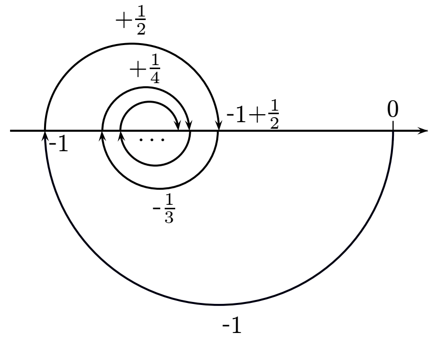


FIGURA 9. Convergenza della serie di Leibniz.

Dalla Figura 9 si può avere l'impressione che la serie converge. Ciò è infatti vero per la

PROPOSIZIONE 2.9 (*Criterio di Leibniz*). *Se la successione* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *è*

- *decrescente, e*
- *infinitesima*

allora la serie $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \cdot a_k =: s \in \mathbb{R}$ *converge. Inoltre vale* $|s - s_n| \leq a_{n+1}$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$, *cfr. Figura 10.*

FIGURA 10. Criterio di Leibniz: Stima dell'errore.

<u>Osservazione</u>. Si può verificare che

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \cdot \frac{1}{k} = -\ln(2)$$

<u>Esempio</u>. Sia $a_k := \frac{1}{k^\alpha}$ per $\alpha > 0$. Allora $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è decrescente e infinitesima e quindi

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \cdot \frac{1}{k^\alpha} \qquad \text{converge per ogni } \alpha > 0.$$

Confrontando la serie di Leibniz $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \cdot \frac{1}{k}$ con la serie armonica $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ ricaviamo un'importante

<u>Osservazione</u>. Se

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ converge}}_{\textit{convergenza (semplice)}} \qquad \not\Rightarrow \qquad \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \text{ converge}}_{\textit{convergenza assoluta}}$$

Infatti per $a_k = (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$ la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge mentre

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{+\infty} \left|(-1)^k \cdot \frac{1}{k}\right| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \qquad \text{diverge.}$$

Invece vale il contrario:

<u>Proposizione</u> 2.10. *Se* $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ *converge, allora converge anche* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$*, cioè la convergenza assoluta implica la convergenza semplice.*

Questa proposizione è molto utile in quanto la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ è sempre a termini positivi e quindi può essere studiata con i criteri per tale serie. Per esempio, applicando il criterio del rapporto e della radice a $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ otteniamo la seguente

<u>Proposizione</u> 2.11. *Se*

$$q := \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \qquad \textit{oppure} \qquad q := \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *converge assolutamente e quindi anche semplicemente.*

<u>Esempio</u> (*Serie Esponenziale*). Sia $a_k := \frac{a^k}{k!}$ per $a \in \mathbb{R}$ fisso. Allora

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\frac{|a|^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{|a|^k}{k!}} = \frac{|a|}{k+1} \to 0 = q < 1$$

e quindi la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge.

<u>Osservazione</u>. In seguito (vedi pagina 156) dimostreremo che

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a \qquad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}.}$$

Concludiamo con un'osservazione abbastanza sorprendente.

<u>Osservazione</u>. Mentre per una somma finita l'ordine degli addendi non influisce al risultato, p.e.

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 = 4 + 1 + 3 + 2 = 3 + 1 + 2 + 4 = \dots$$

ciò in generale *non* vale per le serie, cioè per somme *infinite*.

Per esempio si può verificare che per qualsiasi $s \in \overline{\mathbb{R}}$ esiste un "riordinamento" della serie di Leibniz $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$, cioè un ordine per sommare gli elementi della successione $\left((-1)^k \cdot \frac{1}{k}\right)_{k \geq 1}$, che converge esattamente alla somma s. In altre parole, sommando gli elementi $(-1)^k \cdot \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, 3, 4, \dots$ nell'ordine giusto si può avere qualsiasi somma. In questo senso una somma infinita non è più commutativa, cioè indipendente dall'ordine degli addendi.

Questo fenomeno, però, si verifica solo per le serie che convergono ma non convergono assolutamente come per esempio la serie di Leibniz. Per una serie che converge assolutamente invece ogni riordinamento converge alla stessa somma.

CAPITOLO 3

Funzioni Reali di una Variabile Reale

Definizione 3.1. Una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R}$ si dice *funzione reale di una variabile reale* (con dominio X e codominio Y).

In questo caso il grafico

$$G(f) = \Big\{ \big(x, f(x)\big) : x \in X \Big\} \subset \mathbb{R}^2,$$

cioè si può disegnare nel piano cartesiano xy.

ESEMPIO. Definiamo $A(r) :=$ area di un cerchio di raggio $r \geq 0$. Questa regola definisce una funzione $A : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ con immagine $A([0, +\infty)) = [0, +\infty)$. Inoltre $A(r) = \pi r^2$ e quindi il grafico $G(A) \subset \mathbb{R}^2$ è dato da (parte di) una parabola:

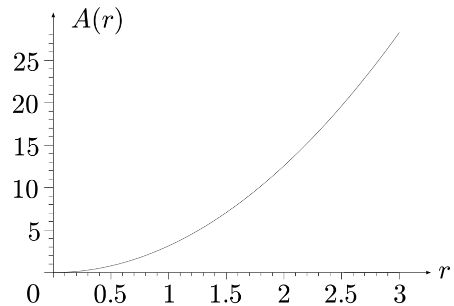


FIGURA 11. Grafico di A.

Operazioni e Composizione tra Funzioni

Somma, Differenza, Prodotto e Frazioni di Funzioni. Le operazioni algebriche si possono facilmente estendere dai numeri reali alle funzioni reali. Se $f : X_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : X_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono due funzioni allora definiamo per $X := X_1 \cap X_2$

- la *somma* $f + g : X \to \mathbb{R}$, $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ per $x \in X$;
- la *differenza* $f - g : X \to \mathbb{R}$, $(f - g)(x) := f(x) - g(x)$ per $x \in X$;
- il *prodotto* $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ per $x \in X$;
- la *frazione* $\frac{f}{g} : X_0 \to \mathbb{R}$, $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ per $x \in X_0 := \{z \in X : g(z) \neq 0\}$;

Un altro modo per costruire una nuova funzione da due funzioni date è la

Composizione di funzioni. Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ allora la funzione

$$g \circ f : X \to Z, \quad (g \circ f)(x) := g\big(f(x)\big),\ x \in X$$

si dice *funzione composta di f e g*.

<u>Esempio</u>. Se $f(x) = |x|$ e $g(x) = \sin(x)$ con $x \in \mathbb{R}$ allora $(g \circ f)(x) = \sin|x|$. In questo esempio possiamo anche considerare $f \circ g$ per il quale si ottiene $(f \circ g)(x) = \big|\sin(x)\big|$. Quindi in generale $f \circ g \neq g \circ f$.

Proprietà di Funzioni Reali

Elenchiamo in seguito alcune proprietà importanti di funzioni reali.

Funzioni Invertibili.

Definizione 3.2. Una funzione $f : X \to Y$ si dice

- *iniettiva*, se per ogni $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$, cioè se per ogni $y \in Y$ esiste *al più* un $x \in X$ con $f(x) = y$;
- *suriettiva* se per ogni $y \in Y$ esiste *almeno* un $x \in X$ con $f(x) = y$;
- *biettiva* se f è iniettiva e suriettiva, cioè se per ogni $y \in Y$ esiste *un unico* $x \in X$ con $f(x) = y$.

Esempio. Consideriamo la funzione $f_k : X_k \to Y_k$, $f_k(x) := x^2$ per diverse scelte di $X_k, Y_k \subseteq \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$:

(a) $X_1 = \mathbb{R}$, $Y_1 = \mathbb{R}$. In questo caso
- per $0 < y \in Y_1$ esistono due $x_1, x_2 \in X_1$, $x_1 = -\sqrt{y} \neq x_2 = +\sqrt{y}$ con $(x_1)^2 = (x_2)^2 = y$ e quindi f_1 non è iniettiva;
- per $y < 0$ non esiste $x \in X_1$ tale che $f_1(x) = x^2 = y$ e quindi f_1 non è suriettiva.

Riassumendo f_1 non è né iniettiva né suriettiva.

(b) $X_2 = \mathbb{R}$, $Y_2 = [0, +\infty)$. In questo caso
- per $0 < y \in Y_2$ esistono due $x_1, x_2 \in X_2$, $x_1 = -\sqrt{y} \neq x_2 = +\sqrt{y}$ con $(x_1)^2 = (x_2)^2$ e quindi f_2 non è iniettiva;
- per $y \in Y_2$ definiamo $x := +\sqrt{y} \in X_2$ che implica $f_2(x) = x^2 = y$ e quindi f_1 è suriettiva.

Riassumendo f_2 non è iniettiva ma è suriettiva.

(c) $X_3 = [0, +\infty)$, $Y_3 = \mathbb{R}$. In questo caso per $0 \leq y \in Y_3$ $x := +\sqrt{y}$ è l'unico $x \in X_3$ con $x^2 = y$ mentre per $0 > y \in Y_3$ non esiste $x \in X_3$ tale che $f_3(x) = x^2 = y$. Quindi

- f_3 è iniettiva;
- f_3 non è suriettiva.

Riassumendo f_3 è iniettiva ma non è suriettiva.

(d) $X_4 = [0, +\infty)$, $Y_4 = [0, +\infty)$. In questo caso per ogni $y \in Y_4$ $x := +\sqrt{y}$ è l'unico $x \in X_4$ con $x^2 = y$. Quindi

- f_4 è iniettiva;
- f_4 è suriettiva.

Riassumendo f_4 è biettiva.

Osservazioni. • Al livello del grafico $G(f)$ per una funzione reale $f : X \to Y$ vale:

- f è iniettiva $\iff$ ogni retta orizzontale attraverso un punto $y \in Y$ interseca $G(f)$ *al più* una volta;
- f è suriettiva $\iff$ ogni retta orizzontale attraverso un punto $y \in Y$ interseca $G(f)$ *almeno* una volta;
- f è biettiva $\iff$ ogni retta orizzontale attraverso un punto $y \in Y$ interseca $G(f)$ *un'unica* volta;

cfr. Figura 12

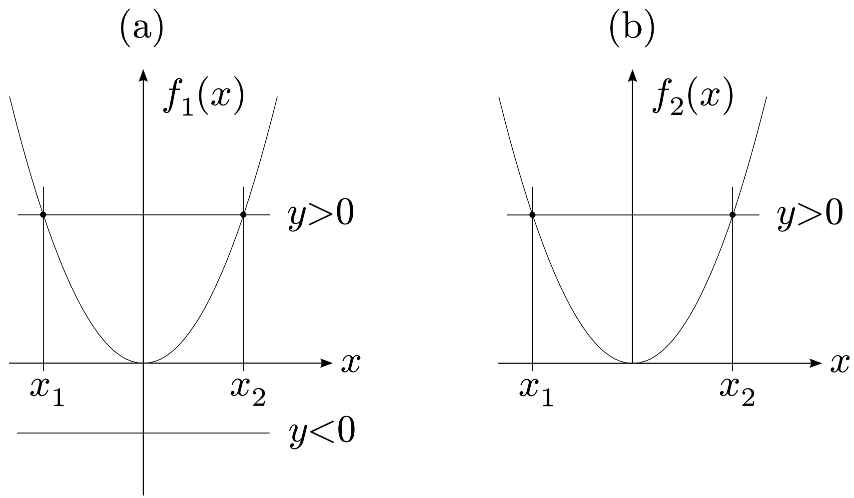


FIGURA 12. Funzione (a) non iniettiva, non suriettiva; (b) non iniettiva ma suriettiva; (c) iniettiva ma non suriettiva; (d) iniettiva e suriettiva cioè biettiva.

- Una funzione $f : X \to Y$ è biettiva se e solo se esiste una funzione $g : Y \to X$ tale che
  - $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = x$ per ogni $x \in X$, e
  - $(f \circ g)(y) = f\big(g(y)\big) = y$ per ogni $y \in Y$.

  In questo caso g è unica, si chiama *funzione inversa* di f e si scrive $f^{-1} := g$.

- Dal fatto che $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$ segue che i grafici $G(f)$ di f e $G(f^{-1})$ di f^{-1} sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$, cfr. Figura 13.

ESEMPIO. Abbiamo visto nell'esempio precedente che la funzione $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) := x^2$ è invertibile. In questo caso la funzione inversa $f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ è data da $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. In particolare, $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2}$ *!!!*

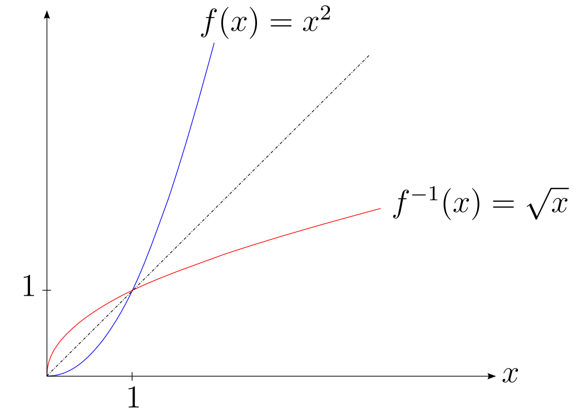


FIGURA 13. Grafico di $f(x) = x^2$ e $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Funzioni Limitate. Una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice

- *limitata superiormente* se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq M$ per ogni $x \in X$;
- *limitata inferiormente* se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $m \leq f(x)$ per ogni $x \in X$;
- *limitata* se è superiormente e inferiormente limitata, cioè se esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tale che $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in X$.

ESEMPI.
- $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ è inferiormente ma non superiormente limitata;
- $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ non è inferiormente né superiormente limitata;
- $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$ è limitata, cfr. pagina 70.

Funzioni Simmetriche. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un dominio simmetrico rispetto a $x = 0$ (cioè $x \in X \Rightarrow -x \in X$). Allora $f : X \to \mathbb{R}$ si dice

- *pari*, se $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in X$;
- *dispari*, se $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in X$.

<u>Osservazioni</u>.

- f è pari $\iff$ il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse y;
- f è dispari $\iff$ il grafico di f è simmetrico rispetto all'origine, cfr. Figura 14

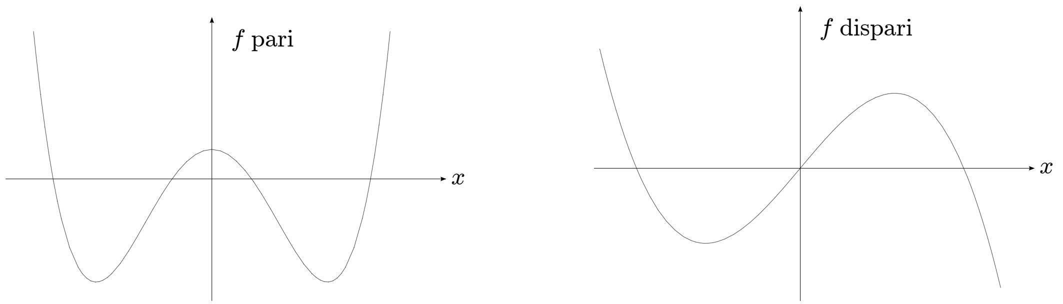


Figura 14. Funzione pari e dispari.

- Se f è dispari e $0 \in X$ (= dominio di f) allora $f(0) = 0$.
- Valgono le seguente regole per prodotto e rapporto tra funzioni pari (=p) e dispari (=d):

$f_1 \cdot f_2$ opp. $\frac{f_1}{f_2}$	f_1=p	=d
f_2=p	p	d
=d	d	p

Inoltre vale "pari ± pari = pari" e "dispari ± dispari = dispari".

<u>Esempi</u>.
- $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ è pari, $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ è dispari.
- Più in generale si ha: $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$ è
  - pari $\iff$ n è pari,
  - dispari $\iff$ n è dispari.
- $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 4$ è pari, $g(x) = -5x^3 - 2x$ è dispari, quindi $r(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^4-2x^2+4}{-5x^3-2x}$ è dispari.

Funzioni Monotone. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$. Allora $f : X \to \mathbb{R}$ si dice
- *crescente*, se $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- *strettamente crescente*, se $f(x_1) < f(x_2)$;
- *decrescente*, se $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- *strettamente decrescente*, se $f(x_1) > f(x_2)$.
- *(strettamente) monotona*, se è (strettamente) crescente oppure (strettamente) decrescente.

<u>Esempi</u>.
- $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ è strettamente crescente;
- $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ non è monotona;
- $f(x) = x^2$, $x \in (-\infty, 0]$ è decrescente.

Funzioni Periodiche. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e $T > 0$ tale che $x + T \in X$ per ogni $x \in X$. Allora $f : X \to \mathbb{R}$ si dice *periodica di periodo* T, se T è il più piccolo numero > 0 tale che $f(x + T) = f(x)$ per ogni $x \in X$.

<u>Esempio</u>. $f(x) = \sin(x)$ è periodica di periodo $T = 2\pi$.

Funzioni Elementari

Nel seguito iniziamo una lista di funzioni elementari che utilizzeremo nello svolgimento del corso.

Polinomi. Se $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ allora l'espressione

$$p(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$$

si dice *polinomio*. Se $a_n \neq 0$ allora n si dice *grado* di p. Un polinomio della forma $p(x) = ax^n$ si dice anche *monomio*.

<u>Esempio</u>. $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 1$ è un polinomio di grado $n = 3$.

Funzioni Razionali. Se p e $q \neq 0$ sono due polinomi di grado n ed m rispettivamente, l'espressione

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

si chiama *funzione razionale* con grado $n - m$. Il dominio X della funzione razionale r è data da $X = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$.

<u>Esempio</u>. $r(x) = \frac{2x^2-1}{2x^5-10x^3+8x}$ è una funzione razionale di grado $2 - 5 = -3$ e con dominio $X = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Potenze ed Esponenziali.

<u>Problema</u>. Come si può definire a^r per $a > 0$ e $r \in \mathbb{R}$, per esempio quanto vale

$$2^\pi = ?$$

Per risolvere questo problema, cioè per dare una definizione rigorosa di a^r, useremo alcuni risultati del Capitolo 1 procedendo in 2 passi:

1° Passo: $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Se $p \in \mathbb{Z}$ e $0 \neq q \in \mathbb{N}$, allora usando le radici (introdotte con il metodo di Erone a pagina 33) definiamo

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} := (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

Per esempio

$$a^{-\frac{3}{4}} := \sqrt[4]{a^{-3}} = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^3, \qquad 2^{3,141} := \sqrt[1000]{2^{3141}} = \left(\sqrt[1000]{2}\,\right)^{3141}.$$

Si osservi che per definire $\sqrt[q]{a}$, per q pari, deve essere $a > 0$.

2° Passo: $r \in \mathbb{R}$. Per semplificare la presentazione consideriamo solo il caso $a > 1$ e $r > 0$, gli altri casi si possono trattare similmente.
Se $r \in \mathbb{R}$ ha la rappresentazione $r = p, \alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \dots \alpha_n\alpha_{n+1} \dots$ allora definiamo

$$r_n := p, \alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \dots \alpha_n 000 \dots = \frac{p\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \dots \alpha_n}{10^{n+1}} \in \mathbb{Q}.$$

Per esempio per $r = \pi$ vale $r_2 = 3,141 = \frac{3141}{1000}$.

Così abbiamo definito una successione $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con le proprietà

- $r_n \in \mathbb{Q}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- $r_n \in [p, p+1]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = r$ poiché $0 \leq r - r_n = 0,0\ldots0\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots \leq 10^{-n} \to 0$ per $n \to +\infty$,
- $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente.

Visto che $r_n \in \mathbb{Q}$ possiamo definire

$$a_n := a^{r_n}$$

come nel primo passo. Siccome la funzione a^x con $x \in \mathbb{Q}$ per $a > 1$ è crescente, la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è

- crescente poiché $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente, e
- limitata poiché $a_n \in [a^p, a^{p+1}]$.

Quindi per il teorema sulle successioni monotone limitate (cfr. pagina 31) il limite

$$a^r := \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n}$$

converge e definisce la potenza a^r di base a ed esponente r.

<u>Proposizione</u> 3.3. *Per le potenze valgono le regole*

- $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ *per ogni* $a > 0$, $r, s \in \mathbb{R}$;
- $(a^r)^s = a^{r\cdot s}$ *per ogni* $a > 0$, $r, s \in \mathbb{R}$;
- $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$ *per ogni* $a, b > 0$, $r \in \mathbb{R}$.

Fissando la base e facendo variare l'esponente come argomento, oppure il viceversa, possiamo definire altre 2 funzioni elementari.

Definizione 3.4. • $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^r$ per $r \in \mathbb{R}$ fisso si dice *funzione potenza di esponente r*, cfr. Figura 15.

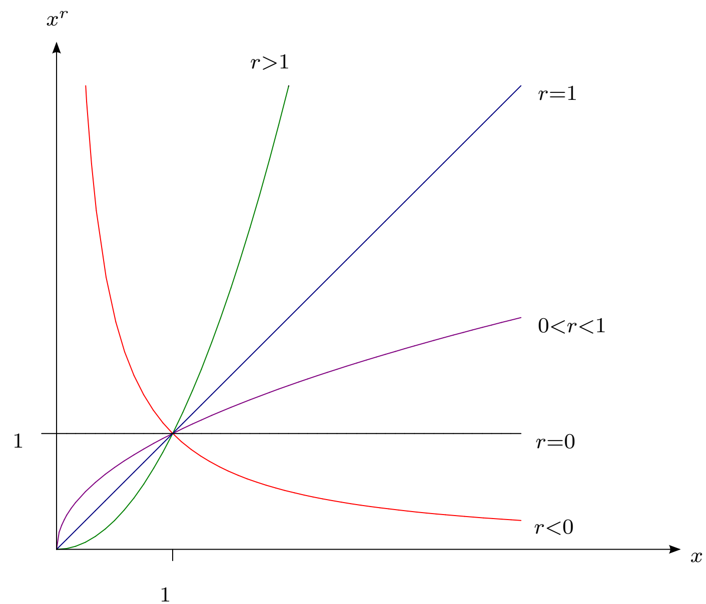


FIGURA 15. La funzione potenza.

OSSERVAZIONE. Per $r \geq 0$ si può estendere la funzione potenza x^r su $[0, +\infty)$ definendo $0^r := 0$. Inoltre per certi valori di $r \in \mathbb{R}$ si può definire x^r anche per $x < 0$, per esempio $x^2 = x \cdot x$ oppure $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$.

- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := a^x$ per $a > 0$ fisso si dice *funzione esponenziale di base a*, cfr. Figura 16.

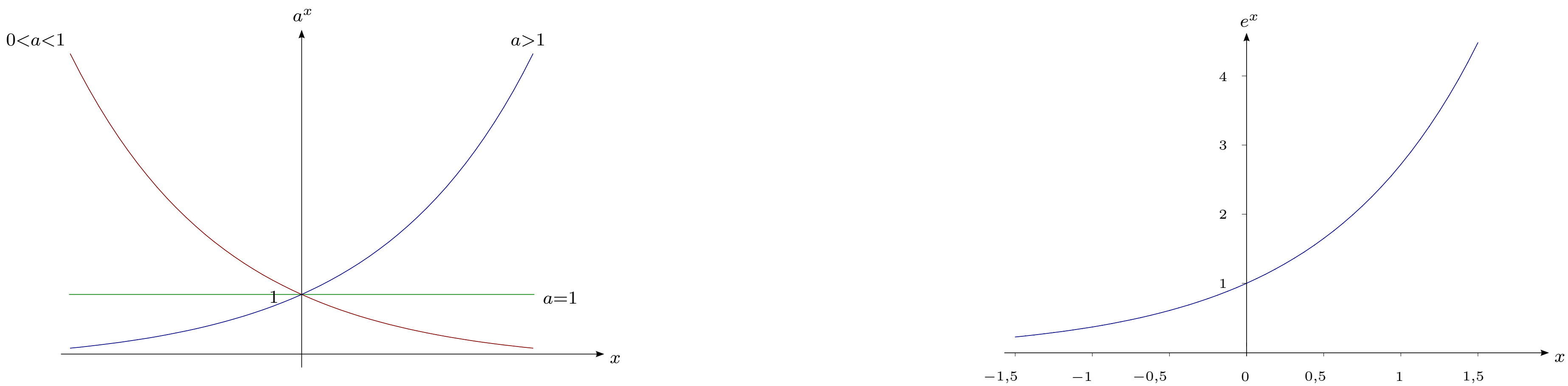


FIGURA 16. Funzione esponenziale di base a e funzione esponenziale.

L'esponenziale più importante è quello in base $a = e$ che si chiama *funzione esponenziale* e che fornisce una delle funzioni più importanti della matematica.

Funzioni Iperboliche. Con la funzione esponenziale definiamo le seguenti tre funzioni:

- *Coseno Iperbolico* $\cosh(x) := \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- *Seno Iperbolico* $\sinh(x) := \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- *Tangente Iperbolico* $\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$, $x \in \mathbb{R}$.

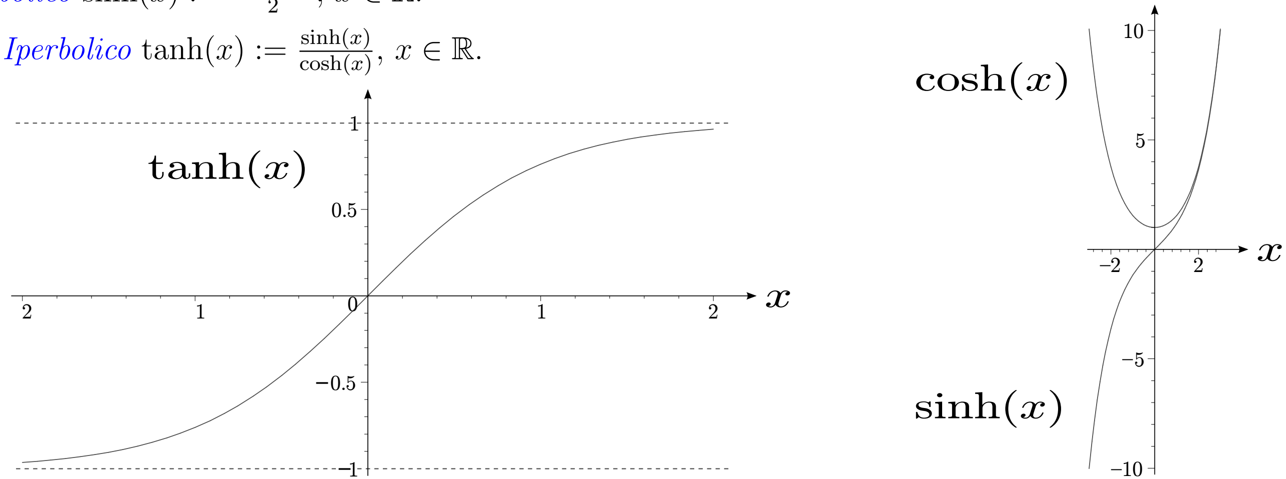


Figura 17. Le funzioni iperboliche.

Osservazioni. • La funzione cosh è pari e inferiormente limitata. Infatti $\cosh(x) \geq 1$, in particolare $\cosh(x) \neq 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il grafico di cosh si chiama anche *"catenaria"* in quanto l'andamento è quello caratteristico di una catena che si lascia pendere (cfr. Figura 18).

Figura 18. La catenaria.

- La funzione sinh è dispari e strettamente crescente.
- La funzione tanh è dispari, strettamente crescente e limitata: $-1 \leq \tanh(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- Vale la relazione $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Funzioni Circolari. Per definire le funzioni circolari dobbiamo dapprima misurare angoli in *radianti* (cfr. Figura 19).

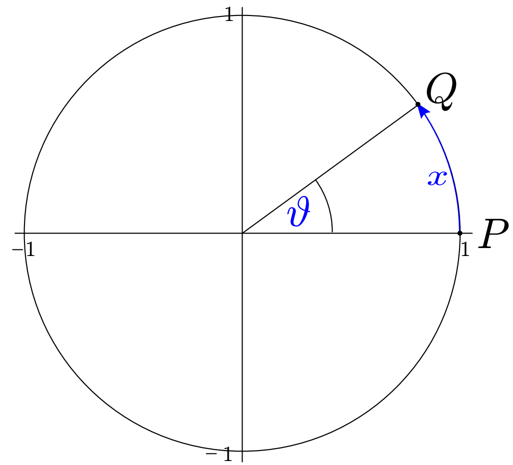


FIGURA 19. Misura di angoli in radianti.

Quindi l'angolo $\vartheta = x$ (radianti), dove $x =$ lunghezza dell'arco $PQ \in [0, 2\pi)$ orientato in senso antiorario. Per $x < 0$ oppure $x \geq 2\pi$ si può identificare x con $x \bmod 2\pi$. Per esempio $90° = \frac{\pi}{2}$, $180° = \pi$, $270° = \frac{3\pi}{2}$, $360° = 2\pi$ e $3\pi \bmod 2\pi = \pi$, $-5\pi \bmod 2\pi = \pi$ etc.

Introduciamo ora con $\vartheta = x$ radianti graficamente le funzioni

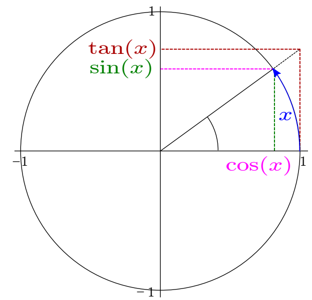
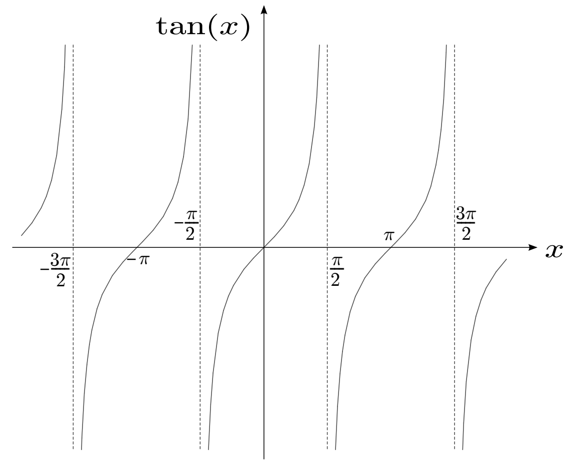


Figura 20. Definizione delle funzioni circolari.

- *Seno*: $\sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$,
- *Coseno*: $\cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$,
- *Tangente*: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{2k+1}{2} \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$.



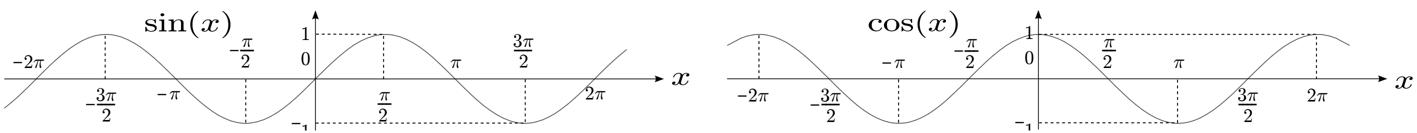


Figura 21. Grafici di sin, cos e tan.

Osservazioni.

- cos è pari, limitata ($-1 \leq \cos(x) \leq 1 \;\forall\, x \in \mathbb{R}$) e periodica di periodo $T = 2\pi$.
- sin è dispari, limitata ($-1 \leq \sin(x) \leq 1 \;\forall\, x \in \mathbb{R}$) e periodica di periodo $T = 2\pi$.
- tan è definita per $x \neq \frac{2k+1}{2} \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, dispari, né inferiormente né superiormente limitata ma periodica di periodo $T = \pi$.

- Per le funzioni circolari valgono numerose relazioni, per esempio

  - $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (ciò segue dal Teorema di Pitagora, cfr. Figura 20);

  - $\sin(x) - \sin(y) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$;

  - $\cos(x) - \cos(y) = -2 \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

  Le ultime due relazioni si chiamano *formule di prostaferesi*.

Limiti delle Funzioni Reali

Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e un punto $c \in \overline{\mathbb{R}}$ consideriamo il seguente

PROBLEMA. Studiare il comportamento di $f(x)$ per x vicino (ma differente!) a c.

Abbiamo già considerato un caso particolare di questo problema:

ESEMPIO. Se $X = \mathbb{N}$ e $c = +\infty$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ diventa una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dove $a_n = f(n)$ e il problema si trasforma nello studio di a_n per n "vicino a" $+\infty$, cioè ci ha portato al concetto di limite per le successioni.

Per analizzare questo problema per una funzione reale qualsiasi ci serve dapprima una

Definizione 3.5. $c \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice *punto di accumulazione* dell'insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ se esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

- $x_n \in X$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- $x_n \neq c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = c$.

I primi 2 punti si possono brevemente scrivere come $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus \{c\}$. Quindi c è un punto di accumulazione di X se in $X \setminus \{c\}$ si può avvicinare a piacere al punto c.

Esempi.

- $c = 3$ *non* è un punto di accumulazione di $\mathbb{N}$ in quanto non esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N} \setminus \{3\}$ con $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 3$.
- $c = +\infty$ è infatti l'unico punto di accumulazione di $\mathbb{N}$.
- $c = -1$ *non* è un punto di accumulazione di $[0, +\infty)$.
- Se $I \subset \mathbb{R}$ è un qualsiasi intervallo con gli estremi a e b, allora c è un punto di accumulazione di $I \iff c \in I \cup \{a, b\} = [a, b]$.

Ora siamo in grado di generalizzare il concetto di limite dalle successioni alle funzioni reali arbitrarie.

Definizione 3.6 (*Limiti per le Funzioni*). Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale e sia $c \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di X. Allora diremo che

$f(x)$ tende a $l \in \overline{\mathbb{R}}$ per x tendente a c

se per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus \{c\}$ con $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = c$ segue che $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l$. In questo caso scriviamo

$$\boxed{\lim_{x\to c} f(x) = l} \qquad \text{oppure} \qquad \boxed{f(x) \to l \text{ per } x \to c}.$$

OSSERVAZIONI.

- Il limite, se esiste, è unico.
- Se nel seguito scriviamo "$\lim\limits_{x\to c} f(x)$" supponiamo sempre che c sia un punto di accumulazione del dominio X di f. Per esempio $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{x}$ *non* è ammesso poiché $c = -1$ non è un punto di accumulazione del dominio $X = [0, +\infty)$ della radice.
- Il fatto che nella definizione di limite consideriamo soltanto successioni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con limite c ma $x_n \neq c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ riflette il fatto che studiamo $f(x)$ per x vicino ma differente a c.
- Il concetto di limite per le funzioni come definito sopra si basa su quello del limite per le successioni. Esiste anche un'altra possibilià di introdurre limiti per le funzioni che non fa riferimento alle successioni. Questa alternativa dipende però dal fatto se c ed l sono finiti oppure infiniti e quindi servono molti casi per coprire tutte le possibilità, cfr. pagina 261 nell'Appendice.

ESEMPI.

- $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = 0$. Dal grafico su pagina 71 si vede che $0 \leq |\sin(x)| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi per $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}\setminus\{0\}$ con $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ risulta

$$\underbrace{0}_{\to 0} \leq |\sin(x_n)| \leq \underbrace{|x_n|}_{\to 0} \qquad \text{per } n \to +\infty$$

e per il teorema dei Carabinieri segue $\sin(x_n) \to 0$ per $n \to +\infty$. Allora $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = 0$ per definizione.

- $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$. Per la formula di prostaferesi (cfr. pagina 72) segue

$$1 - \cos(x) = \cos(0) - \cos(x) = 2\sin^2\left(\tfrac{x}{2}\right).$$

Allora per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}\setminus\{0\}$ con $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ risulta

$$1 - \cos(x_n) = 2\sin^2\left(\tfrac{x_n}{2}\right) \to 2\cdot 0^2 = 0.$$

Quindi $\lim\limits_{x\to 0}\big(1 - \cos(x)\big) = 0$ cioè $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x) = 1$.

- $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ *non esiste*. Definiamo $f(x) := \frac{|x|}{x}$ per $x \neq 0$. Allora

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

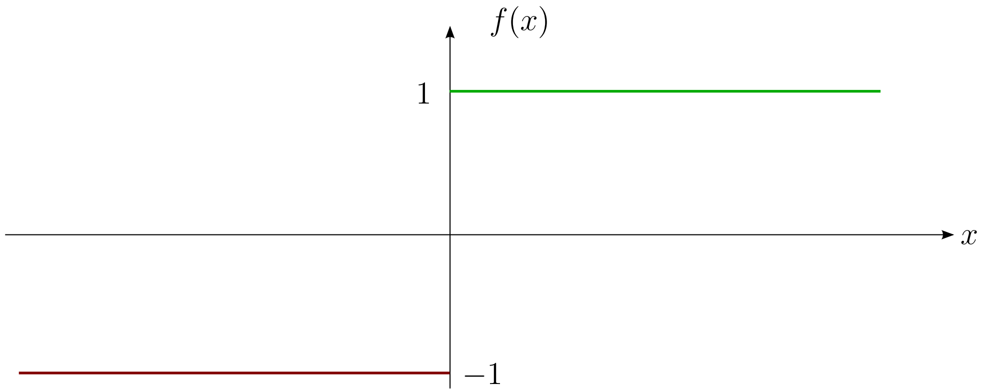


FIGURA 22. Funzione segno.

Quindi per $x_n := \frac{(-1)^n}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$ segue $f(x_n) = (-1)^n$ che non ammette limite per $n \to +\infty$. Ciò dimostra che $\lim_{x\to 0} f(x)$ non esiste.

<u>OSSERVAZIONE</u>. Nonostante l'ultimo limite di $f(x) = \frac{|x|}{x}$ per $x \to 0$ non esista, si ha che

- $f(x)$ tende a $+1$ se ci avviciniamo a $c = 0$ da destra,
- $f(x)$ tende a -1 se ci avviciniamo a $c = 0$ da sinistra.

Per precisare ciò ci serve una

Definizione 3.7 (*Limite Destro e Sinistro*). Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. Diremo che

- $x_n \to c$ *da destra* per $n \to +\infty$, se $x_n \to c$ e $x_n \geq c$ definitivamente. In questo caso usiamo la notazione: $x_n \to c^+$ per $n \to +\infty$ oppure $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = c^+$.

- $x_n \to c$ *da sinistra* per $n \to +\infty$, se $x_n \to c$ e $x_n \leq c$ definitivamente. In questo caso usiamo la notazione: $x_n \to c^-$ per $n \to +\infty$ oppure $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = c^-$.

- $f(x) \to l \in \overline{\mathbb{R}}$ per x tendente a c *da destra*, se per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus \{c\}$ con $x_n \to c^+$ segue $f(x_n) = l$ per $n \to +\infty$. In questo caso usiamo la notazione: $f(x) \to l$ per $x \to c^+$ oppure $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = l$.

- $f(x) \to l \in \overline{\mathbb{R}}$ per x tendente a c *da sinistra*, se per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus \{c\}$ con $x_n \to c^-$ segue $f(x_n) = l$ per $n \to +\infty$. In questo caso usiamo la notazione: $f(x) \to l$ per $x \to c^-$ oppure $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = l$.

$\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = l$ e $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = l$ si dicono *limite destro* e *limite sinistro* rispettivamente.

Esempi.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = +1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$.

Osservazioni.

- $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l \iff \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = l = \lim\limits_{x\to c^-} f(x)$.

- Il concetto di limite destro e sinistro si possono definire anche senza l'utilizzo delle successioni. Però facendo così si devono considerare vari casi secondo le possibilità $l \in \mathbb{R}$, $l = +\infty$ oppure $l = -\infty$, cfr. pagina 261 nell'Appendice.

Limiti e Asintoti.

- Se $\lim\limits_{x\to c^{(\pm)}} f(x) = \pm\infty$ con $c \in \mathbb{R}$, allora si dice che f ha un *asintoto verticale* $x = c$.
- Se $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = l$ con $l \in \mathbb{R}$, allora si dice che f ha un *asintoto orizzontale* $y = l$.

<u>Esempi</u>. • La funzione $\tan(x)$ ha asintoti verticali nei punti $x_k = \frac{2k+1}{2} \cdot \pi$ per $k \in \mathbb{Z}$, cfr. il grafico a pagina 71.

- La funzione $\tanh(x)$ ha asintoti orizzontali nei punti $y = -1, +1$, cfr. il grafico su pagina 69.

Come nel caso delle successioni valgono anche per i limiti delle funzioni le

Regole per il Calcolo dei Limiti. Se $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l_1$ e $\lim\limits_{x\to c} g(x) = l_2$ con $c \in \overline{\mathbb{R}}$ e $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, allora

- $\lim\limits_{x\to c}\big(f(x) \pm g(x)\big) = l_1 \pm l_2$;
- $\lim\limits_{x\to c}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = l_1 \cdot l_2$;
- $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$ se $l_2 \neq 0$;
- $\lim\limits_{x\to c}\big(f(x)\big)^{g(x)} = (l_1)^{l_2}$ se $l_1 > 0$;
- $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = |l_1|$.

Queste regole seguono direttamente dalle regole corrispondenti per le successioni. Inoltre valgono anche per il limite destro e sinistro e anche per $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ se al limite si ottiene una forma determinata.

In sostanza il risultato precedente manifesta il fatto che le operazioni algebriche sono compatibili con il concetto di limite. Cioè non ha importanza se si fa prima l'operazione e poi il limite oppure viceversa, se tutte le forme ottenute sono determinate.

Anche i risultati riguardanti limiti e ordinamento per le successioni si generalizzano facilmente alle funzioni.

Limiti e Ordinamento. Se $f, g : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in X$ e $f(x) \to l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$, $g(x) \to l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ per $x \to c \in \overline{\mathbb{R}}$, allora

- $l_1 \leq l_2$ (*Teorema del Confronto*);
- se inoltre per $h : X \to \mathbb{R}$ vale $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ per $x \in X$ e $l_1 = l_2$, allora anche $h(x) \to l_1$ per $x \to c$ *(Teorema dei Carabinieri)*.

Come già per le successioni anche per calcolare limiti di funzioni il Teorema dei Carabinieri è spesso molto utile. L'idea per la sua applicazione è di incastrare l'espressione che si vuole studiare ($= h(x)$) tra due carabinieri ($= f(x)$ e $g(x)$) che sono piú semplici da studiare e ammettono lo stesso limite, cfr. Figura 23.

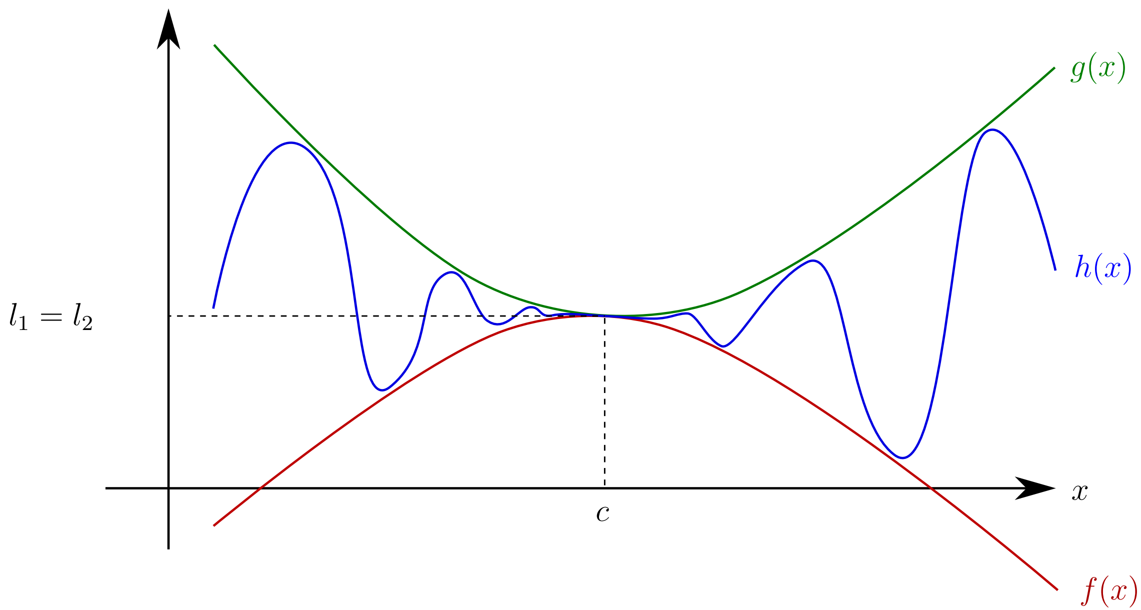
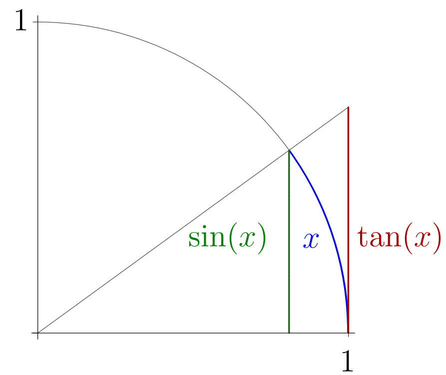


Figura 23. Teorema dei Carabinieri.

Esempi: Tre Limiti Notevoli.

(1) $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$

Dimostrazione. Graficamente si vede che per ogni $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ vale



$$0 < \sin(x) \leq x \leq \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Figura 24. Relazione tra x, $\sin(x)$ e $\tan(x)$.

dividendo per $\sin(x) > 0$ segue

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

quindi per gli inversi otteniamo

$$\underbrace{1}_{\to 1} \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \underbrace{\cos(x)}_{\to 1} \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Inoltre $\frac{\sin(x)}{x}$ è pari e quindi dal Teorema dei Carabinieri segue che $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. $\square$

(2) $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}}$

Dimostrazione. Per $x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ vale

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \frac{1-\cos(x)}{x^2} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} = \frac{\overbrace{1-\cos^2(x)}^{=\sin^2(x)}}{x^2 \cdot \big(1+\cos(x)\big)} \\ &= \underbrace{\Bigg(\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}\Bigg)^2}_{\to 1^2 = 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\underbrace{\cos(x)}_{\to 1}}}_{\to \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}} \to 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

per $x \to 0$. □

(3) $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$

Dimostrazione. Partiamo dalla relazione $e^x = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n$. Dalla disuguaglianza di Bernoulli segue

$$\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n\cdot\tfrac{x}{n} = 1 + x \qquad \text{se } \tfrac{x}{n} \geq -1 \text{ cioè } n \geq -x$$

Allora $(1+\frac{x}{n})^n \geq 1+x$ definitivamente e quindi per il teorema del confronto risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n = e^x \geq 1+x \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo in questa relazione x con $-x$ otteniamo inoltre

$$e^{-x} = \tfrac{1}{e^x} \geq \underbrace{1-x}_{>0 \text{ per } x<1}$$

e quindi per gli inversi vale

$$e^x \leq \frac{1}{1-x} \qquad \text{se } x < 1.$$

Riassumendo abbiamo verificato che per ogni $x < 1$ vale

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x} \qquad \text{(sottraendo 1)} \Rightarrow$$

$$x \leq e^x - 1 \leq \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x} \qquad \text{(dividendo per } x \neq 0) \Rightarrow$$

$$\underline{\text{se } 1 > x > 0:} \quad \underbrace{1}_{\to 1 \text{ per } x\to 0^+} \leq \frac{e^x-1}{x} \leq \frac{1}{\underbrace{1-x}_{\to 1 \text{ per } x\to 0^+}} \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\underline{\text{se } x < 0:} \quad \underbrace{1}_{\to 1 \text{ per } x\to 0^-} \geq \frac{e^x-1}{x} \geq \frac{1}{\underbrace{1-x}_{\to 1 \text{ per } x\to 0^-}} \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

per il Teorema dei Carabinieri. □

Anche il teorema sulla convergenza delle successioni monotone (cfr. pagina 31) si generalizza facilmente alle funzioni.

<u>Teorema</u> 3.8. *Se $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è monotona allora*

$$\lim_{x\to c^-} f(x) =: l^- \in \overline{\mathbb{R}} \qquad e \qquad \lim_{x\to c^+} f(x) =: l^+ \in \overline{\mathbb{R}}$$

esistono. Inoltre vale

$$\begin{aligned} &l^- = \sup\{f(x) : x \in X,\, x < c\}, && l^+ = \inf\{f(x) : x \in X,\, x > c\} && \textit{se } f \textit{ è crescente,}\\ &l^- = \inf\{f(x) : x \in X,\, x < c\}, && l^+ = \sup\{f(x) : x \in X,\, x > c\} && \textit{se } f \textit{ è decrescente.} \end{aligned}$$

Passiamo ora ai

Limiti per le Funzioni Composte. Se per $f : X \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ e $c, l, y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ vale

- $\lim_{x\to c} f(x) = y_0$,
- $\lim_{y\to y_0} g(y) = l$,
- $f(x) \neq y_0$ per $c \neq x \in X$ vicino a c

allora

$$\lim_{x\to c} g\big(f(x)\big) = l.$$

Questo risultato *non* vale senza la terza condizione che riflette il fatto che per l'esistenza e il valore del limite il valore della funzione nel punto limite c è indifferente.

<u>Esempio</u>. Sappiamo che

- $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$ (qui $f = \sin$, $c = 0$ e $y_0 = 0$),
- $\lim_{y\to 0} \cos(y) = 1$ (qui $g = \cos$, $l = 1$),
- $\sin(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x| < \pi$ (quindi possiamo scegliere $\delta := \pi$)

Con il risultato precedente risulta che

$$\lim_{x\to 0} \cos\big(\sin(x)\big) = 1$$

CAPITOLO 4

Funzioni Continue di una Variabile Reale

Funzioni Continue

OSSERVAZIONE. Per l'esistenza e il valore del limite $\lim_{x\to c} f(x) = l$ di una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *non* è importante che

- $c \in X$, e
- $f(c) = l$ se per caso $c \in X$.

Queste due condizioni invece in un certo senso caratterizzano funzioni continue.

Definizione 4.1 (*Continuità*). Una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice

- *continua in* $x_0 \in X$ se per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ con $x_n \to x_0$ segue $f(x_n) \to f(x_0)$ per $n \to +\infty$.
- *continua*, se è continua in ogni $x \in X$.

OSSERVAZIONI.

- La continuità si può anche definire senza fare riferimento alle successioni:

  f è continua in $x_0 \iff$ per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ per ogni $x \in X$ con $|x - x_0| < \delta$.

  Cioè, f è continua in x_0 se un piccolo cambiamento del argomento x_0 risulta soltanto in un piccolo cambiamento del valore $f(x_0)$ in x_0.
- Se $x_0 \in X$ è un punto di accumulazione di X, allora f è continua in $x_0 \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Se $x_0 \in X$ *non* è un punto di accumulazione di X (in questo caso si dice anche che x_0 è un punto isolato), allora f è sempre continua in x_0.

Dalla definizione di continuità e dalle regole per il calcolo dei limiti segue facilmente la seguente

<u>PROPOSIZIONE</u> 4.2. *Se* $f, g : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sono continue (in* $x_0 \in X$*), allora anche*

- $f \pm g : X \to \mathbb{R}$ *sono continue (in* x_0*),*
- $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ *è continua (in* x_0*),*
- $\frac{f}{g} : X_0 \to \mathbb{R}$ *è continua (in* x_0 *se* $g(x_0) \neq 0$*), dove* $X_0 := \{x \in X : g(x) \neq 0\}$*,*
- $f^g : X_1 \to \mathbb{R}$ *è continua (in* x_0 *se* $f(x_0) > 0$*), dove* $X_1 := \{x \in X : f(x) > 0\}$*,*
- $|f| : X \to \mathbb{R}$ *è continua (in* x_0*).*

Quindi somme, differenze, prodotti, rapporti, potenze e moduli di funzioni continue sono continue.

Da questo risultato segue che per ogni $X \subseteq \mathbb{R}$ l'insieme

$$\mathrm{C}(X) := \big\{f : X \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ è continua}\big\}$$

è uno spazio vettoriale (o addirittura un algebra).

Con il teorema sul limite delle funzioni composte si può dimostrare il seguente risultato.

<u>PROPOSIZIONE</u> 4.3. *Se* $f : X \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R}$ *è continua in* x_0 *e* $g : Y \to \mathbb{R}$ *è continua in* $y_0 := f(x_0)$*, allora la funzione composta* $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ *è continua in* x_0*. Quindi la composizione di funzioni continue è sempre continua.*

Con le due proposizioni precedenti e usando i limiti notevoli è facile verificare la continuità di vari funzioni elementari.

<u>Esempi</u>.

- *Polinomi:* $f(x) = 1$ e $g(x) := x$, $x \in \mathbb{R}$ sono continue $\Rightarrow h(x) := x^k$ è continua per ogni $k \in \mathbb{N} \Rightarrow p(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$ è continua per ogni scelta di $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ cioè ogni polinomio è continuo.

- *Funzioni razionali:* Ogni funzione razionale è continua (nel suo dominio!), essendo il rapporto di due polinomi che sono continui.

- *Modulo*: $f(x) = |x|$ per $x \in \mathbb{R}$ è continuo (usare l'ultima osservazione a pagina 10).

- *Funzioni circolari*: Per la formula di prostaferesi vale per ogni $x, x_0 \in \mathbb{R}$

$$\sin(x) - \sin(x_0) = 2 \cdot \underbrace{\sin\Big(\overbrace{\frac{x - x_0}{2}}^{\to 0}\Big)}_{\to 0} \cdot \underbrace{\cos\big(\tfrac{x+x_0}{2}\big)}_{\text{limitata}} \to 0 \qquad \text{per } x \to x_0,$$

  quindi sin è continua. Similmente segue che anche cos è continua e quindi anche $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ è continua.

- *Funzione esponenziale*: Per ogni $x, x_0 \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$ e $h := x - x_0$ vale $x \to x_0 \iff h \to 0$. Quindi

$$\begin{aligned} e^x - e^{x_0} &= (x - x_0) \cdot e^{x_0} \cdot \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} \\ &= h \cdot e^{x_0} \cdot \frac{e^h - 1}{h} \to 0 \cdot e^{x_0} \cdot 1 = 0 \qquad \text{per } h \to 0. \end{aligned}$$

  Ciò dimostra $e^x \to e^{x_0}$ per $x \to x_0$ e di conseguenza la funzione esponenziale e^x è continua.

- *Funzioni iperboliche*: $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ sono continue e quindi anche $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ è continua.

- Se per $l \in \mathbb{R}$ definiamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ l & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

  allora f è sempre continua in ogni $x_0 \neq 0$. Inoltre f è continua in $x_0 = 0 \iff$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0) = l$$

  cioè $\iff l = 1$. Si dice anche che $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ ha una *discontinuità rimovibile* in $x = 0$.
- Se per $l \in \mathbb{R}$ definiamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come

$$f(x) := \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ l & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

  allora f per qualsiasi scelta di $l \in \mathbb{R}$ è discontinua (cioè non continua) in $x = 0$.
- *Funzione di Dirichlet*: Se definiamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

  allora f è discontinua in ogni $x \in \mathbb{R}$.

Funzioni Continue su Intervalli

<u>Problema</u>. Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

- verificare che f ammette uno zero, cioè che esiste $c \in X$ tale che $f(c) = 0$,
- calcolare (un valore approssimativo per) c.

Il seguente teorema, che è uno dei più importanti risultati del corso, fornisce una soluzione a questo problema sotto alcune ipotesi su f. Nel seguito, per intervalli $[a, b]$, supponiamo sempre che sia $a < b$.

<u>TEOREMA</u> 4.4 (*Teorema degli Zeri*). *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua tale che $f(a)$ e $f(b)$ abbiano segno opposto (cioè $f(a) \cdot f(b) < 0$), allora esiste $c \in (a,b)$ tale che $f(c) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Usiamo il *metodo di bisezione*: Esiste una successione $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di intervalli $I_n = [a_n, b_n]$ tale che

(i) $[a,b] = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \ldots$,
(ii) la lunghezza di I_n è data da $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$,
(iii) $f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0$.

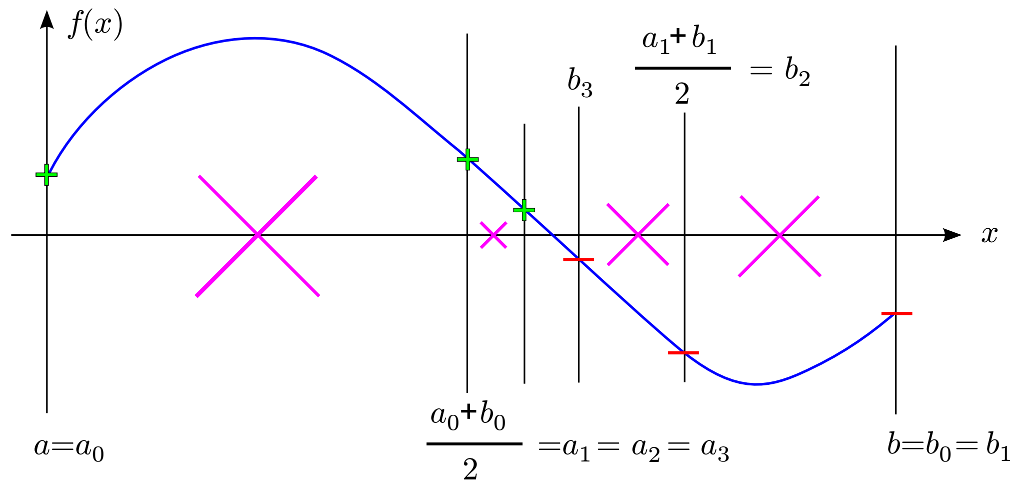


FIGURA 25. Il metodo di bisezione.

Allora, per la proprietà (i) abbiamo che

$$a = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots a_n \leq \ldots \leq b_n \ldots b_2 \leq b_1 \leq b_0 = b.$$

Da cui $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono monotone e limitate e quindi convergenti. Sia

$$\lim_{n\to+\infty} a_n =: c_1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n =: c_2.$$

Da (ii) segue

$$\underbrace{b_n}_{\to c_2} = \underbrace{a_n}_{\to c_1} + \underbrace{\frac{b-a}{2^n}}_{\to \frac{b-a}{+\infty}=0} \qquad \text{per } n \to +\infty$$

e quindi $c_1 = c_2 =: c$. Infine per (iii), il teorema del confronto e per la continuità di f risulta che

$$0 \geq \underbrace{f(a_n)}_{\to f(c)} \cdot \underbrace{f(b_n)}_{\to f(c)} \to f^2(c) \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Quindi $f^2(c) \leq 0$ che è possibile solo se $f(c) = 0$. □

<u>Osservazione</u>. Il teorema degli zeri non soltanto stabilisce l'esistenza di uno zero c per f ma la dimostrazione dà anche un modo per trovare un valore approssimativo di c. In casi come questo si dice anche che la dimostrazione è *costruttiva*.

Dal Teorema degli zeri segue facilmente la seguente generalizzazione.

<u>Teorema</u> 4.5 (*Teorema dei Valori intermedi*). *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo qualsiasi (non necessariamente chiuso), $f : I \to \mathbb{R}$ continua e siano*

$$m := \inf f := \inf\{f(x) : x \in I\}, \qquad M := \sup f := \sup\{f(x) : x \in I\}.$$

Allora per ogni $y \in (m, M)$ esiste $x \in I$ tale che $f(x) = y$. In altre parole, f assume tutti i valori tra $m = \inf f$ e $M = \sup f$.

La dimostrazione si fa applicando il Teorema degli Zeri alla funzione $\tilde{f}(x) := f(x) - y$.

Questo teorema ha delle applicazioni molto importanti. Come esempio dimostreremo l'esistenza dei

Logaritmi. Sia $0 < a \neq 1$. Allora per ogni $y > 0$ esiste un unico $x \in \mathbb{R}$ tale che $a^x = y$. Questo valore x si chiama *logaritmo di y in base a* e si scrive

$$x =: \log_a(y).$$

Per la base $a = e$ otteniamo il *logaritmo naturale* $\ln(y) := \log_e(y)$.

Dimostrazione. Procediamo in 2 passi:

1° Caso: $a = e$. Visto che $e > 1$ segue $e^n \to +\infty$ per $n \to +\infty$ e quindi

$$\sup\{e^n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty \quad \Rightarrow \quad M := \sup\{e^x : x \in \mathbb{R}\} = +\infty.$$

Inoltre, da $e^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e

$$e^{-n} = \frac{1}{\underbrace{e^n}_{\to +\infty}} \to \frac{1}{+\infty} = 0 \quad \text{per } n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad m := \inf\{e^x : x \in \mathbb{R}\} = 0.$$

Infine $I := \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ è un intervallo e e^x, $x \in I$ è continua, quindi per il teorema dei valori intermedi per ogni $y \in (m, M) = (0, +\infty)$ esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $e^x = y$. Questo $x =: \ln(y)$ è unico poiché e^x è strettamente crescente e quindi iniettiva.

2° Caso: $0 < a \neq 1$. Cerchiamo per $y > 0$ un $x \in \mathbb{R}$ tale che $a^x = y$. Però

$$e^{x \cdot \ln(a)} = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = \underline{a^x = y} = e^{\ln(y)} \iff x \cdot \ln(a) = \ln(y)$$

visto che la funzione esponenziale è strettamente crescente e di conseguenza iniettiva, e quindi

$$x = \log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}. \qquad \square$$

Regole per i Logaritmi. Siano $0 < a, b \neq 1$, $x, y > 0$ e $r \in \mathbb{R}$. Allora

- $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$,
- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$,
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$, in particolare $\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$,
- $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$,
- $\log_a(x) = \log_a(b) \cdot \log_b(x)$ in particolare $\log_a(x) = \log_a(e) \cdot \ln(x)$.

<u>Osservazione</u>. Con l'esistenza dei logaritmi abbiamo dimostrato che per $0 < a \neq 1$ la funzione $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$ è invertibile con $f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_a(x)$. In particolare i grafici di a^x e $\log_a(x)$ sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$.

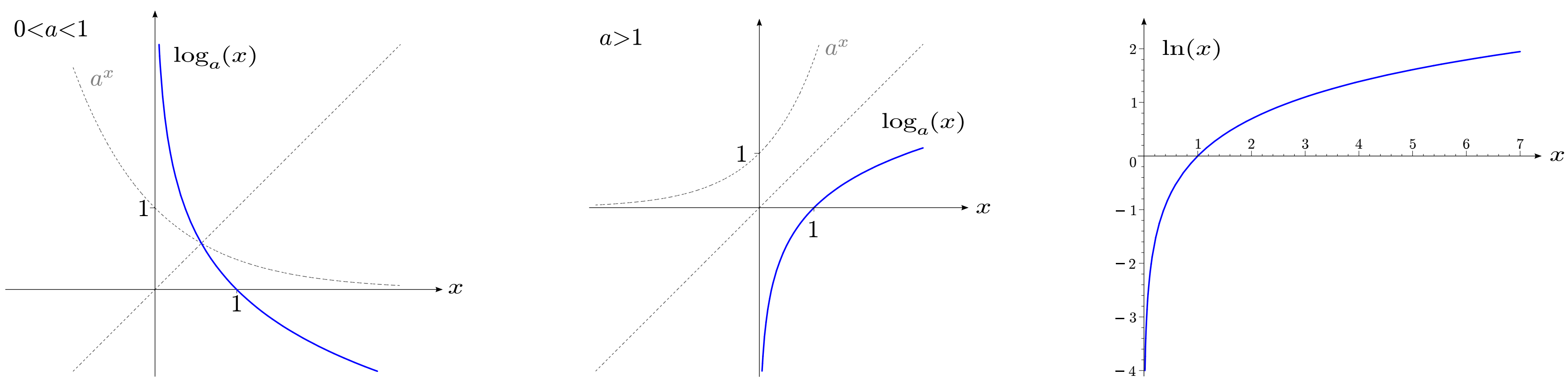


Figura 26. I Logaritmi.

Visto che in questo capitolo stiamo studiando funzioni continue si pone il

<u>Problema</u>. $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua?

La risposta è *si* per il seguente

<u>TEOREMA</u> 4.6. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f \in \mathrm{C}(I)$. Allora anche $J := f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ è un intervallo e*

- *$f : I \to J$ è invertibile $\iff$ f è strettamente crescente oppure strettamente decrescente;*
- *se f è invertibile, $f^{-1} : J \to I$ è continua.*

Il teorema precedente *non* vale se il dominio di f non è un intervallo.

<u>ESEMPIO</u>. Consideriamo $f : [-1, 0] \cup (1, 2] \to [0, 2]$, $f(x) = |x|$. Allora f è continua e invertibile ma non è strettamente monotona e $f^{-1} : [0, 2] \to [-1, 0] \cup (1, 2]$ è discontinua in $x = 1$.

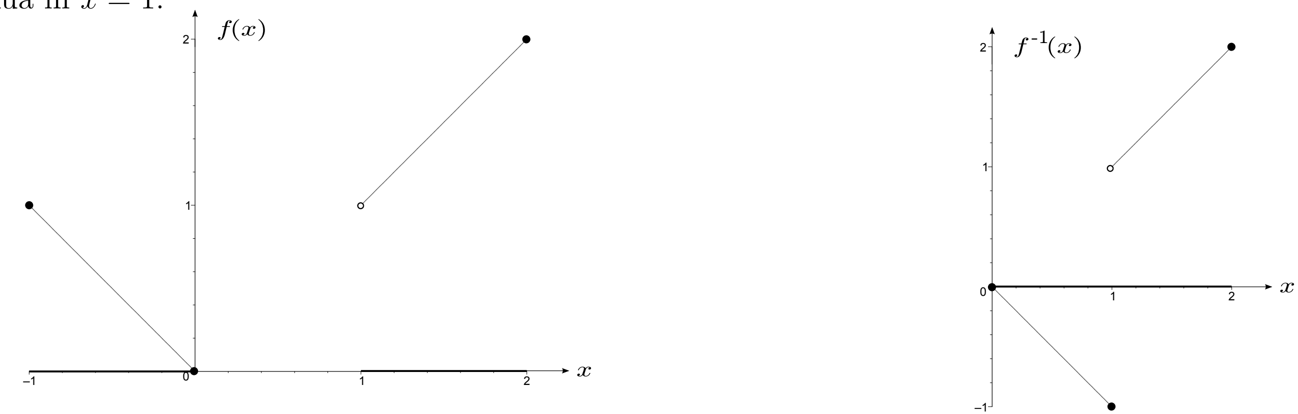


FIGURA 27. Funzione continua con inversa discontinua.

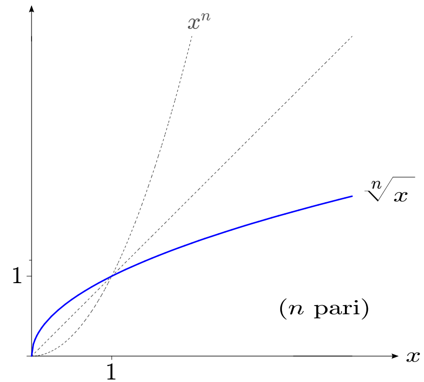
Altre Funzioni Invertibili

<u>OSSERVAZIONE</u>. Possiamo utilizzare lo stesso schema che abbiamo usato per invertire l'esponenziale a^x per invertire altre funzioni f. Più precisamente, usiamo

- il teorema dei valori intermedi per verificare la suriettività di f,
- la stretta monotonia per ottenere l'iniettività di f,
- il teorema sulla continuità della funziona inversa per stabilire la continuità di f^{-1}.

In questa maniera possiamo costruire altre funzioni elementari.

Radici. Consideriamo $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = x^n$ per $n \geq 1$. Allora, f è continua, strettamente crescente, il dominio $X = [0, +\infty)$ è un intervallo, $\inf f = \min f = 0$ e $\sup f = +\infty$. Quindi f è invertibile e la funzione inversa $f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ è continua e data da $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.



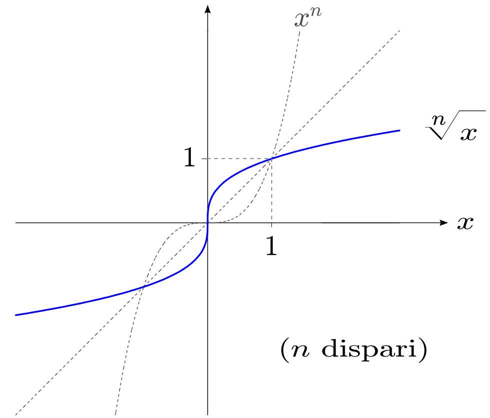


Figura 28. La radice n-esima.

<u>Osservazione</u>. Se nel precedente n è dispari, allora possiamo considerare f anche come funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. In questo caso f rimane continua, strettamente crescente con $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$ cioè è invertibile con $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. In altre parole, per n dispari la radice $\sqrt[n]{x}$ è anche definita per argomenti $x < 0$, per esempio $\sqrt[3]{-8} = -2$. Invece per n pari e $x < 0$ la radice $\sqrt[n]{x}$ non ha senso nel campo dei numeri reali, per esempio $\sqrt{-1}$ non è più un numero reale ma *complesso*. Al livello della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ ciò si rispecchia nel fatto che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per n pari non è suriettiva (e neanche iniettiva, cfr. pagina 58).

Potenze. Dal paragrafo precendente sappiamo che $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$ definisce una funzione continua per ogni $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$. Più in generale vale

$$x^r = \left(e^{\ln(x)}\right)^r = e^{r \cdot \ln(x)}, \quad r \in \mathbb{R},\ x > 0.$$

Quindi come composizione di funzioni continue ogni potenza è continua.

Inverse delle Funzioni Circolari. (Cfr. Figura 29) Considerando il grafico della funzione $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (cfr. Figura 21) si vede che non è invertibile non essendo né suriettiva né iniettiva. La suriettività, però si ottiene considerando come codominio l'insieme $[\min \sin, \max \sin] = [-1, 1]$ mentre per ottenere l'iniettività basta considerare soltanto una parte del dominio $\mathbb{R}$ in cui la funzione sin è strettamente monotona. Perciò ci sono infinite scelte ma generalmente si ristringe il dominio all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Quindi consideriamo ora

$$\sin : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$$

che così diventa invertibile. Nella stessa maniera, considerando

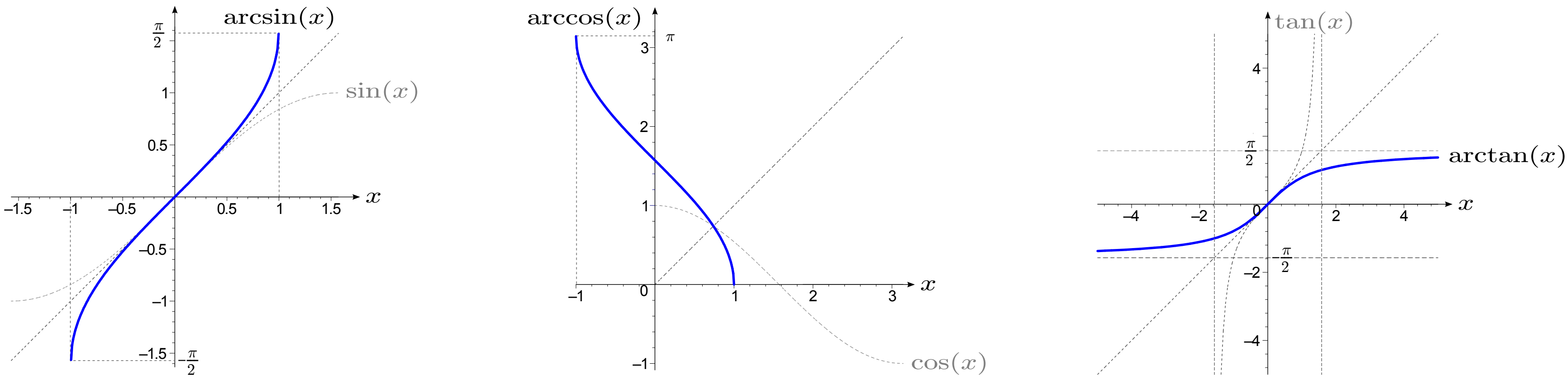


Figura 29. Inverse delle funzioni circolari.

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1] \qquad \text{e} \qquad \tan : (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$$

anche loro diventano invertibili e tutte le inverse *arcoseno*, *arcocoseno* e *arcotangente*

$$\arcsin := \sin^{-1} : [-1, 1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}],$$
$$\arccos := \cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi],$$
$$\arctan := \tan^{-1} : \mathbb{R} \to (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$$

sono nuovamente continue.

Inverse delle Funzioni Iperboliche. (Cfr. Figura 30) Ragionando come prima si vede che le funzioni iperboliche $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cosh : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ e $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ sono invertibili e le loro inverse *areasenoiperbolico*, *areacosenoiperbolico* e *areatangenteiperbolico*

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh} &:= \sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ \operatorname{arcosh} &:= \cosh^{-1} : [1, +\infty) \to [0, +\infty), \\ \operatorname{artanh} &:= \tanh^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

sono nuovamente continue.

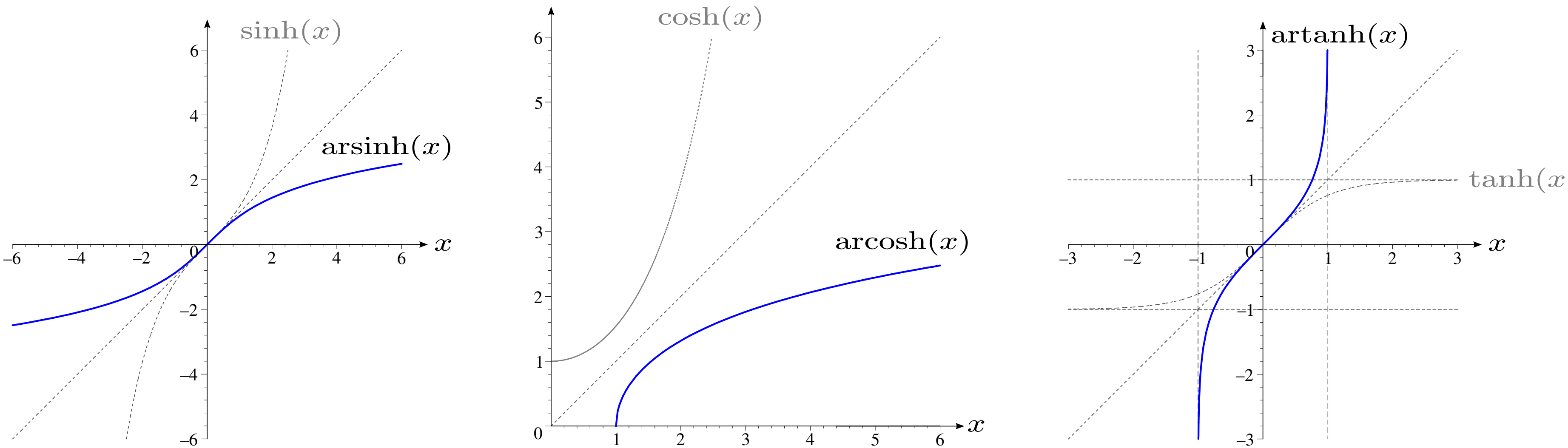


FIGURA 30. Inverse delle funzioni iperboliche.

<u>Osservazione</u>. Visto che $\sinh(x) = y \iff x = \operatorname{arsinh}(y)$, risolvendo l'equazione $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$ per x si ottiene la rappresentazione

$$\operatorname{arsinh}(y) = \ln\Big(y + \sqrt{y^2+1}\Big), \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}.$$

Similmente segue

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcosh}(y) &= \ln\Big(y + \sqrt{y^2-1}\Big), \quad \text{per ogni } y \geq 1, \\
\operatorname{artanh}(y) &= \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+y}{1-y}\Big), \quad \text{per ogni } y \in (-1,1).
\end{aligned}$$

Funzioni Continue su Intervalli Chiusi e Limitati

Ci poniamo il seguente

<u>Problema</u>. Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determinare, se esistono, il valore minimo e quello massimo di f, cioè

$$m := \min f := \min\{f(x) : x \in X\}, \qquad M := \max f := \max\{f(x) : x \in X\}.$$

La soluzione di questo problema si svolge in 2 passi:

(1) Verificare che minimo e massimo di f esistono,

(2) trovare x_0, x_1 tale che $\min f = f(x_0)$, $\max f = f(x_1)$.

Il primo punto si risolve con il seguente teorema mentre affronteremo il secondo punto nel prossimo capitolo usando il calcolo differenziale.

<u>Teorema</u> 4.7 (*Teorema di Weierstraß*). *Se* $f \in \mathrm{C}[a,b]$, *allora esistono* $m := \min f$ *e* $M := \max f$. *Inoltre, l'immagine è data da*

$$f\big([a,b]\big) = \big\{f(x) : x \in [a,b]\big\} = [m, M],$$

in particolare

- f *è limitata;*
- *esistono* $x_0, x_1 \in [a,b]$ *tale che* $f(x_0) \le f(x) \le f(x_1)$ *per ogni* $x \in [a,b]$*;*
- *per ogni* $y \in [m,M]$ *esiste* $x \in [a,b]$ *tale che* $f(x) = y$*.*

<u>Osservazioni</u>.

- Il Teorema di Weierstraß vale soltanto su intervalli *chiusi* e *limitati* cioè del tipo $[a,b]$.
- La funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \sqrt[3]{\ln\left(\frac{1 + e^{-\sin\sqrt{x+2}}}{2 + \cos\left|9x - \frac{1}{2}\right| + \arctan\big((e+x^2)^{\pi}\big)}\right)}$$

  è una composizione di funzioni continue e quindi continua. Per Weierstraß ammette minimo e massimo che, però, saranno quasi impossibili da determinare. Quindi Weierstraß è un risultato di esistenza ma non aiuta per trovare x_0, x_1 e $\min f = f(x_0)$ e $\max f = f(x_1)$.

CAPITOLO 5

Calcolo Differenziale di Funzioni di una Variabile

Problemi. Data una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in (a, b)$,

(i) trovare la *retta tangente* t al grafico di f nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ (problema geometrico), e

(ii) trovare un'*approssimazione lineare* $g(x)$ (cioè della forma $g(x) = \alpha \cdot x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) per $f(x)$ per x vicino a x_0 (problema analitico).

Iniziamo a studiare il problema (i). Come vedremo nel seguito la sua soluzione risolve anche il problema (ii). Per risolvere (i) consideriamo prima la *retta secante* s_h attraverso i punti

$$P_0 = \big(x_0, f(x_0)\big) \qquad \text{e} \qquad P_h := \big(x_0 + h, f(x_0 + h)\big) \qquad \text{per } h \neq 0.$$

L'equazione della retta s_h è data da

$$s_h(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\substack{= \text{ pendenza di } s_h \\ =: \text{ rapporto incrementale}}} \cdot (x - x_0).$$

Quindi solo il rapporto incrementale dipende da h che, nel passo successivo, mandiamo a 0.

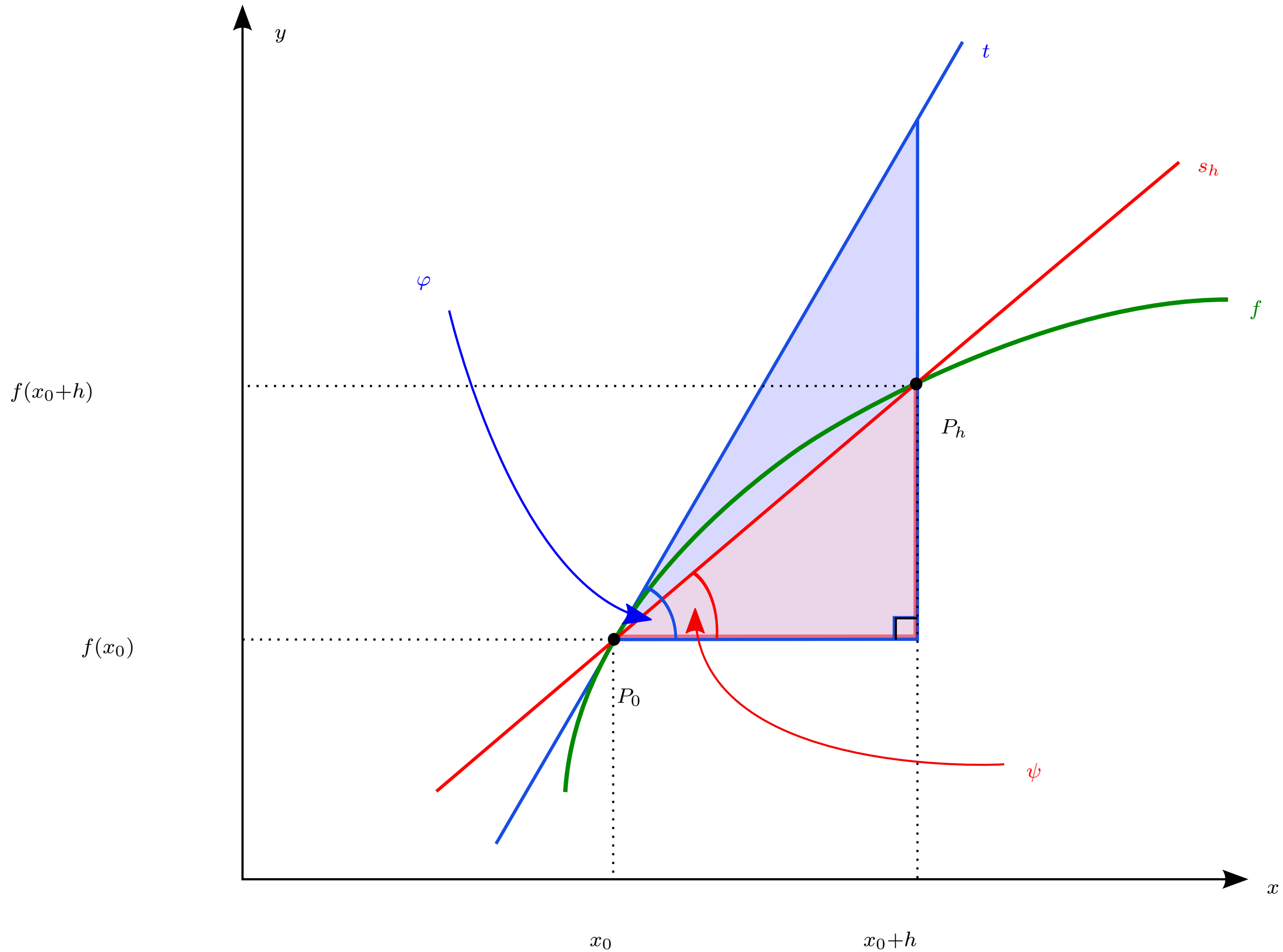


Figura 31. Retta secante s_h e retta tangente t.

Derivata: Definizione e prime Proprietà

Considerando il limite del rapporto incrementale per $h \to 0$ arriviamo alla seguente

Definizione 5.1. Se per $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$ converge

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \underbrace{=}_{x=x_0+h} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =: f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

allora f si dice *derivabile* in x_0 con *derivata* $f'(x_0)$. Se f è derivabile in ogni $x_0 \in (a,b)$ allora si dice *derivabile* e la funzione $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$ è la *derivata* di f. Altre notazioni: $f' = \frac{df}{dx} = Df$.

Se f è derivabile in x_0 allora otteniamo l'equazione $t(x)$ della retta tangente t sostituendo il rapporto incrementale nell'equazione della retta secante s_h con la derivata $f'(x_0)$, cioè

$$\boxed{t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

Quindi (cfr. Figura 31)

$$f'(x_0) = \tan(\varphi) = \text{ pendenza della retta tangente } t,$$
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \tan(\psi) = \text{ pendenza della retta secante } s_h$$

In particolare $f'(x_0) = 0$ significa che la retta tangente ha pendenza 0, cioè è orizzontale.

Consideriamo alcuni

<u>Esempi</u>.

- Se f è costante cioè se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = c$ per ogni $x \in (a,b)$ allora il rapporto incrementale è sempre uguale a 0. Quindi una funzione costante è sempre derivabile con derivata nulla.

- Sia $f(x) = x^n$ per $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ e $x \in \mathbb{R}$. Allora, dalla formula del binomio di Newton segue usando che $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, ${x_0}^0 = h^0 = 1$ e $\binom{n}{n-1} = n$ che

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} \\
&= \frac{\left(\binom{n}{0}{x_0}^0 h^n + \binom{n}{1}{x_0}^1 h^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-2}{x_0}^{n-2}h^2 + \overbrace{\binom{n}{n-1}{x_0}^{n-1}h^1}^{=n\cdot {x_0}^{n-1}\cdot h} + \overbrace{\binom{n}{n}{x_0}^n h^0}^{=x_0^n}\right) - x_0^n}{h} \\
&= \frac{\left(\binom{n}{0}{x_0}^0 h^{n-1} + \binom{n}{1}{x_0}^1 h^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-2}{x_0}^{n-2}h^1 + n{x_0}^{n-1}\right)\cdot h}{h} \\
&= \binom{n}{0}{x_0}^0 h^{n-1} + \binom{n}{1}{x_0}^1 h^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-2}{x_0}^{n-2}h^1 + n{x_0}^{n-1} \\
&\to n \cdot {x_0}^{n-1} = f'(x_0) \qquad \text{per } h \to 0.
\end{aligned}$$

Quindi $f(x) = x^n$ è derivabile per ogni $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ con

$$\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}}$$

Per esempio, $(x^5)' = 5 \cdot x^4$.

- Sia $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \cdot \underbrace{\frac{e^h-1}{h}}_{\to 1} \to e^{x_0} \qquad \text{per } h \to 0.$$

Quindi $f(x) = e^x$ è derivabile con

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

cioè $f = f'$ che è una proprietà molto particolare e che (a meno di una costante moltiplicativa) caratterizza la funzione esponenziale.

- Sia $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Allora usando la formula di prostaferesi, il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ e la continuità della funzione cos risulta

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} = \frac{2\cdot\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cdot\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}{h} \\ &= \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}_{\to\cos(x_0)} \to \cos(x_0) = f'(x_0) \qquad \text{per } h \to 0.\end{aligned}$$

Quindi $f(x) = \sin(x)$ è derivabile con $\boxed{\sin'(x) = \cos(x)}$

Similmente segue che $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile con $\boxed{\cos'(x) = -\sin(x)}$

<u>Osservazione</u>. Ricordiamo che sin è una funzione dispari (come anche $-\sin$) mentre cos è pari. Nell'esempio precedente abbiamo visto che $\sin' = \cos$ e $\cos' = -\sin$ e quindi la derivata ha trasformata una funzione dispari in una pari e viceversa. Ciò infatti vale sempre, cioe se f è derivabile e
- f dispari $\Rightarrow f'$ pari,
- f pari $\Rightarrow f'$ dispari.

- Sia $f(x) := |x|$. Allora f *non* è derivabile in $x_0 = 0$ visto che il limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale in $x_0 = 0$ dato da

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} +1 & \text{se } h > 0, \\ -1 & \text{se } h < 0 \end{cases}$$

non esiste. Comunque esistono limite destro e limite sinistro del rapporto incrementale. Questa osservazione dà luogo alla seguente

Definizione 5.2. Se per $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$ converge

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'_+(x_0) = \textit{derivata destra}$$

oppure

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'_-(x_0) = \textit{derivata sinistra}$$

allora diremo che f è *derivabile da destra* oppure *derivabile da sinistra* in x_0.

Esempio. $f(x) := |x|$ è derivabile da destra e anche da sinistra in $x_0 = 0$ con $f'_+(0) = +1$, $f'_-(0) = -1$.

Osservazione. $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a,b) \iff f$ è derivabile da destra e da sinistra in x_0 con $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Studiamo ora il legame tra derivabilità e continuità.

<u>PROPOSIZIONE</u> 5.3. *Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a, b)$ allora è anche continua in x_0.*

DIMOSTRAZIONE.

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} \to f'(x_0) \cdot 0 = 0 \qquad \text{per } x \to x_0.$$

Cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ e quindi f è continua in x_0. □

<u>OSSERVAZIONE</u>. Non vale il contrario cioè f continua $\not\Rightarrow$ f derivabile, per esempio $f(x) = |x|$ è continua ma non derivabile in $x_0 = 0$.

<u>ESERCIZIO</u>. (Metodo di Erone, cfr. pagina 33) Sia $f(x) := x^k - a$ per $a > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

- Calcolare l'equazione della retta tangente t al grafico di f nel punto $x_0 > 0$.
- Verificare che l'intersezione tra t e l'asse x è data da

$$x_1 := \frac{1}{k} \cdot \left((k-1)x_0 + \frac{a}{{x_0}^{k-1}}\right).$$

Regole per la Derivazione

Cerchiamo ora modi per semplificare il calcolo delle derivate.

Derivazione di Somme, Prodotti e Rapporti di Funzioni. Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabili in x_0, allora

(i) per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ anche $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ è derivabile in x_0 con

$$\boxed{(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0) + \beta \cdot g'(x_0)}$$

(ii) $f \cdot g$ è derivabile in x_0 con

$$\boxed{(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)}$$

(iii) se $g(x_0) \neq 0$ anche $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 con

$$\boxed{\left(\tfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \tfrac{g(x_0) \cdot f'(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{g^2(x_0)}}$$

In particolare

$$\boxed{\left(\tfrac{1}{g}\right)'(x_0) = -\tfrac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}}$$

Dimostrazione. Dimostriamo soltanto (ii). Perciò studiamo il rapporto incrementale del prodotto utilizzando che g è continua in x_0

$$\begin{aligned}
\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\big(f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x)\big) + \big(f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)\big)}{x - x_0} \\
&= \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{g(x)}_{\to g(x_0)} + f(x_0) \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)} \\
&\to f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \qquad \text{per } x \to x_0.
\end{aligned}$$

□

<u>Osservazione</u>. La regola (i) stabilisce che la derivazione è un'*operazione lineare*, cioè la derivata di una combinazione lineare e la combinazione lineare delle derivate. Inoltre implica che l'insieme

$$\mathrm{C}^1(a,b) := \left\{ f : (a,b) \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ è derivabile e} \\ f' \text{ è continua} \end{array} \right\}$$

è uno spazio vettoriale. Se $f \in \mathrm{C}^1(a,b)$ si dice anche che f è *derivabile con continuità* (qui la continuità si riferisce a f' non a f che essendo derivabile è anche continua).

Con queste regole diventa semplice verificare la derivabilità di varie funzioni elementari.

<u>Esempi</u>.

- Visto che ogni monomio x^k per $k = 1, 2, 3, \ldots$ è derivabile, per le prime due regole ogni *polinomio* è derivabile con

$$p'(x) = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)' = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1.$$

  Per esempio, $(3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 11)' = 12x^3 - 21x^2 + 4x$.

- Per l'esempio precedente e la terza regola, ogni *funzione razionale* è derivabile. Per esempio per ogni $n = 1, 2, 3, \ldots$ vale

$$\left(x^{-n}\right)' = \left(\tfrac{1}{x^n}\right)' = -\tfrac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = -\tfrac{n}{x^{n+1}} = -n \cdot x^{-n-1}$$

  Quindi, per ogni $n \in \mathbb{Z}$ vale

$$\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}}$$

  Infatti questa regola abbiamo visto precedentemente per $n = 1, 2, 3, \ldots$ (cfr. pagina 100), per $n = 0$ vale poiché la derivata di una funzione costante $= 0$, mentre per $n = -1, -2, -3, \ldots$ è stata appena dimostrata.

- Visto che sin e cos sono derivabili anche la funzione $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ è derivabile con

$$\boxed{\tan'(x)} = \frac{\cos(x)\cdot\sin'(x) - \cos'(x)\cdot\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$\boxed{= \begin{cases} \frac{1}{\cos^2(x)} \\ 1 + \tan^2(x) \end{cases}}$$

Derivazione delle Funzioni Composte. Sia $f : (a,b) \to (c,d)$ derivabile in $x_0 \in (a,b)$ e sia $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ derivabile in $y_0 := f(x_0)$. Allora la funzione composta $g \circ f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 con

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0)}$$

Questa formula si chiama *Regola della Catena*.

<u>Esempi</u>.

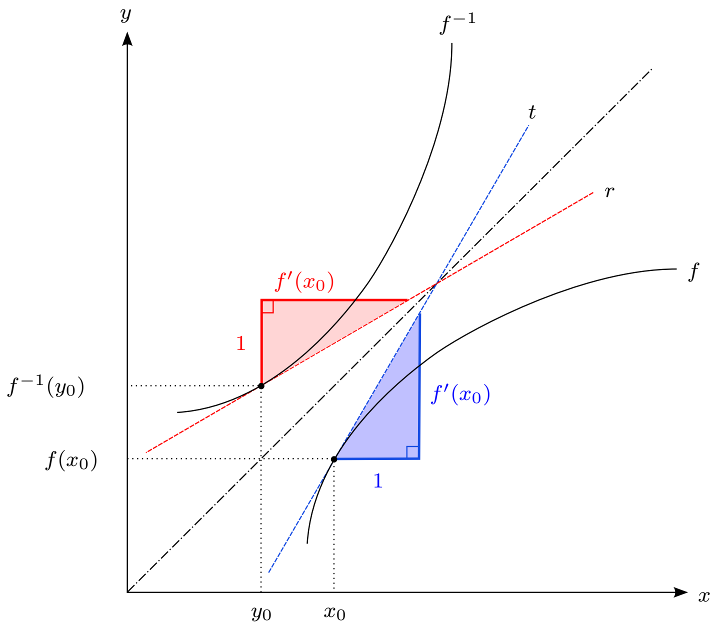
- Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile, allora anche $h(x) := g(-x)$ è derivabile poiché $h(x) = (g \circ f)(x)$ per $f(x) = -x$. Inoltre $h'(x) = \big(g(-x)\big)' = g'(-x) \cdot (-x)' = -g'(-x)$.
- Dal esempio precedente segue che le funzioni iperboliche $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ sono derivabili con $\sinh'(x) = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$. Similmente segue che $\cosh'(x) = \sinh(x)$. Infine, utilizzando la regola di derivazione per un rapporto segue che anche $\tanh = \frac{\sinh}{\cosh}$ è derivabile con
$$\tanh'(x) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \begin{cases} \frac{1}{\cosh^2(x)} \\ 1 - \tanh^2(x) \end{cases}$$
Quindi abbiamo dimostrato che le funzioni iperboliche sono derivabili con
$$\boxed{\sinh'(x) = \cosh(x)} \qquad \boxed{\cosh'(x) = \sinh(x)} \qquad \boxed{\tanh'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\cosh^2(x)} \\ 1 - \tanh^2(x) \end{cases}}$$
- Sia $a > 0$, allora $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$, $x \in \mathbb{R}$, è derivabile (visto che è la composizione $(g \circ f)(x)$ per $f(x) = x \cdot \ln(a)$ e $g(y) = e^y$) con $(a^x)' = (e^{x \cdot \ln(a)})' = \ln(a) \cdot e^{x \cdot \ln(a)} = \ln(a) \cdot a^x$ cioè ogni funzione esponenziale è derivabile con
$$\boxed{\big(a^x\big)' = \ln(a) \cdot a^x}$$
- Per funzioni più complesse (cioè composizioni di più di due funzioni) si può iterare la regole della catena iniziando all'esterno. Per esempio, $e^{\cos(3x^2 - 2x + 1)}$ è derivabile con
$$\begin{aligned} \Big(e^{\cos(3x^2 - 2x + 1)}\Big)' &= e^{\cos(3x^2 - 2x + 1)} \cdot \big(\cos(3x^2 - 2x + 1)\big)' \\ &= -e^{\cos(3x^2 - 2x + 1)} \cdot \sin(3x^2 - 2x + 1) \cdot (6x - 2). \end{aligned}$$

L'ultima regola per la derivazione tratta la

Derivazione delle Funzioni Inverse.[1]
Sia $f : (a,b) \to (c,d)$ continua, biettiva e derivabile in $x_0 \in (a,b)$. Se $f'(x_0) \neq 0$ allora $f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$ è derivabile in $y_0 := f(x_0)$ con

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

<u>Osservazioni</u>. • È importante osservare che mentre f viene derivata in x_0 la derivata di f^{-1} si riferisce al punto $y_0 = f(x_0)$!
Questo fatto e anche la formula per $(f^{-1})'(y_0)$ si spiega dal seguente grafico.



t = retta tangente al grafico di f in x_0

r = retta tangente al grafico di f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$

pendenza di $t = \frac{f'(x_0)}{1} = f'(x_0)$

pendenza di $r = \frac{1}{f'(x_0)} = (f^{-1})'(y_0)$

Figura 32. Derivata della funzione inversa.

[1]Quando si considerano sia f e f^{-1} conviene, per non confondersi, usare sempre x come variabile per f e y come variabile per f^{-1}.

- Si nota che una retta tangente *orizzontale* al grafico di f in x_0 (cioè se $f'(x_0) = 0$) corrisponde a una retta tangente *verticale* al grafico di f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ che significa che f^{-1} *non* è derivabile in y_0.
- Non come dimostrazione, ma come modo per ricordare la formula per $\left(f^{-1}\right)'$, si può utilizzare la regola della catena:

  Per definizione, $x = f^{-1}(f(x))$ per ogni $x \in (a, b)$. Derivando entrambi i lati di questa equazione otteniamo con $y = f(x)$

$$\begin{aligned} 1 = (x)' &= \left[f^{-1}\big(f(x)\big)\right]' \\ &= \left(f^{-1}\right)'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) \\ &= \left(f^{-1}\right)'(y) \cdot f'(x) \qquad \Rightarrow \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} \end{aligned}$$

<u>Esempi</u>. • Sia $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ per $0 < a \neq 1$ che è derivabile con $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre abbiamo visto (cfr. pagina 90) che f è invertibile con $f^{-1}(y) = \log_a(y)$, $y > 0$. Quindi $\log_a$ è derivabile e per $y := f(x) = a^x$ vale

$$\log_a{}'(y) = \frac{1}{(a^x)'} = \frac{1}{\ln(a) \cdot \underbrace{a^x}_{=y}} = \frac{1}{\ln(a) \cdot y}$$

Quindi ogni logaritmo è derivabile e sostituendo y con x otteniamo per ogni $x > 0$

$$\boxed{\log_a{}'(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}} \qquad \text{in particolare per } a = e \qquad \boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

- Per ogni $r \in \mathbb{R}$ la potenza $x^r = e^{r \cdot \ln(x)}$ con $x > 0$ è derivabile con (usare la regola della catena)

$$(x^r)' = \left(e^{r \cdot \ln(x)}\right)' = \underbrace{e^{r \cdot \ln(x)}}_{=x^r} \cdot \frac{r}{x} = r \cdot x^{r-1}.$$

Quindi la regola per la derivazione di x^n per $n \in \mathbb{Z}$ (cfr. pagina 105) vale anche per esponenti reali $r \in \mathbb{R}$, cioè per ogni $x > 0$ e $r \in \mathbb{R}$ si ha

$$\boxed{(x^r)' = r \cdot x^{r-1}}$$

- Se f e g sono due funzioni con lo stesso dominio e $f(x) > 0$ per ogni x allora possiamo definire

$$h(x) := f(x)^{g(x)} = \left(e^{\ln\left(f(x)\right)}\right)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln\left(f(x)\right)}.$$

Quindi, se f e g sono derivabili anche h è derivabile con

$$\begin{aligned} h'(x) = \left(f(x)^{g(x)}\right)' &= e^{g(x) \cdot \ln\left(f(x)\right)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln\left(f(x)\right) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right) \\ &= f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln\left(f(x)\right) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right) \end{aligned}$$

- Abbiamo visto (cfr. pagina 93) che $f := \sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ è invertibile. Inoltre $f = \sin$ è derivabile con $f'(x) = \sin'(x) = \cos(x)$. Però, $\cos(x)$ si annulla nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ negli estremi $x = \pm\frac{\pi}{2}$ e quindi per ottenere una funzione inversa *derivabile* dobbiamo togliere questi punti dal dominio di $f = \sin$. Allora consideriamo
$$f = \sin : (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \to (-1, 1)$$
che è invertibile e derivabile con $f'(x) = \cos(x) \neq 0$ per ogni $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Quindi $f^{-1} = \arcsin : (-1, 1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è derivabile in $y = f(x) = \sin(x)$ con
$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)}.$$
Per ottenere una rappresentazione di $\arcsin'(y)$ nella variabile y dobbiamo esprimere ora $\cos(x)$ in funzione di $y = \sin(x)$. Perciò utilizziamo la relazione $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, cioè $\cos(x) = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm\sqrt{1 - y^2}$. Per decidere il segno "+" oppure "−" basta osservare che $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e quindi $\cos(x) > 0$. Quindi dobbiamo scegliere il segno "+" e sostituendo y con x otteniamo finalmente
$$\boxed{\arcsin'(x) = \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall\, x \in (-1, 1)}$$

- Raggiornando come nel esempio precedente si possono derivare anche le seguenti funzioni inverse:
$$\boxed{\arccos'(x) = \tfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall\, x \in (-1, 1)}$$
$$\boxed{\arctan'(x) = \tfrac{1}{1+x^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}}$$
$$\boxed{\operatorname{arsinh}'(x) = \tfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}}$$
$$\boxed{\operatorname{arcosh}'(x) = \tfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \forall\, x > 1}$$
$$\boxed{\operatorname{artanh}'(x) = \tfrac{1}{1-x^2} \quad \forall\, x \in (-1, 1)}$$

Estremi Locali e il Teorema di Fermat

Torniamo al problema che abbiamo posto a pagina 95 sull'esistenza e il calcolo del minimo e del massimo di una funzione. Per il Teorema di Weierstraß sappiamo almeno che ogni $f \in \mathrm{C}[a,b]$ ammette massimo e minimo, ma rimane il seguente

<u>Problema</u>. Come si può determinare il minimo e massimo di una funzione?

Consideriamo un problema concreto di questo tipo:

<u>Esempio</u>. Dato un cartoncino di dimensione $a \times b$ (con $0 < a \leq b$) costruire un contenitore (senza coperchio) di volume massimo, cfr. Figura 33.

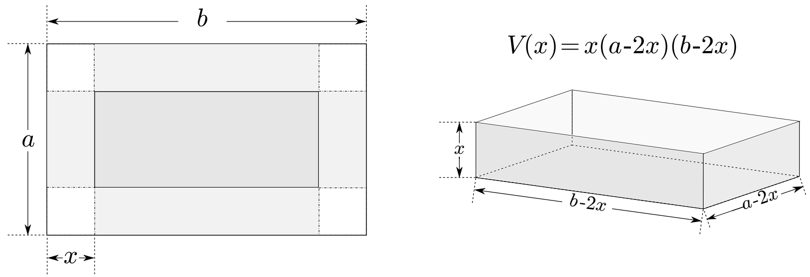


Figura 33. Contenitore.

Quindi cerchiamo $x_0 \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$ tale che $V_{\max} := V(x_0) \geq V(x)$ per ogni $x \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$. Torneremo a questo problema a pagina 116.

Prima di affrontare problemi di questo tipo generalizziamo il concetto di minimo e massimo per una funzione.

<u>Definizione</u> 5.4. Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale, allora

- $x_0 \in X$ si dice *punto di minimo locale*, se esiste $\delta > 0$ tale che $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni $x \in X$ con $|x - x_0| < \delta$; se x_0 è un punto di minimo locale, $f(x_0)$ si dice *minimo locale*;
- $x_0 \in X$ si dice *punto di massimo locale*, se esiste $\delta > 0$ tale che $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in X$ con $|x - x_0| < \delta$; se x_0 è un punto di massimo locale, $f(x_0)$ si dice *massimo locale*;
- se x_0 è un punto di minimo o di massimo locale, allora si dice *punto di estremo locale* mentre $f(x_0)$ si chiama *estremo locale*.

<u>Esempio</u>. Consideriamo il grafico in Figura 34.

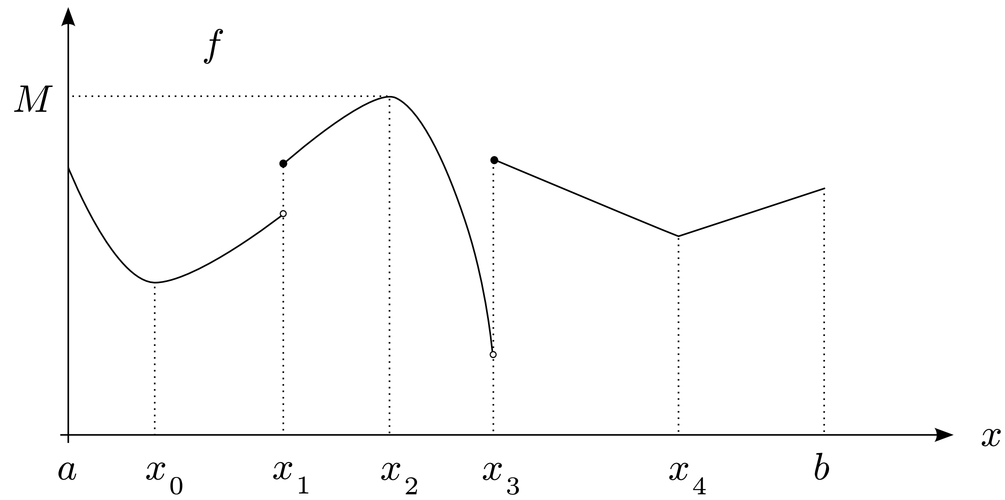


Figura 34. Esempi di estremi locali.

In questo caso abbiamo:

- a, x_2 e x_3 e b sono punti di massimo locale di f,
- x_0 e x_4 sono punti di minimo locale di f,
- x_1 *non* è un punto di estremo locale di f,
- x_2 è un punto di massimo assoluto di f,
- $M = f(x_2)$ è il massimo assoluto di f, il minimo assoluto *non* esiste (soltanto l'estremo inferiore).

Per trovare i punti di estremo locale si usa il

<u>TEOREMA</u> 5.5 (*Teorema di Fermat*). *Sia $x_0 \in (a,b)$ un punto di estremo locale di $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. Se f è derivabile in x_0 allora $f'(x_0)=0$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che x_0 sia un punto di minimo locale. Allora

$$f'(x_0) = \begin{cases} f'_+(x_0) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{h}_{>0}} \geq 0 \\ \\ f'_-(x_0) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{h}_{<0}} \leq 0 \end{cases}$$

Quindi $0 \leq f'(x_0) \leq 0$ che implica $f'(x_0)=0$. □

<u>ESEMPIO</u>. Consideriamo di nuovo il grafico in Figura 35.

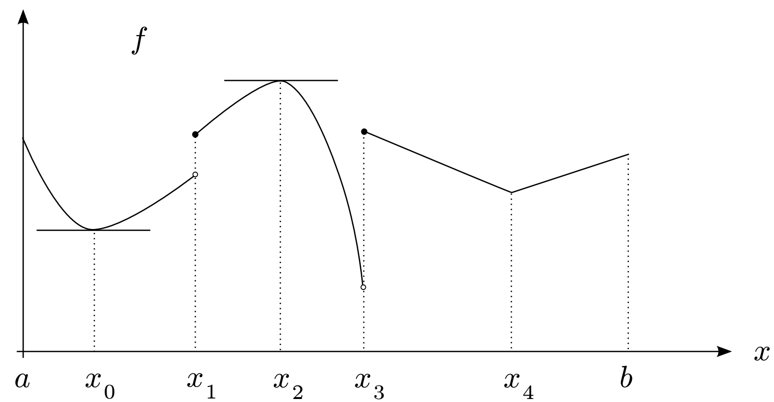


FIGURA 35. Estremi locali e tangenti orizzontali.

Allora la derivata $f'(x)$ si annulla negli estremi locali $x=x_0$ e $x=x_2$ che graficamente corrisponde a una retta tangente orizzontale.

<u>Osservazioni</u>. • Come si vede nel grafico sopra il teorema di Fermat *non* vale negli estremi dell'intervallo $[a, b]$. Cioè se $x_0 = a$ oppure $x_0 = b$ è un punto di estremo locale ciò *non* implica (come si vede nel grafico) che $f'(x_0) = 0$.

- Se $f'(x_0) = 0$ allora x_0 si dice *punto critico* oppure *punto stazionario* di f.
- Il Teorema di Fermat fornisce soltanto una condizione necessaria ma *non* sufficiente per estremi locali, cioè *non* ogni punto critico è un punto di estremo locale. Basta considerare $f(x) = x^3$ per $x \in \mathbb{R}$. Allora $f'(x) = 3x^2$ e quindi $x_0 = 0$ è un punto critico ma non è un punto di estremo locale.

Tornando al problema di trovare gli estremi locali di una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possiamo affermare che i *candidati* per punti di estremo locale sono

- i punti in cui f non è derivabile,
- i punti sul "bordo" del dominio X di f,
- i punti critici al "interno" del dominio.

I punti delle prime due classi sono quelli per i quali *non* si può applicare Fermat, la terza classe invece sono quelli che vengono da Fermat.

Consideriamo un altro

<u>Esempio</u>. Definiamo $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0, \\ x^x & \text{se } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Per studiare f si rappresenta usando logaritmo ed esponenziale, cioè si scrive

$$x^x = \left(e^{\ln(x)}\right)^x = e^{x \cdot \ln(x)} \qquad \text{per ogni } x > 0.$$

Per procedere calcoliamo il limite

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{x \cdot \ln(x)}.$$

Usando la sostituzione

$$-\ln(x) = t \to +\infty \qquad \text{per } x \to 0^+$$

e visto che $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \ldots \geq \frac{t^2}{2}$ per ogni $t > 0$ segue

$$0 \leq \lim_{x\to 0^+} |x \cdot \ln(x)| = \lim_{t\to+\infty} \left|\tfrac{-t}{e^t}\right| \leq \lim_{t\to+\infty} \tfrac{t}{t^2/2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x) = 0.$$

Quindi dalla continuità dell'esponenziale risulta[2]

$$\lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x)} = e^0 = 1 = f(0)$$

implicando che f è continua in $x = 0$. Siccome f, come composizione di funzioni continue, è anche continua in ogni $x \in (0, 1]$ risulta che $f \in \mathrm{C}[0, 1]$ e quindi ammette minimo e massimo per il teorema di Weierstraß. Per calcolarli useremo il teorema di Fermat. Allora per $x \in (0, 1)$ la funzione f e derivabile con

$$f'(x) = \left(e^{x\cdot\ln(x)}\right)' = e^{x\cdot\ln(x)} \cdot \left(x \cdot \tfrac{1}{x} + 1 \cdot \ln(x)\right) = \left(1 + \ln(x)\right) \cdot x^x = 0 \quad \iff \quad x = \tfrac{1}{e},$$

cioè $x_0 := \frac{1}{e} \in [0, 1]$ è l'unico punto critico di f. Quindi sappiamo:

- i candidati per i punti di estremo locale sono gli estremi dell'intervallo $a = 0$, $b = 1$ e il punto critico $x_0 = \frac{1}{e}$,
- f ammette $m := \min f$ e $M := \max f$ nell'intervallo $[0, 1]$,
- $f(0) = f(1) = 1$, $f(x_0) = (\frac{1}{e})^{(\frac{1}{e})} = e^{-\frac{1}{e}} < 1$.

Ciò implica $M = \max f = f(0) = f(1) = 1$ e $m = \min f = f(\frac{1}{e}) = e^{-\frac{1}{e}}$.

[2] Vedremo in seguito metodi molto più semplici per calcolare questo limite

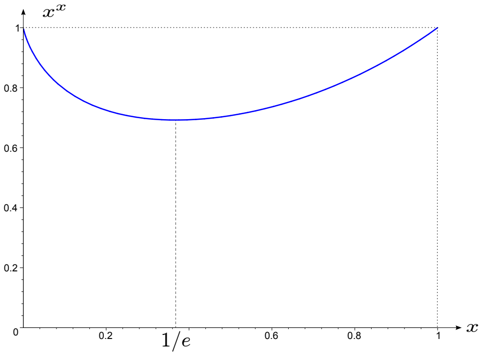


FIGURA 36. Grafico di $f(x) = x^x$.

ESEMPIO. Continuiamo lo studio del problema posto a pagina 111:
Trovare il valore massimo $V_{\max}$ di $V(x) = x(a-2x)(b-2x)$ per $x \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$. Visto che la funzione V è continua e l'intervallo $\left[0, \frac{a}{2}\right]$ è chiuso e limitato questo problema ammette almeno una soluzione per il teorema di Weierstraß. Inoltre, V è derivabile e quindi possiamo utilizzare il teorema di Fermat per trovare il punto di massimo $x_0 \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$ cioè tale che $V_{\max} = V(x_0)$. Calcolando $V'(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab$ otteniamo i punti critici $x_{1,2} = \frac{1}{6}\big(a + b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}\big)$. Visto che $0 < a \leq b$ segue $a^2 - ab \leq 0$ e quindi $a^2 - ab \geq 4a^2 - 4ab$. Di conseguenza

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{6}\left(a + b + \sqrt{a^2 - ab + b^2}\right) \geq \frac{1}{6}\left(a + b + \sqrt{4a^2 - 4ab + b^2}\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(a + b + \sqrt{(2a-b)^2}\right) = \frac{1}{6}\big(a + b + |2a - b|\big) \\ &\geq \frac{1}{6}\big(a + b + (2a - b)\big) = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Usando il fatto $V(0) = V\left(\frac{a}{2}\right) = 0$ risulta che $x_0 = x_2 = \frac{1}{6}\big(a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}\big)$. Per esempio se scegliamo un cartoncino di formato A 4, cioè di dimensione $21\,\text{cm} \times 29,7\,\text{cm}$, allora otteniamo $x_0 \approx 4,04\,\text{cm}$ e $V_{\max} = V(x_0) = 1128,5\,\text{cm}^3$, cfr. Figura 37. In particolare si può costruire un contenitore il cui volume è più di un litro.

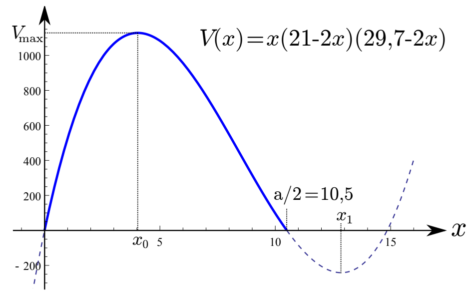


FIGURA 37. Volume contenitore da cartoncino formato A4.

I Teoremi di Rolle e Lagrange

Il seguente risultato stabilisce l'esistenza di punti critici sotto certi ipotesi.

TEOREMA 5.6 (*Teorema di Rolle*). *Sia* $f \in \mathrm{C}[a,b]$ *derivabile in* (a,b). *Se* $f(a) = f(b)$ *allora esiste* $c \in (a,b)$ *tale che* $f'(c) = 0$ *(cfr. Figura 38).*

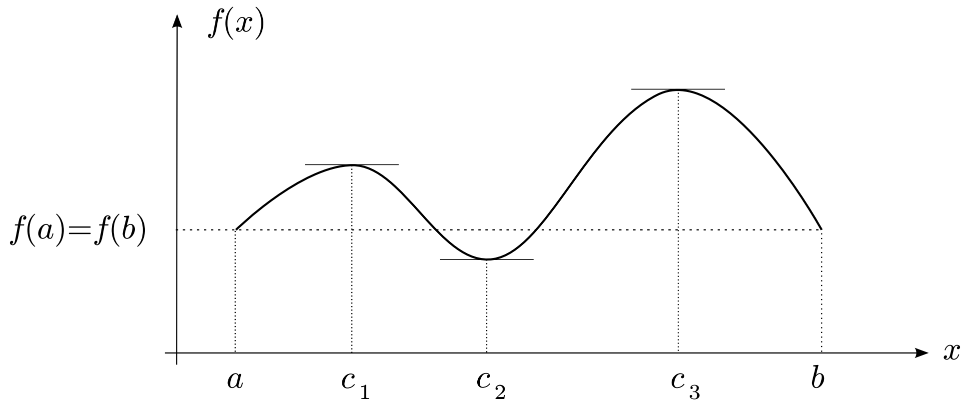


FIGURA 38. Teorema di Rolle: Tre punti con $f'(c_1) = 0 = f'(c_2) = f'(c_3) \iff$ retta tangente orizzontale

Dimostrazione. Per Weierstraß f ammette minimo $m := \min f = f(x_0)$ e massimo $M := \max f = f(x_1)$ in $x_0, x_1 \in [a, b]$. Ora ci sono 2 possibilità:

1° Caso: $m = M$, allora f è costante e quindi $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$.

2° Caso: $m < M$. Poiché $f(a) = f(b)$ almeno uno dei punti x_0, x_1 è diverso da a e da b e in questo punto f' si annulla per il teorema di Fermat. □

Il Teorema di Rolle si può generalizzare togliendo la condizione $f(a) = f(b)$. Così segue il prossimo risultato che è uno dei più importanti di questo corso.

Teorema 5.7 (*Teorema di Lagrange* (o del valor medio)). *Sia $f \in \mathrm{C}[a, b]$ derivabile in (a, b). Allora esiste $c \in (a, b)$ (detto punto di Lagrange) tale che*

$$\underbrace{f'(c)}_{\substack{=\textit{pendenza della retta}\\ \textit{tangente } t \textit{ in } (c, f(c))}} = \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{\substack{=\textit{pendenza della retta}\\ \textit{secante } s \textit{ attraverso}\\ (a, f(a)) \textit{ e } (b, f(b))}}$$

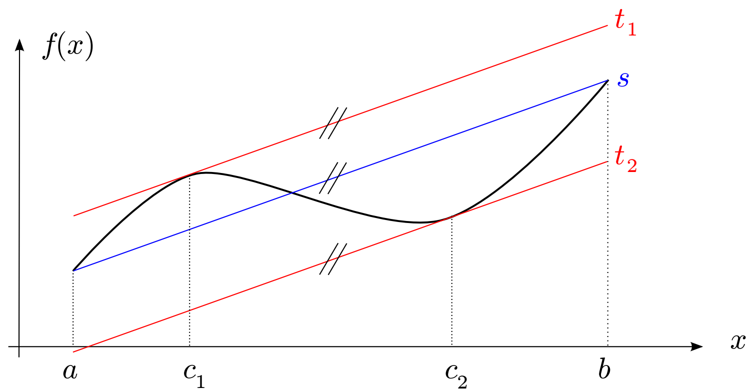


Figura 39. Teorema di Lagrange: Due punti di Lagrange c_1 e c_2.

Quindi il teorema stabilisce che esiste un punto c tale che la retta tangente t al grafico di f in $(c, f(c))$ e la retta secante attraverso $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ sono parallele.

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare il Teorema di Rolle alla funzione $\tilde{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a).$$

□

Conseguenze del Teorema di Lagrange

Il Teorema di Lagrange ha molte applicazioni per le quali, però, viene usato nel seguente modo: Se $f \in \mathrm{C}[a,b]$ è derivabile in (a,b) allora per ogni $x_1, x_2 \in [a,b]$ esiste c tra x_1 e x_2 tale che

$$\boxed{f(x_2) = f(x_1) + f'(c)\cdot(x_2-x_1)}$$

Per ottenere questa versione del teorema basta sostituire a, b con x_1, x_2 e poi risolvere l'equazione per $f(x_2)$.

Test di Monotonia. *Se $f \in \mathrm{C}[a,b]$ è derivabile in (a,b) allora*

- *f è crescente $\iff$ $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$;*
- *f è decrescente $\iff$ $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a,b)$;*
- *$f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b) \Rightarrow f$ è strettamente crescente;*
- *$f'(x) < 0$ per ogni $x \in (a,b) \Rightarrow f$ è strettamente decrescente.*

Prima di dimostrare il test osserviamo che nel punto 3 e 4 *non* vale l'equivalenza, basta considerare $f(x) = x^3$ per $x \in \mathbb{R}$ che è strettamente crescente nonostante che $f'(x) = 3x^2$ si annulla per $x = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Dimostreremo soltanto il primo punto. "$\Rightarrow$": Se f è crescente, allora

$$f'(x) = f'_+(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\overbrace{f(x+h)}^{\geq f(x)} - f(x)}{\underbrace{h}_{>0}} \geq 0.$$

"$\Leftarrow$": Sia $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$. Allora per $x_1, x_2 \in [a,b]$ con $x_1 < x_2$ esiste $c \in (a,b)$ tale che

$$f(x_2) = f(x_1) + \underbrace{f'(c)}_{\geq 0}\cdot\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0} \geq f(x_1),$$

cioè f è crescente. □

<u>Esempio</u>. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3 - 3x^2 + 6x - 3$. Allora

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 = 3(x^2 - 2x + 1) + 3 = 3(x-1)^2 + 3 > 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

e quindi f è strettamente crescente e di conseguenza iniettiva. Inoltre $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ e quindi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è anche suriettiva e di conseguenza invertibile. Visto che $f'(x) \neq 0$ dal risultato sulla derivabilità della funzione inversa (cfr. pagina 107) segue che $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile con $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ dove $y_0 = f(x_0)$. Per esempio, per $y_0 = -3$ vale $y_0 = f(0)$, cioè $x_0 = 0$ e quindi

$$(f^{-1})'(-3) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{6}.$$

Dal test di monotonia segue anche facilmente la seguente

<u>Proposizione</u> 5.8. *Se $f, g \in C[a, b]$ sono derivabili in (a, b) e*

$$f(a) \geq g(a) \qquad \textit{e} \qquad f'(x) \geq g'(x) \quad \textit{per ogni } x \in (a, b)$$

allora $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Dimostrazione. Definiamo $h := f - g$. Allora $h'(x) = f'(x) - g'(x) \geq 0$ e quindi h è crescente con $h(a) = f(a) - g(a) \geq 0$. Ciò implica $h(x) = f(x) - g(x) \geq 0$, quindi $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. □

Criterio per Estremi Locali. *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile e sia $x_0 \in (a,b)$ un punto critico di f (cioè $f'(x_0) = 0$). Allora x_0 è un punto di*

- *massimo locale, se $f'(x)$ cambia in x_0 segno da "+" a "−";*
- *minimo locale, se $f'(x)$ cambia in x_0 segno da "−" a "+";*

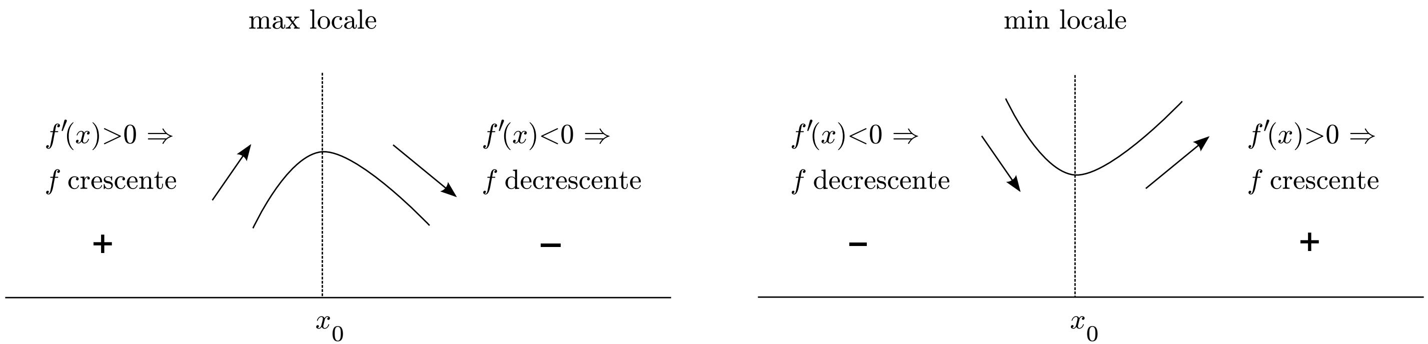


FIGURA 40. Criterio per estremi locali.

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione segue dal test di monotonia: se vale la prima condizione, allora f poco prima di x_0 è crescente mentre poco dopo è decrescente e quindi x_0 è un punto di massimo locale. Similmente segue la seconda affermazione, cfr. Figura 40. □

ESEMPIO. Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{\ln(x)}{x}$. Allora f è derivabile con

$$f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - 1 \cdot \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Quindi $f'(x) = 0 \iff \ln(x) = 1 \iff x = e$, cioè $x_0 = e$ è l'unico punto critico di f. Inoltre,

- $\ln(x) < 1$ per $x \in (0, e) \Rightarrow f'(x)$ è positiva prima di $x_0 = e$,
- $\ln(x) > 1$ per $x \in (e, +\infty) \Rightarrow f'(x)$ è negativa dopo $x_0 = e$

cioè $f'(x)$ cambia in $x_0 = e$ segno da "+" a "−" $\Rightarrow x_0 = e$ è un punto di massimo locale.

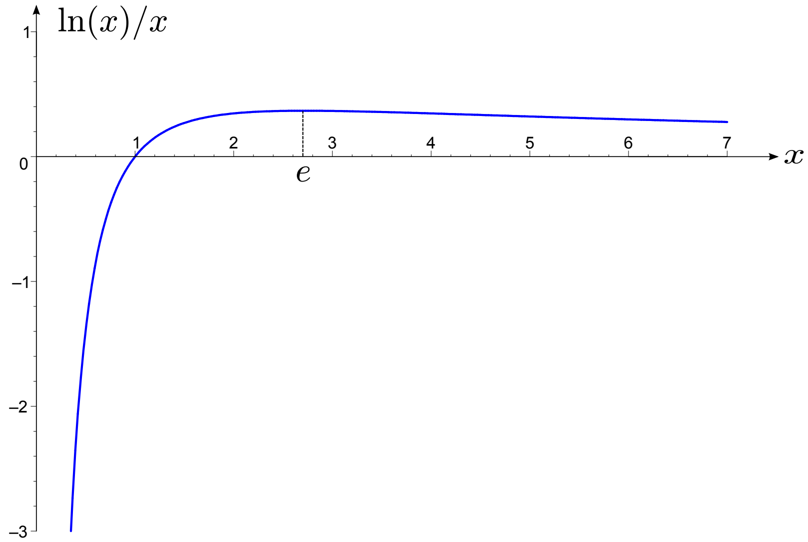


Figura 41. Grafico di $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

Caratterizzazione di Funzioni Costanti. *Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e derivabile, allora*

$$f \text{ è costante} \iff f'(x) = 0 \text{ per ogni } x \in (a, b)$$

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Questa implicazione è banale visto che per f è costante il rapporto incrementale è 0 e quindi anche ammette limite 0. "$\Leftarrow$" Usando il test di monotonia dall'ipotesi

$$f'(x) = 0 \text{ per ogni } x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f'(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in (a, b) & \Rightarrow \ f \text{ è crescente, inoltre} \\ f'(x) \leq 0 \text{ per ogni } x \in (a, b) & \Rightarrow \ f \text{ è decrescente.} \end{cases}$$

Però le uniche funzioni su intervalli che sono crescenti e anche decrescenti sono le funzioni costanti. □

Questa caratterizzazione sembra banale ma tuttavia è utile per dimostrare risultati che non sono così ovvi.

ESEMPIO. Definiamo $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \arctan(x) + \arctan\big(\tfrac{1}{x}\big), \quad x \neq 0.$$

Allora f è derivabile con

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\big(\frac{1}{x}\big)^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0 \qquad \text{per ogni } x \neq 0.$$

A questo punto, però, *non* possiamo concludere che f è costante visto che il dominio $X := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *non* è un intervallo. Invece $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ è l'unione di due intervalli e quindi f è costante sia sul intervallo $(-\infty, 0)$ che su $(0, +\infty)$. Quindi esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = c_1 \text{ per ogni } x > 0 \qquad \text{e} \qquad f(x) = c_2 \text{ per ogni } x < 0.$$

Per calcolare le costanti c_1, c_2 (che, come vedremo sono diversi) basta scegliere un valore opportuno $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$ poiché in ogni caso $f(x_1) = c_1$ e $f(x_2) = c_2$. Per la funzione f possiamo per esempio scegliere $x = 1$ e $x_2 = -1$ e così risulta

$$\arctan(x) + \arctan\big(\tfrac{1}{x}\big) = f(x) = \begin{cases} f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} & \text{per ogni } x > 0, \\ f(-1) = \arctan(-1) + \arctan(-1) = 2 \cdot \frac{-\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} & \text{per ogni } x < 0. \end{cases}$$

Le Regole di de l'Hospital

Partiamo con il seguente importante

PROBLEMA. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$$

che al limite rappresenta una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Per esempio

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\frac{0}{0} \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\frac{+\infty}{+\infty}.$$

Nonostante i due limiti precedenti si possano calcolare anche direttamente, le seguenti regole ne semplificano molto lo svolgimento. Non presentiamo la dimostrazione che comunque si basa sempre sul Teorema di Lagrange.

TEOREMA 5.9 (*Regole di de l'Hospital*). *Siano* $-\infty\le a<b\le+\infty$ *e* $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ *tale che*

- $\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^+}g(x)=0$ *oppure* $=\pm\infty$,
- f,g *sono derivabili con* $g'(x)\neq 0$ *per ogni* x *vicino ad* a,
- $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=: l\in\overline{\mathbb{R}}$ *esiste.*

Allora anche

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

La stessa conclusione vale anche per limiti del tipo $\lim_{x\to b^-}$ *e* $\lim_{x\to x_0}$ *per* $x_0\in(a,b)$.

Prima di svolgere alcuni esempi facciamo le seguenti

<u>OSSERVAZIONE</u>.

- Se $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste *non* si può dedurre che anche $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ non esiste. Cioè l'Hospital offre soltanto una condizione sufficiente ma non necessaria per l'esistenza di un limite. Per verificare ciò consideriamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{x} \left(= \tfrac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\overbrace{\sin(x)}^{\text{limitato}}}{\underbrace{x}_{\to+\infty}} = 1$$

  che quindi converge mentre il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\big(x+\sin(x)\big)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos(x)}{1}$$

  non esiste.

- L'Hospital *non* si deve applicare a forme determinate. Per esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x}{2+x} = \frac{1}{2} \neq \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)'}{(2+x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1} = 1.$$

Consideriamo ora alcuni esempi in cui il simbolo "$\overset{\text{H}}{=}$" significa che abbiamo applicato l'Hospital, cioè derivato numeratore e denominatore.

<u>ESEMPI</u>.

- Sia $\alpha > 0$. Allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} \left(= \tfrac{\pm\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha\cdot x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha\cdot x^\alpha} = 0.$$

- Usando piccoli trucchi si possono anche studiare limiti che all'inizio non sono della forma indeterminata $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Per esempio, per $\alpha > 0$ vale

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \cdot \ln(x) = \big(0\cdot(-\infty)\big) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-\alpha}} \left(= \tfrac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0.$$

- Puó succedere anche che dopo un'applicazione di l'Hospital si ottiene nuovamente una forma indeterminata ammessa. In questi casi si può provare ad applicare l'Hospital più volte. Per esempio

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^3}\left(=\tfrac{0}{0}\right)\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{3x^2}\left(=\tfrac{0}{0}\right)\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{6x}\left(=\tfrac{0}{0}\right)\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{6}=\frac{1}{6}.$$

  Qui la seconda e terza applicazione di l'Hospital si potrebbe evitare ricordando i limiti notevoli (1) e (2) a pagina 79. Però confrontando i procedimenti si vede che le regole di l'Hospital hanno semplificato notevolmente il calcolo di questi limiti.

- Per calcolare limiti del tipo $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ si procede come segue:

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\big)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)}$$

  dove l'ultima uguaglianza segue dalla continuità della funzione esponenziale.

  Per dare un esempio concreto consideriamo

$$\lim_{x\to 0}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{\sin(x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(x+e^x\right)}{\sin(x)}}.$$

  Per l'esponente otteniamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(x+e^x\right)}{\sin(x)}\left(=\frac{\ln(0+e^0)}{\sin(0)}=\frac{\ln(1)}{0}=\frac{0}{0}\right)\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+e^x}\cdot(1+e^x)}{\cos(x)}=2$$

  e quindi

$$\lim_{x\to 0}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{\sin(x)}}=e^2$$

Approssimazione Lineare di Funzioni

Torniamo ora al problema iniziale posto a pagina 97: Data $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in (a, b)$, trovare

(i) la retta tangente t al grafico di f nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$, e

(ii) un'approssimazione lineare $g(x) = \alpha \cdot x + \beta$ (cioè g è un polinomio di grado ≤ 1) per $f(x)$ per x vicino a x_0.

Abbiamo risolto (i): Se f è derivabile in x_0, allora la retta tangente t è data dall'equazione

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Quindi la retta tangente è il grafico di un polinomio di grado ≤ 1 e di conseguenza si può avere l'idea di usare proprio $g(x) := t(x)$ come approssimazione lineare. Come vedremo in seguito, questa scelta è infatti in un certo senso la migliore possibile. Per verificare ciò scriviamo

$$f(x) = t(x) + r(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\textit{approssimazione lineare}} \quad + \quad \underbrace{r(x)}_{\textit{resto (o errore)}}$$

cioè $r(x) = f(x) - t(x)$, cfr. Figura 42.

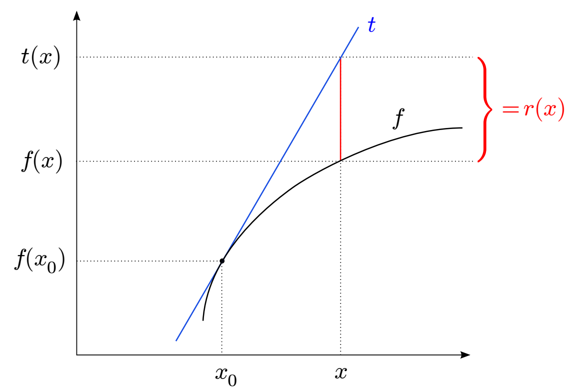


FIGURA 42. Il resto $r(x)$.

Studiamo le proprietà di $r(x)$:

- $r(x_0) = 0$ cioè nel punto x_0 l'approssimazione dà il valore esatto,
- vale

$$\frac{r(x)}{x - x_0} = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} - f'(x_0) \to 0 \qquad \text{per } x \to x_0.$$

Cioè per $x \to x_0$ il resto $r(x)$ tende a 0 più rapidamente di $x - x_0$.

Per confrontare meglio il comportamento di due funzioni facciamo la seguente

Definizione 5.10. Se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

allora si dice che *f è o-piccolo di g per $x \to x_0$* e in questo caso si scrive $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ o più brevemente $f = o(g)$ per $x \to x_0$.

Osservazioni.

- $o(\cdot)$ si chiama *simbolo di Landau*.
- $f = o(g)$ per $x \to x_0$ significa per
  - *infinitesimi* che $f(x) \to 0$ più rapidamente che $g(x) \to 0$ per $x \to x_0$;
  - *infiniti* che $f(x) \to \pm\infty$ più lentamente che $g(x) \to \pm\infty$ per $x \to x_0$.

<u>ESEMPI</u>. • $\ln(x) = o(x)$ per $x \to +\infty$ poiché $\frac{\ln(x)}{x} \to 0$ per $x \to +\infty$.

- $1 - \cos(x) = o(x)$ per $x \to 0$ poiché
$$\frac{1-\cos(x)}{x} = \underbrace{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}_{\to\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} \to \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \qquad \text{per } x \to 0.$$
- $x = o(x^2)$ per $x \to \pm\infty$ mentre $x^2 = o(x)$ per $x \to 0$.
- $f(x) \to 0$ per $x \to x_0 \iff f(x) = o(1)$ per $x \to x_0$.
- Tornando al problema di approssimazione lineare possiamo ora dire che $r(x) = o(x - x_0)$ per $x \to x_0$.

Con gli o-piccoli si possono caratterizzare le funzioni derivabili.

<u>PROPOSIZIONE</u> 5.11. *Per una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$ le seguenti affermazioni sono equivalenti.*
(a) f è derivabile in x_0.
(b) Esiste $A \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$.
In questo caso $A = f'(x_0)$.

Quindi questa proposizione stabilisce che l'approssimazione lineare $t(x)$ data dalla retta tangente t è l'unica che lascia un resto $r(x)$ che per $x \to x_0$ tende a 0 più rapidamente che la distanza $x - x_0$ tra x e x_0. Cioè per ogni altra scelta di approssimazione con un polinomio di grado ≤ 1 il resto tende a zero più lentamente. In questo senso $t(x)$ è la migliore approssimazione lineare possibile di $f(x)$ per x vicino a x_0.
Consideriamo alcuni

<u>ESEMPI</u>. • Se $f(x) = e^x$ e $x_0 = 0$, allora la derivabilità di f implica $e^x = f(0) + f'(0) \cdot x + o(x) = e^0 + e^0 \cdot x + o(x)$, cioè
$$\boxed{e^x = 1 + x + o(x) \text{ per } x \to 0}$$

- Se $f(x) = \sin(x)$ e $x_0 = 0$, allora la derivabilità di f implica $\sin(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + o(x) = \sin(0) + \cos(0) \cdot x + o(x)$, cioè
$$\boxed{\sin(x) = x + o(x) \text{ per } x \to 0}$$

- Se $f(x) = \ln(1+x)$ e $x_0 = 0$, allora la derivabilità di f implica $\ln(1+x) = f(0) + f'(0) \cdot x + o(x) = \ln(1) + \frac{1}{1+0} \cdot x + o(x)$, cioè

$$\boxed{\ln(1+x) = x + o(x) \text{ per } x \to 0}$$

La Formula di Taylor

Abbiamo quindi risolto anche il problema dell'approssimazione lineare, cioè di approssimare il valore $f(x)$ di una funzione (possibilmente molto complicata) vicino al punto x_0 con un polinomio $t(x)$ (cioè con una funzione molto semplice) di grado ≤ 1.
A questo punto si può avere l'idea di limitare il grado dell'approssimazione non a 1 ma a un numero $n \in \mathbb{N}$ qualsiasi. Cioè si può generalizzare il problema dell'approssimazione lineare nel seguente modo:

<u>Problema</u>. Data $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ e $n \in \mathbb{N}$, approssimare $f(x)$ per x vicino a x_0 con un polinomio $T_n(x)$ di grado $\leq n$

Per $n = 1$ abbiamo visto che $T_1(x) = t(x)$ è la migliore scelta possibile. Per risolvere il problema per $n \in \mathbb{N}$ dobbiamo prima introdurre le

Derivate Successive.

<u>Definizione</u> 5.12. Se f è derivabile e tale che f' è nuovamente derivabile, allora possiamo definire

$$(f')' =: f'' = \text{ derivata seconda } =: D^2 f =: \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Se si può continuare in questa maniera n volte otteniamo

$$f^{(n)} = \text{ derivata } n\text{-esima } =: D^n f =: \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Inoltre, se I è un'intervallo e $n \in \mathbb{N}$ definiamo $\mathrm{C}^0(I) := \mathrm{C}(I)$ (e $f^{(0)} := f$) e per $n \geq 1$

$$\mathrm{C}^n(I) := \left\{ f : I \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ è derivabile } n\text{-volte} \\ \text{e } f^{(n)} \text{ è continua} \end{array} \right\}$$

Se $f \in \mathrm{C}^n(I)$ si dice anche che f è *derivabile n-volte con continuità* (qui la continuità si riferisce alla derivata n-esima $f^{(n)}$ e *non* a f).

<u>Esempio</u>. Se $f(x) = \sin(x)$, allora f è derivabile con $f'(x) = \cos(x)$ che è anche derivabile. Quindi otteniamo $f''(x) = \cos'(x) = -\sin(x)$ che è nuovamente derivabile. Così otteniamo $f'''(x) = -\sin'(x) = -\cos(x)$ che è sempre derivabile. Quindi esiste anche la derivata quarta che indichiamo con il simbolo $f^{(4)}(x) = -\cos'(x) = \sin(x) = f(x)$. Quindi dopo 4 derivazioni si ritorna alla funzione di partenza.

Dopo questo intermezzo sulle derivate successive possiamo tornare al problema dell'approssimazione di $f(x)$ per x vicino a x_0 attraverso un polinomio di grado $\leq n$. Per ottenere un'idea come si può risolvere questo problema consideriamo i casi $n = 0$ e $n = 1$.

- Per $n = 0$ la migliore approssimazione con un polinomio di grado ≤ 0 (cioè con una costante) è ovviamente $T_0(x) := f(x_0) = T_0(x_0)$, cioè T_0 e f hanno in x_0 il valore in comune:
$$T_0(x_0) = f(x_0).$$
- Per $n = 1$ il problema diventa quello dell'approssimazione lineare che abbiamo risolto precedentemente: Se f è derivabile in x_0 allora la migliore approssimazione ci dà $t(x) =: T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Quindi $T_1(x_0) = f(x_0)$ e $T_1'(x) = f'(x_0)$ cioè T_1 e f hanno in x_0 il valore e derivata prima in comune:
$$\begin{aligned} T_1(x_0) &= f(x_0), \\ T_1'(x_0) &= f'(x_0). \end{aligned}$$

Quindi per $n \geq 2$ supponiamo che f sia n-volte derivabile e poi cerchiamo un polinomio T_n che con f ha in x_0 valore e tutte le derivate fino alla n-esima in comune:

$$\left.\begin{aligned} T_n(x_0) &= f(x_0), \\ T_n'(x_0) &= f'(x_0), \\ &\vdots \\ T_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0). \end{aligned}\right\} \iff: \quad f \text{ e } T_n \text{ hanno } \textit{contatto di ordine } n \textit{ in } x_0$$

Visto che questo sistema consiste da $n+1$ equazione e il polinomio T_n da determinare ha $n+1$ coefficienti $a_0, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ come incognite, il seguente risultato è plausibile.

PROPOSIZIONE 5.13. *Se $f \in \mathrm{C}^n(a, b)$ e $x_0 \in (a, b)$ allora esiste un unico polinomio T_n di grado $\leq n$ che ha un contatto di ordine n in x_0 con f. Questo polinomio si chiama* polinomio di Taylor *di ordine n con centro x_0 generato da f ed è dato da*

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k. \end{aligned}$$

Infine, se $x_0 = 0$, allora T_n viene anche chiamato polinomio di Maclaurin.

Dimostrazione. Verifichiamo soltanto che per $n=3$ il polinomio T_3 definito sopra ha contatto di ordine 3 con $f \in \mathrm{C}^3(a,b)$ in $x_0 \in (a,b)$. Infatti

$$\begin{aligned}
T_3(x) &= f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2 + \tfrac{f'''(x_0)}{3!}\cdot(x-x_0)^3 && \Rightarrow T_3(x_0) = f(x_0),\\
T_3'(x) &= f'(x_0) + f''(x_0)\cdot(x-x_0) + \tfrac{f'''(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2 && \Rightarrow T_3'(x_0) = f'(x_0),\\
T_3''(x) &= f''(x_0) + f'''(x_0)\cdot(x-x_0) && \Rightarrow T_3''(x_0) = f''(x_0),\\
T_3'''(x) &= f'''(x_0) && \Rightarrow T_3'''(x_0) = f'''(x_0).
\end{aligned}$$

□

Esempio. (Cfr. Figura 43) Sia $f(x)=e^x$. Allora $f \in \mathrm{C}^n(\mathbb{R})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $f^{(k)}(x) = f(x) = e^x$ per ogni $0 \le k \le n$. Quindi risulta per $x_0 = 0$ che $f^{(k)}(x_0) = e^0 = 1$ per ogni $0 \le k \le n$ e di conseguenza

$$T_n(x) = 1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3!} + \ldots + \tfrac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{x^k}{k!}.$$

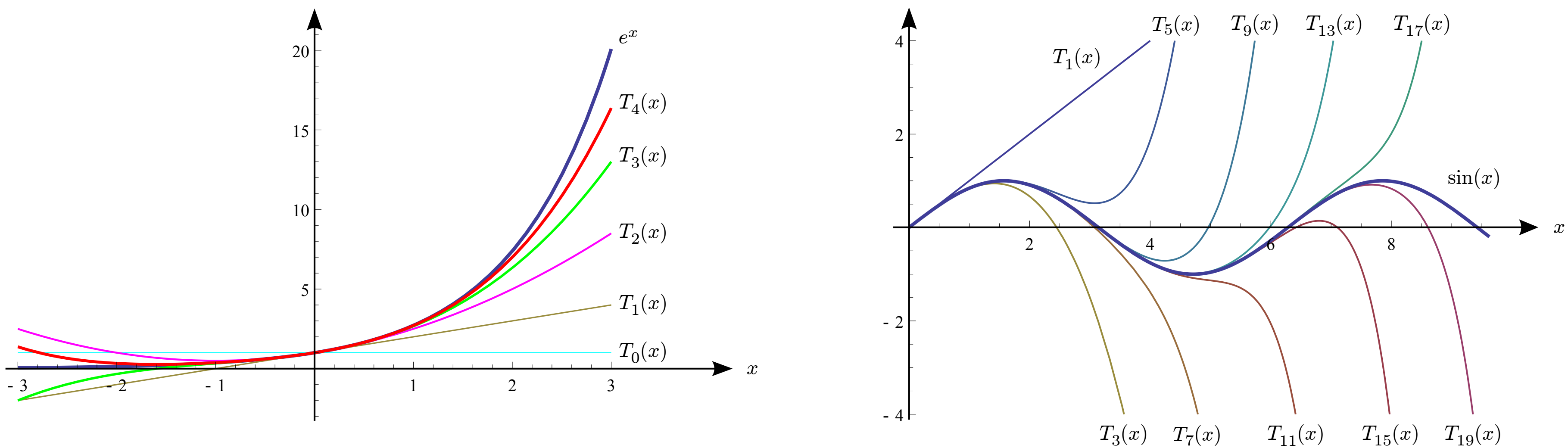


Figura 43. I primi polinomi di Maclaurin di $f(x)=e^x$ e $f(x)=\sin(x)$ (cfr. pagina 134).

Prima di considerare altri esempi ci poniamo il seguente

PROBLEMA. Quanto vale il *resto* (o *errore*) dovuto all'approssimazione con il polinomio di Taylor, cioè quanto vale

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x) \quad = ?$$

Consideriamo prima i casi che abbiamo già studiati.

$n = 0$: Per il Teorema di Lagrange esiste c tra x e x_0 tale che

$$\begin{aligned} R_0(x) = f(x) - T_0(x) = f(x) - f(x_0) &= f'(c) \cdot (x - x_0) \\ &= o(1) = o\big((x-x_0)^0\big) \text{ per } x \to x_0. \end{aligned}$$

$n = 1$: Visto che $T_1(x) = t(x) =$ approssimazione lineare (cfr. pagina 127) segue

$$R_1(x) = r(x) = o\big((x-x_0)^1\big) \text{ per } x \to x_0.$$

Nel caso generale $n \in \mathbb{N}$ vale la seguente generalizzazione di queste rappresentazioni di $R_n(x)$.

TEOREMA 5.14 (*Formula di Taylor*). *Sia $f \in \mathrm{C}^{n+1}(a,b)$ e sia $x_0 \in (a,b)$. Allora per $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$*

- *vale*

$$R_n(x) = o\big((x-x_0)^n\big) \quad \textit{per } x \to x_0 \qquad \text{(Resto di Peano)}$$

- *esiste c tra x e x_0 tale che*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1} \qquad \text{(Resto di Lagrange)}$$

OSSERVAZIONI. • Per la formula di Taylor con il resto di Peano basta che $f \in \mathrm{C}^n(a,b)$.

- La Formula di Taylor con il
  - Resto di Peano è un affermazione *qualitativa*, cioè afferma soltanto con che velocità il resto $R_n(x)$ tende a 0 per $x \to x_0$;
  - Resto di Lagrange è un affermazione *quantitativa*, che permette anche valutare la grandezza del resto (si noti tuttavia che c non è noto).

- Se per un polinomio $p(x)$ di grado $\leq n$ vale
$$f(x) - p(x) = o\big((x-x_0)^n\big) \quad \text{per } x \to x_0,$$
allora $p(x) = T_n(x)$. In altre parole $T_n(x)$ è l'unico polinomio di grado $\leq n$ che lascia un resto che per $x \to x_0$ tende più rapidamente a 0 che $(x-x_0)^n$. In questo senso la scelta di $T_n(x)$ come approssimazione di $f(x)$ per x vicino a x_0 è ottima. Questa osservazione ci permetterà in seguito di calcolare $T_n(x)$ senza calcolare alcuna derivata.
- Una rappresentazione esplicita del tipo $f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n)$ si chiama *sviluppo di Taylor di f di ordine n e centro x_0*.

Calcoliamo appunto alcuni sviluppi di Taylor.

<u>Esempi</u>.

- Dall'esempio precedente segue per $f(x) = e^x$ e $x_0 = 0$ che
$$\boxed{e^x = 1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3!} + \ldots + \tfrac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0.}$$
Per esempio $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \to 0$.
- Abbiamo già visto nell'esempio su pagina 130 che per $f(x) = \sin(x)$ vale
$$f'(x) = \cos(x),\ f''(x) = -\sin(x),\ f'''(x) = -\cos(x) \text{ e } f^{(4)}(x) = \sin(x) = f(x).$$
Quindi $f \in \mathrm{C}^n(\mathbb{R})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale
$$f^{(2k)}(0) = \pm\sin(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k.$$
Ciò implica
$$T_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
e quindi
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{per } x \to 0.$$

<u>Osservazione</u>. Siccome per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $f^{(2n+2)}(0) = 0$ segue $T_{2n+2}(x) = T_{2n+1}(x)$ e di conseguenza

$$f(x) = \underbrace{T_{2n+2}(x)}_{=T_{2n+1}(x)} + o(x^{2n+2}) = T_{2n+1}(x) + o(x^{2n+2}).$$

Così risulta lo sviluppo

$$\boxed{\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+\mathbf{2}}) \quad \text{per } x \to 0.}$$

Per esempio per $n = 1$ vale

$$T_4(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\overbrace{f^{(4)}(0)}^{=0}}{4!} \cdot x^4 = T_3(x) \qquad \text{e quindi}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^{\mathbf{4}}) \quad \text{per } x \to 0.$$

Questo sviluppo è migliore dello sviluppo $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ in quanto per $x \to 0$ l'espressione x^4 tende a zero più rapidamente che x^3.

Questo guadagno di un grado nel $o(\cdot)$ si ottiene anche per altri sviluppi di Maclaurin (cioè per $x_0 = 0$) di funzioni pari oppure dispari in quanto

- tutte le derivate di ordine pari di una funzione dispari in $x_0 = 0$ si annullano (come sopra per il sin),
- tutte le derivate di ordine dispari di una funzione pari in $x_0 = 0$ si annullano (per esempio per il cos).

Di conseguenza in uno sviluppo di Maclaurin di una

- funzione pari compariranno soltanto termini x^k con k pari, mentre per
- funzione dispari compariranno soltanto termini x^k con k dispari.

Nella stessa maniera seguono i seguenti sviluppi.

- Come già sopra indicato vale per $f(x) = \cos(x)$ (= funzione pari) e $x_0 = 0$ che $T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x)$. Quindi

$$\boxed{\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+\mathbf{1}}) \quad \text{per } x \to 0.}$$

Per esempio per $n = 2$ otteniamo $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^{\mathbf{5}})$ per $x \to 0$.

- Per le funzioni iperboliche sinh (= dispari) e cosh (= pari) valgono i seguenti sviluppi che sono molto simili a quelli delle funzioni sin e cos:

$$\boxed{\sinh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+\mathbf{2}}) \quad \text{per } x \to 0,}$$

$$\boxed{\cosh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+\mathbf{1}}) \quad \text{per } x \to 0.}$$

  Per esempio $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^{\mathbf{4}})$ e $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^{\mathbf{5}})$ per $x \to 0$.

- Per $f(x) = \arctan(x)$ (= funzione dispari) e $x_0 = 0$ vale $T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x)$. Quindi

$$\boxed{\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+\mathbf{2}}) \quad \text{per } x \to 0.}$$

  Per esempio per $n = 2$ otteniamo $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^{\mathbf{6}})$ per $x \to 0$.

- Per $f(x) = \operatorname{artanh}(x)$ (= funzione dispari) e $x_0 = 0$ vale $T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x)$. Quindi

$$\boxed{\operatorname{artanh}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+\mathbf{2}}) \quad \text{per } x \to 0.}$$

  Per esempio per $n = 2$ otteniamo $\operatorname{artanh}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^{\mathbf{6}})$ per $x \to 0$.

- Per $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x):=\ln(1+x)$ e $x_0=0$ si ottiene

$$\boxed{\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cdot\frac{x^k}{k}+o(x^n)\quad\text{per } x\to 0.}$$

Per esempio per $n=3$ otteniamo $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$ per $x\to 0$.

- Per $\alpha\in\mathbb{R}$ e $k\in\mathbb{N}$ definiamo il *coefficiente binomiale generalizzato*

$$\binom{\alpha}{k}:=\begin{cases}1 & \text{se } k=0,\\ \dfrac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k} & \text{se } k\geq 1.\end{cases}$$

Per esempio $\binom{\frac12}{2}=\frac{\frac12\cdot(\frac12-1)}{1\cdot 2}=-\frac18$. Allora per $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x):=(1+x)^\alpha$ per $\alpha\in\mathbb{R}$ e $x_0=0$ si ottiene

$$\boxed{(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\cdot x^k+o(x^n)\quad\text{per } x\to 0}$$

che è una generalizzazione della formula del binomio di Newton (cfr. pagina 13) per esponenti $\alpha\in\mathbb{R}$. Per esempio, per $\alpha=\frac12$ e $n=2$ otteniamo

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac12}&=\binom{\frac12}{0}\cdot x^0+\binom{\frac12}{1}\cdot x^1+\binom{\frac12}{2}\cdot x^2+o(x^2)\\&=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)\quad\text{per } x\to 0.\end{aligned}$$

La Formula di Taylor è molto importante come si vede anche dalle seguenti

Applicazioni della Formula di Taylor

Criterio per Estremi Locali. *Sia $f \in \mathrm{C}^n(a,b)$ per $n \geq 2$ e sia $x_0 \in (a,b)$ tale che*

$$f'(x_0) = 0 = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) \qquad e \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Se n è pari, allora f ammette in x_0 un

- *minimo locale, se $f^{(n)}(x_0) > 0$,*
- *massimo locale, se $f^{(n)}(x_0) < 0$.*

Se n è dispari, allora x_0 non *è un punto di estremo locale di f.*

Il caso più importante è $n = 2$: Se $f'(x_0) = 0$ e

- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è un punto di minimo locale,
- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è un punto di massimo locale.

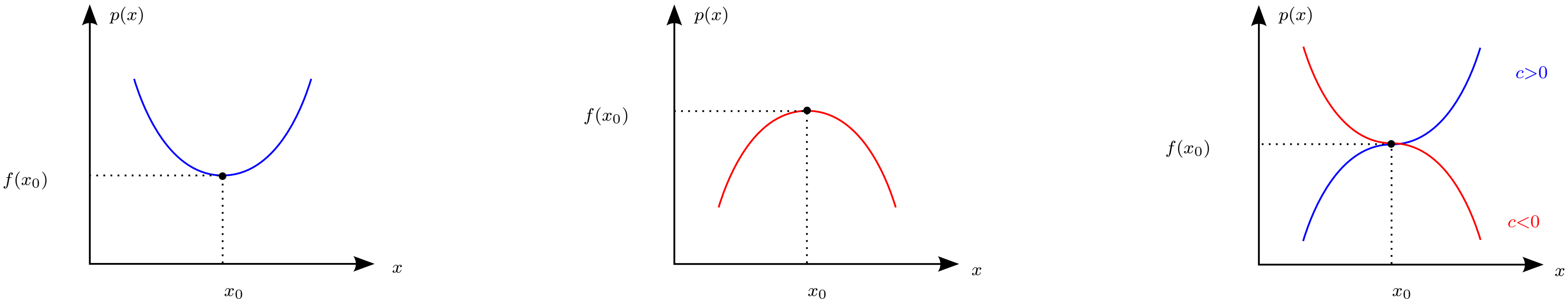
Cenno della Dimostrazione. Per la Formula di Taylor con Resto di Peano vale

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \overbrace{f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \ldots + \tfrac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\cdot(x-x_0)^{n-1}}^{=0} + \tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n \\ &\quad + \underbrace{o\big((x-x_0)^n\big)}_{=\text{“piccolo errore” trascurabile}} \\ &\approx f(x_0) + c\cdot(x-x_0)^n \qquad \text{per } x \text{ vicino a } x_0 \end{aligned}$$

con $c = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Quindi anziché studiare se x_0 è un punto di estremo locale di $f(x)$ basta considerare la stessa questione per il polinomio

$$p(x) := f(x_0) + c\cdot(x-x_0)^n.$$

A questo punto ci sono tre casi, cfr. Figura 44.



(1) n pari $c > 0 \Rightarrow$ min (2) n pari $c < 0 \Rightarrow$ max (3) n dispari

Figura 44. Criterio per estremi locali.

(1) n pari e $c > 0$ ($\iff$ $f^{(n)}(x_0) > 0$): Allora x_0 è un punto di minimo locale;

(2) n pari e $c < 0$ ($\iff$ $f^{(n)}(x_0) < 0$): Allora x_0 è un punto di massimo locale;

(3) n dispari: Allora x_0 *non* è un punto di estremo locale. $\square$

<u>Esempi</u>.
- Consideriamo $f(x) = x^2$. Allora $f'(x) = 2x$ e $f''(x) = 2 \Rightarrow f'(0) = 0$ e $f''(0) > 0$ (cioè $n = 2 =$ pari) $\Rightarrow x_0 = 0$ è un punto di minimo di f.
- Consideriamo $f(x) = x^3$. Allora $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ e $f'''(x) = 6 \Rightarrow f'(0) = 0 = f''(0)$ e $f'''(0) \neq 0$ (cioè $n = 3 =$ dispari) $\Rightarrow x_0 = 0$ non è un punto di estremo di f.
- Sia $f(x) = x \cdot \sin(x) - \cos(2x)$, $x \in \mathbb{R}$. Allora $f'(x) = x \cdot \cos(x) + 1 \cdot \sin(x) + \sin(2x) \cdot 2$ e quindi $f'(0) = 0$, cioè $x_0 = 0$ è un punto critico di f. Per decidere la sua natura calcoliamo anche le derivate successive in $x_0 = 0$:
  $f''(x) = x \cdot (-\sin(x)) + 1 \cdot \cos(x) + \cos(x) + 2 \cdot \cos(2x) \cdot 2 \Rightarrow f''(0) = 0 + 1 + 1 + 2 \cdot 2 = 6 > 0 \Rightarrow x_0 = 0$ è un punto di minimo locale di f.

Calcolo dei Limiti. Generalizziamo prima il concetto di asintoticità dalle successioni alle funzioni.

Definizione 5.15. Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, allora si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono *asintotiche* e si scrive $f(x) \sim g(x)$ (o anche solo $f \sim g$) per $x \to x_0$.

OSSERVAZIONE. Se $f \sim g$ per $x \to x_0$, allora $f(x)$ e $g(x)$ hanno lo stesso comportamento asintotico, cioè
$f(x) \to l$ per $x \to x_0 \iff g(x) \to l$ per $x \to x_0$.

Come per le successioni anche per le funzioni vale il

TEOREMA 5.16 (*Principio di Sostituzione*). *Se $f_1 \sim f_2$ e $g_1 \sim g_2$ per $x \to x_0$, allora*

$$f_1 \cdot g_1 \sim f_2 \cdot g_2 \quad \textit{per } x \to x_0, \qquad \textit{in particolare} \quad \lim_{x \to x_0} f_1(x) \cdot g_1(x) = l \iff \lim_{x \to x_0} f_2(x) \cdot g_2(x) = l$$

$$\frac{f_1}{g_1} \sim \frac{f_2}{g_2} \quad \textit{per } x \to x_0, \qquad \textit{in particolare} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = l \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = l$$

Quindi in *prodotti* e *rapporti* si possono sostituire fattori o numeratore o denominatore con altre espressioni asintotiche senza cambiare il comportamento asintotico, in particolare senza cambiare il limite se esiste.

ESEMPI.

- $\sin(x) \sim x$ per $x \to 0$ poiché

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

- $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$ poiché

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Quindi per il principio di sostituzione vale

$$\frac{\sin(x) \cdot \sin(x)}{1 - \cos(x)} = \frac{\sin^2(x)}{1 - \cos(x)} \sim \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2.$$

Come già per le successioni, il principio di sostituzione $\boxed{\textbf{\textit{!!! NON !!!}}}$ vale per somme, differenze o potenze, cioè se $f_1 \sim f_2$ e $g_1 \sim g_2$ per $x \to x_0$ allora

- $\not\Rightarrow$ $f_1(x) \pm g_1(x) \sim f_2(x) \pm g_2(x)$ per $x \to x_0$,
- $\not\Rightarrow$ $\big(f_1(x)\big)^{g_1(x)} \sim \big(f_2(x)\big)^{g_2(x)}$ per $x \to x_0$.

Quindi come già detto, in prodotti e in rapporti si possono sostituire espressioni (complicate) con altre espressioni asintotiche (più semplici) senza cambiare l'esistenza e il valore del limite. Come vedremo ciò permette di facilitare il calcolo dei limiti. A questo punto, però, si pone il seguente

<u>Problema</u>. Come si può trovare per una funzione f_1 (possibilmente complicata) una funzione f_2 (semplice) tale che $f_1(x) \sim f_2(x)$ per $x \to x_0$?

Per risolvere questo problema usiamo la seguente

<u>Proposizione</u> 5.17. *$f_1(x) \sim f_2(x)$ per $x \to x_0$ $\iff$ $f_1(x) = f_2(x) + o\big(f_2(x)\big)$ per $x \to x_0$.*

<u>Esempi</u>.

- $\ln(1+x) = x + o(x)$ per $x \to 0$ $\iff$ $\ln(1+x) \sim x$ per $x \to 0$.
- $f(x) = a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$ (con $a_n \neq 0$) $\iff$ $f(x) \sim a_n(x-x_0)^n$ per $x \to x_0$.

L'idea è ora di rappresentare una funzione con la Formula di Taylor con resto di Peano e usare l'equivalenza del secondo esempio.

Più precisamente, dal principio di sostituzione e dalla proposizione precedente segue per $x \to x_0$

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= a_n \cdot (x-x_0)^n + o\big((x-x_0)^n\big) \\ g_1(x) &= b_m \cdot (x-x_0)^m + o\big((x-x_0)^m\big) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f_1(x) \cdot g_1(x) \sim a_n b_m \cdot (x-x_0)^{n+m} \\ \qquad \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \sim \dfrac{a_n}{b_m} \cdot (x-x_0)^{n-m} \end{cases}$$

se $a_n, b_m \neq 0$. Quindi nel caso del rapporto segue

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} &= \lim_{x \to x_0} \frac{a_n}{b_m} \cdot (x-x_0)^{n-m} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } n > m, \\ \frac{a_n}{b_n} & \text{se } n = m, \\ \text{non converge} & \text{se } n < m. \end{cases} \end{aligned}$$

Riassumendo, per studiare il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ con Taylor si procede così:

(1) Si cerca lo sviluppo del *denominatore* del tipo $g(x) = b_m \cdot (x-x_0)^m + o((x-x_0)^m)$ con $b_m \neq 0$, cioè $b_m \cdot (x-x_0)^m$ è il primo polinomio di Taylor di g che non è identicamente $= 0$.

(2) Si sviluppa il *numeratore* f fino allo stesso ordine m. Non è necessario superare oltre all'ordine m per ottenere un polinomio di Taylor del numeratore $\neq 0$ poiché se $f(x) = 0 + o((x-x_0)^m)$ il limite del rapporto è in ogni caso $= 0$.

Consideriamo alcuni

<u>Esempi</u>. • Studiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2 \cdot \sin(x)}.$$

Come dalla regola generale iniziamo sempre con lo studio del denominatore. Qui non è necessario svilupparlo con Taylor, è invece più semplice semplificarlo usando il principio di sostituzione: $\sin(x) \sim x$ per $x \to 0$ e quindi

$$\frac{\sin(x) - x}{x^2 \cdot \sin(x)} \sim \frac{\sin(x) - x}{x^3} \quad \text{per } x \to 0.$$

Ora visto che il denominatore è di 3° ordine dobbiamo quindi sviluppare anche il numeratore fino al 3° ordine:

$$\sin(x) = x - \tfrac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \Rightarrow \quad \sin(x) - x = -\tfrac{x^3}{6} + o(x^3) \sim -\tfrac{x^3}{6} \quad \text{per } x \to 0.$$

Così risulta per il principio di sostituzione

$$\frac{\sin(x) - x}{x^3} \sim \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3} = -\frac{1}{6} \quad \text{per } x \to 0$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2 \cdot \sin(x)} = -\frac{1}{6}.$$

- Studiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - \ln\big((1+x)^2\big)}{\cos\big(\frac{x}{2}\big) - 1}.$$

Iniziamo sempre con il denominatore: Sappiamo che per $t \to 0$

$$\cos(t) = 1 - \tfrac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \overset{(t=\frac{x}{2})}{\Longrightarrow} \quad \cos\big(\tfrac{x}{2}\big) - 1 = -\frac{\big(\frac{x}{2}\big)^2}{2} + o\Big(\big(\tfrac{x}{2}\big)^2\Big) = -\tfrac{x^2}{8} + o(x^2) \sim -\tfrac{x^2}{8} \quad (x = 2t \to 0)$$

Visto che il denominatore è di 2° ordine dobbiamo ora sviluppare anche il numeratore al 2° ordine.

Perciò notiamo prima che $\ln((1+x)^2) = 2 \cdot \ln(1+x)$, quindi

$$\left.\begin{array}{l} \sin(t) = t + o(t^2) \quad (t \to 0) \quad \overset{(t=2x)}{\Longrightarrow} \quad \sin(2x) = 2x + o\big((2x)^2\big) = 2x + o(x^2) \\ 2 \cdot \ln(1+x) = 2 \cdot \big(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\big) = 2x - x^2 + o(x^2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\sin(2x) - \ln\big((1+x)^2\big) = 2x + o(x^2) - \Big(2x - x^2 + o(x^2)\Big) = x^2 + o(x^2) \sim x^2 \quad (x \to 0)$$

Così risulta

$$\frac{\sin(2x) - \ln\big((1+x)^2\big)}{\cos\big(\frac{x}{2}\big) - 1} \sim \frac{x^2}{-\frac{x^2}{8}} = -8 \quad \text{per } x \to 0$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - \ln\big((1+x)^2\big)}{\cos\big(\frac{x}{2}\big) - 1} = -8.$$

Abbiamo già visto in questi esempi semplici che per procedere servono delle regole per il calcolo con gli $o(\cdot)$ come per esempio $o(x^2) - o(x^2) = o(x^2)$ oppure $o(4x^2) = o(x^2)$.

Per calcolare limiti più complicati servono ulteriori

Regole per il Calcolo con gli $o(\cdot)$. Per $x \to x_0$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ vale

- $\alpha \cdot o(f) = o(f)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, per esempio $2\,o(x^n) = o(x^n)$;
- $o(\alpha \cdot f) = o(f)$ per ogni $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, per esempio $o(4\,x^n) = o(x^n)$;
- $o(f) \pm o(f) = o(f)$, per esempio $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$;
- $f \cdot o(g) = o(f \cdot g)$, per esempio $x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$;
- $o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g)$, per esempio $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$;
- $o(o(f)) = o(f)$, per esempio $o(o(x^n)) = o(x^n)$;
- $o((x-x_0)^m) = o((x-x_0)^n)$ se $m \geq n$, per esempio $o(x^4) = o(x^2)$ per $x \to 0$.
- $(x-x_0)^m = o((x-x_0)^n)$ se $m > n$, per esempio $x^5 = o(x^4)$ per $x \to 0$.
- se $f \sim g$ allora $o(f) = o(g)$, p.e. $\sin(x) \sim x$ e quindi $o(\sin(x)) = o(x)$ per $x \to 0$;
- se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$ e $\varphi(t) \to x_0$ per $t \to t_0$ allora $f(\varphi(t)) \sim g(\varphi(t))$ per $t \to t_0$, p.e. $\ln(1+x) \sim x$ $(x \to 0)$ e $\sin(t) \to 0$ $(t \to 0)$ allora $\ln(1+\sin(t)) \sim \sin(t) \sim t$ $(t \to 0)$.

Qui, come sempre, con $o(f)$ si deve immaginare la *qualità* di un resto di tendere più velocemente a 0 di f e *non* una quantità.
In particolare in generale si ha

- $o(f) = o(g) \not\Rightarrow o(g) = o(f)$,
- $f + o(h) = g + o(h) \not\Rightarrow f = g$,
- $o(f) - o(f) \neq 0$.

<u>Esempi</u>. • Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{x}{2}} - \sqrt{1+\sin(x)}}{\ln\big(\cos(x)\big)}.$$

Soluzione. Tutti gli sviluppi si intendono per $x \to 0$. Iniziamo con il denominatore. Visto che si tratta di un'unica espressione è più semplice usare l'ultima regola e il principio di sostituzione anziché svilupparlo con Taylor (che comunque faremo nel prossimo esercizio).

Prima serve un piccolo trucco

$$\ln\big(\cos(x)\big) = \ln\Big(1 + \overbrace{\big(\cos(x)-1\big)}^{=:t\to 0}\Big) \sim t = \cos(x) - 1 \sim -\frac{x^2}{2}.$$

Abbiamo verificato l'ultima equazione (con segno opposto) già a pagina 140. Si potrebbe, però, anche ragionare usando lo sviluppo

$$\cos(x) = 1 - \tfrac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \Rightarrow \quad \cos(x) - 1 = -\tfrac{x^2}{2} + o(x^2) \sim -\tfrac{x^2}{2}.$$

Poiché il denominatore è di 2° ordine, dobbiamo sviluppare anche il numeratore fino al 2° ordine: Ponendo $t = \frac{x}{2}$ otteniamo

$$e^t = 1 + t + \tfrac{t^2}{2} + o(t^2) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} + o\left(\left(\tfrac{x}{2}\right)^2\right) = 1 + \tfrac{x}{2} + \tfrac{x^2}{8} + o(x^2) = e^{\frac{x}{2}}.$$

Inoltre ponendo ora $t := \sin(x)$ segue (per lo sviluppo della radice $\sqrt{1+t}$ cfr. pagina 137)

$$\begin{aligned}\sqrt{1+t} &= 1 + \tfrac{t}{2} - \tfrac{t^2}{8} + o(t^2)\\ &= 1 + \tfrac{\sin(x)}{2} - \tfrac{\sin^2(x)}{8} + o(\overbrace{\sin^2(x)}^{\sim x^2}) = \sqrt{1+\sin(x)}.\end{aligned}$$

Per la penultima regola segue $o(\sin^2(x)) = o(x^2)$ e usando lo sviluppo $\sin(x) = x + o(x^2)$ segue

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\sin(x)} &= 1 + \tfrac{x+o(x^2)}{2} - \frac{\big(x+o(x^2)\big)^2}{8} + o(x^2)\\ &= 1 + \tfrac{x+o(x^2)}{2} - \frac{x^2 + \overbrace{2x\cdot o(x^2)}^{=o(x^3)=o(x^2)} + \overbrace{o(x^2)^2}^{=o(x^4)=o(x^2)}}{8} + o(x^2) = 1 + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{8} + o(x^2).\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{2}} - \sqrt{1+\sin(x)} &= 1 + \tfrac{x}{2} + \tfrac{x^2}{8} + o(x^2) - \Big(1 + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{8} + o(x^2)\Big) \\ &= 2 \cdot \tfrac{x^2}{8} + o(x^2) = \tfrac{x^2}{4} + o(x^2) \sim \tfrac{x^2}{4}. \end{aligned}$$

Qui è importante osservare che soltanto dopo aver sviluppato *tutto* il numeratore si usa l'asintoticità, farlo prima significherebbe usare il principio di sostituzione per una differenza (che è gravemente sbagliato!!).

Quindi per il principio di sostituzione per rapporti risulta

$$\frac{e^{\frac{x}{2}} - \sqrt{1+\sin(x)}}{\ln\big(\cos(x)\big)} \sim \frac{\frac{x^2}{4}}{-\frac{x^2}{2}} = -\frac{1}{2}$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{x}{2}} - \sqrt{1+\sin(x)}}{\ln\big(\cos(x)\big)} = -\frac{1}{2}. \qquad \square$$

- Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)+\ln\big(\cos(x)\big)}{x^4+x^5}.$$

Soluzione. Tutti gli sviluppi si intendono per $x \to 0$. Iniziamo come sempre con il denominatore: Visto che $x^5 = o(x^4)$ risulta

$$x^4 + x^5 = x^4 + o(x^4) \sim x^4.$$

Quindi il numeratore è da sviluppare fino al 4° ordine.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \quad \Rightarrow \quad 1-\cos(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Mentre nell'esempio precedente era sufficiente osservare che $\ln(\cos(x)) \sim -\frac{x^2}{2}$ qui *non* possiamo ragionare così altrimenti si applicherebbe il principio di sostituzione a una differenza. Dobbiamo invece sviluppare $\ln(\cos(x))$ fino al 4° ordine: Allora

$$\ln\big(\cos(x)\big) = \ln\Big(1 + \overbrace{\big(\cos(x)-1\big)}^{=:t\to 0}\Big)$$

con

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

e

$$t = \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Non è necessario sviluppare $\ln(1+t)$ fino a t^4 poiché $t = \cos(x) - 1$ è di ordine 2 e di conseguenza t^2 espresso in x diventa di 4° ordine.

Inoltre, nello sviluppo di $\ln(1+t)$ dobbiamo sostituire t con $\cos(x)-1$ sviluppato fino al 4° ordine mentre nell'espressione $\frac{t^2}{2}$ basta come vedremo lo sviluppo fino al 2° ordine. Non è sbagliato usare anche lì lo sviluppo fino al 4° ordine, soltanto i conti si complicheranno leggermente. La cosa importante è che alla fine *non* ci saranno resti $o(x^k)$ con $k<4$. Quindi

$$\begin{aligned}
\ln\big(\cos(x)\big) &= \big(\cos(x)-1\big) - \frac{\big(\cos(x)-1\big)^2}{2} + \underbrace{o\Big(\overbrace{\big(\cos(x)-1\big)^2}^{\sim\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2=\frac{x^4}{4}}\Big)}_{=o(x^4)} \\
&= \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right) - \frac{\big(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\big)^2}{2} + o(x^4) \\
&= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} - \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 \overbrace{-x^2\cdot o(x^2)+o(x^2)^2}^{=o(x^4)}}{2} + o(x^4) \\
&= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+o(x^4) = -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4).
\end{aligned}$$

Così per il numeratore segue

$$\begin{aligned}
1-\cos(x)+\ln\big(\cos(x)\big) &= \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)+\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)\right) \\
&= -\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{12}+o(x^4) = -\frac{1}{8}x^4+o(x^4) \sim -\frac{1}{8}\cdot x^4.
\end{aligned}$$

Per il rapporto segue con il principio di sostituzione

$$\frac{1-\cos(x)+\ln\big(\cos(x)\big)}{x^4+x^5} \sim \frac{-\frac{1}{8}\cdot x^4}{x^4} = -\frac{1}{8}$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)+\ln\big(\cos(x)\big)}{x^4+x^5} = -\frac{1}{8}. \qquad \square$$

- Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)} - \frac{\sin(x)}{x} - x}{\tan^2(3x)}.$$

Soluzione. Per $x \to 0$ anche $t := 3x \to 0$ e quindi vale

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \sim \frac{t}{1} = t \quad \overset{(t=3x)}{\Longrightarrow} \quad \tan^2(3x) \sim (3x)^2 = 9x^2.$$

Allora dobbiamo sviluppare il numeratore fino al 2° ordine: Da

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \qquad \text{e} \qquad \sin(x) = x + o(x^2)$$

segue con $t := \sin(x) \to 0$ per $x \to 0$

$$\begin{aligned} e^{\sin(x)} &= 1 + \sin(x) + \frac{\sin^2(x)}{2} + o\big(\sin^2(x)\big) \\ &= 1 + x + o(x^2) + \frac{\big(x + o(x^2)\big)^2}{2} + o(x^2) = 1 + x + \frac{x^2 + 2x \cdot o(x^2) + o(x^2)^2}{2} + o(x^2) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

Inoltre

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad \text{quindi} \qquad \begin{aligned} \frac{\sin(x)}{x} &= 1 - \frac{x^3}{6x} + \overbrace{\frac{1}{x} \cdot o(x^3)}^{=o\left(\frac{1}{x}\cdot x^3\right)=o(x^2)} \\ &= 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2). \end{aligned}$$

Notiamo che qui era necessario sviluppare $\sin(x)$ fino al 3° ordine poiché la divisione per x abbassa l'ordine per 1. Così risulta

$$\begin{aligned} e^{\sin(x)} - \frac{\sin(x)}{x} - x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) - x + o(x^2) \\ &= \frac{2}{3} \cdot x^2 + o(x^2) \sim \frac{2}{3} \cdot x^2 \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{e^{\sin(x)} - \frac{\sin(x)}{x} - x}{\tan^2(3x)} \sim \frac{\frac{2}{3} \cdot x^2}{9 \cdot x^2} = \frac{2}{27}$$

che implica

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)} - \frac{\sin(x)}{x} - x}{\tan^2(3x)} = \frac{2}{27}. \qquad \square$$

Concludiamo questi esempi con una

<u>Osservazione</u>. In questo esempi abbiamo calcolato sviluppi di diverse funzioni usando sviluppi noti e le regole per il calcolo con gli $o(\cdot)$ *senza* fare alcuna derivata. Usando la terza osservazione su pagina 133 in questa maniera abbiamo anche calcolato i polinomi di Taylor.

Per esempio

$$\begin{aligned} f(x) &:= \sqrt{1 + \sin(x)} = 1 + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{8} + o(x^2) && \Rightarrow && T_2(x) = 1 + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{8}, \\ f(x) &:= \ln\big(\cos(x)\big) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) && \Rightarrow && T_4(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}, \\ f(x) &:= e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) && \Rightarrow && T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \end{aligned}$$

dove il polinomio di Taylor si riferisce alla corrispondente funzione f e il centro $x_0 = 0$.

Mentre le prime due applicazioni della Formula di Taylor usavano il resto di Peano, la terza fa uso del resto di Lagrange.

Calcolo Numerico.

<u>Problema</u>. Data una funzione (possibilmente complicata) $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x \in (a, b)$, trovare un valore approssimato per $f(x)$.

Per esempio calcolare $\cos(\frac{1}{2})$ con un errore $< 10^{-3}$.

L'idea per risolvere questo problema è di usare la Formula di Taylor con resto di Lagrange: Esiste c tra x e x_0 tale che

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}_{=T_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}}_{=R_n(x)}$$

dove il centro $x_0 \in (a, b)$ e l'ordine n sono ancora da determinare. Se sappiamo che $|f^{(n+1)}(s)| \leq M$ per ogni $s \in (a, b)$ allora possiamo stimare l'errore $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$

$$\big|R_n(x)\big| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right| \cdot |x - x_0|^{n+1} \leq \frac{M}{(n+1)!} \cdot |x - x_0|^{n+1}$$

e così si può valutare la precisione dell'approssimazione.

Rimane la scelta del centro $x_0 \in (a, b)$ che deve rispettare i seguenti principi:

(i) in x_0 si devono conoscere valore e tutte le derivate di f fino al n-esimo ordine, cioè $f^{(k)}(x_0)$ per $k = 0, 1, \ldots, n$, altrimenti non si può calcolare T_n esplicitamente;

(ii) tra tutti i punti in (i) si sceglie quello che sta più vicino a x in maniera che il fattore $|x - x_0|^{n+1} =$ (distanza tra x e $x_0)^{n+1}$ sia più piccolo possibile.

Se, fortunatamente, $|x-x_0| < 1$, allora le potenze $|x-x_0|^{n+1} \to 0$ per $n \to +\infty$ e quindi contribuiscono, insieme al fattoriale $(n+1)!$ nel denominatore, a diminuire l'errore $|R_n(x)|$ fatto.

Consideriamo alcuni esempi concreti:

ESEMPI. • Calcolare $\cos\left(\frac{1}{2}\right)$ con un errore $< 10^{-3}$.

SOLUZIONE. Qui $f = \cos$ e $x = \frac{1}{2}$. Visto che qualsiasi derivata di f è data da $\pm\sin(x)$ oppure $\pm\cos(x)$ vale

$$\left|f^{(k)}(s)\right| \leq 1 =: M \qquad \text{per ogni } k \in \mathbb{N} \text{ ed ogni } s \in \mathbb{R}.$$

Passiamo alla scelta del centro x_0. Il punto più vicino a $x = \frac{1}{2}$ nel quale si conoscono tutte le derivate di $f = \cos$ è $x_0 = 0$. Così otteniamo la stima[3]

$$\left|R_n(x)\right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left|\tfrac{1}{2} - 0\right|^{n+1} = \frac{1}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}} \overset{!}{<} 10^{-3}$$

Questo è una disuguaglianza in n che è equivalente a

$$(n+1)! \cdot 2^{n+1} > 1000.$$

Per trovare il valore $n \in \mathbb{N}$ più piccolo che verifica questa relazione si deve procedere per tentativi:

n	$(n+1)! \cdot 2^{n+1}$
1	$2 \cdot 4 = 8$
2	$6 \cdot 8 = 48$
3	$24 \cdot 16 = 384$
4	$120 \cdot 32 = 3840 > 1000$ ✓

Quindi possiamo scegliere $n = 4$ e così risulta

$$\left|\cos\left(\tfrac{1}{2}\right) - T_4\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{3840} < 10^{-3}.$$

Infine T_4 è dato da

$$T_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \qquad \Rightarrow \qquad T_4\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24} = \frac{337}{384}.$$

Riassumendo abbiamo verificato che

$$\left|\cos\left(\tfrac{1}{2}\right) - \frac{337}{384}\right| \leq \frac{1}{3840} < 10^{-3},$$

cioè la soluzione è $\frac{337}{384} = 0,8776041\overline{6}$. □

[3] qui il simbolo $\overset{!}{<}$ significa che "deve essere $<$".

- Usare uno sviluppo di secondo ordine per calcolare un valore approssimativo di $\sqrt[2]{30}$ valutando anche l'errore fatto.

Soluzione. $\sqrt[2]{30} = f(30)$ per $f(x) := \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Visto che le derivate di $f(x)$ contengono ancora l'espressione $x^{\frac{1}{2}}$ scegliamo come centro x_0 il numero quadrato più vicino a $x = 30$ cioè $x_0 := 25 = 5^2$. Per la Formula di Taylor con il resto di Lagrange esiste quindi un $c \in [x_0, x] = [25, 30]$ tale che

$$f(x) = \sqrt{x} = \underbrace{f(25) + f'(25) \cdot (x-25) + \frac{f''(25)}{2!} \cdot (x-25)^2}_{T_2(x)} + \underbrace{\frac{f'''(c)}{3!} \cdot (x-25)^3}_{R_2(x)},$$

dove

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{\frac{1}{2}} & &\Rightarrow & f(25) &= 5, \\
f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} & &\Rightarrow & f'(25) &= \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{10}, \\
f''(x) &= -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}} & &\Rightarrow & \frac{f''(25)}{2!} &= -\frac{1}{4 \cdot 5^3 \cdot 2} = -\frac{1}{1000}, \\
f'''(x) &= \frac{3}{8} \cdot x^{-\frac{5}{2}} & &\Rightarrow & \frac{f'''(c)}{3!} &= \frac{3}{8 \cdot 6} \cdot c^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{16} \cdot c^{-\frac{5}{2}}.
\end{aligned}$$

Quindi sostituendo $x = 30$ risulta

$$\begin{aligned}
\sqrt{30} &= 5 + \frac{1}{10} \cdot 5 - \frac{1}{1000} \cdot 5^2 + \frac{c^{-\frac{5}{2}}}{16} \cdot 5^3 \\
&= \underbrace{\frac{219}{40}}_{=\text{valore approssimativo}} + \underbrace{\frac{c^{-\frac{5}{2}}}{16} \cdot 5^3}_{=\text{errore } R_2(30) \text{ compiuto}}
\end{aligned}$$

per un $c \in [25, 30]$. Per stimare l'errore osserviamo che la funzione $c^{-\frac{5}{2}}$ è decrescente in c e quindi segue

$$R_2(30) = \frac{c^{-\frac{5}{2}}}{16} \cdot 5^3 \leq \frac{25^{-\frac{5}{2}}}{16} \cdot 5^3 = \frac{1}{400}.$$

Riassumendo, lo sviluppo di secondo ordine dà come approssimazione di $\sqrt{30}$ il valore $\frac{219}{40} = 5{,}475$ che lascia un errore $\leq \frac{1}{400} = 0{,}0025$. □

<u>Esercizio</u>. Calcolare $\sqrt{e}$ con un errore $< \frac{1}{1000}$. (Suggerimento: $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$.)

<u>Osservazione</u>. In entrambi gli esempi la funzione f ammetteva derivate di qualsiasi ordine. Ci si può chiedere che cosa succede con l'approssimazione $T_n(x)$ di $f(x)$ se $n \to +\infty$. Per studiare questo problema definiamo dapprima per un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathrm{C}^\infty(I) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{C}^n(I).$$

Quindi $f \in \mathrm{C}^\infty(I)$ significa che $f : I \to \mathbb{R}$ "è derivabile infinite volte", cioè ammette derivate $f^{(n)}$ di qualsiasi ordine $n \in \mathbb{N}$.

Serie di Taylor

Se per $f \in \mathrm{C}^\infty(a,b)$ esiste $M \geq 0$ tale che

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \leq M^k \quad \text{per ogni } x \in (a,b) \text{ ed ogni } k \in \mathbb{N}$$

allora possiamo stimare il resto $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ come

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right| \cdot |x-x_0|^{n+1} \leq \underbrace{\frac{M^{n+1}}{(n+1)!} \cdot |x-x_0|^{n+1}}_{=:r_n} \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Per verificare che $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$ si usa un trucco: Calcoliamo

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{M^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \frac{|x-x_0|^{n+2}}{|x-x_0|^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)!}{M^{n+1}} = \frac{M \cdot |x-x_0|}{n+2} \to 0 =: q < 1.$$

Ciò implica che per il criterio del rapporto la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} r_n$ converge e quindi per il criterio necessario per la convergenza di una serie otteniamo $0 \leq |R_n(x)| \leq r_n \to 0$ per $n \to +\infty$.
Di conseguenza $R_n(x) \to 0$ per $n \to +\infty$ e quindi

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \big(T_n(x) + \overbrace{R_n(x)}^{\to 0}\big) = \lim_{n\to+\infty} T_n(x) \qquad \text{per ogni } x \in (a,b).$$

Quindi abbiamo dimostrato il seguente risultato.

<u>PROPOSIZIONE</u> 5.18. *Sia $f \in C^\infty(a,b)$ e $x_0 \in (a,b)$. Se esiste $M \geq 0$ tale che $\left|f^{(k)}(x)\right| \leq M^k$ per ogni $x \in (a,b)$ e ogni $k \in \mathbb{N}$, allora*

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k}_{=T_n(x)\ \textit{Polinomio di Taylor}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k}_{=:\ \text{Serie di Taylor}}$$

Quindi, se f è C^∞ e le derivate $f^{(k)}$ non crescono troppo rapidamente con l'ordine k, $f(x)$ si può rappresentare come *Serie di Taylor*

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k \quad \text{per ogni } x \in (a,b)}$$

<u>ESEMPI</u>.

- $\sin \in C^\infty(\mathbb{R})$ con $|\sin^{(k)}(x)| \leq 1 =: M = M^k$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e ogni $k \in \mathbb{N}$ e quindi dallo sviluppo a pagina 135 segue (con $x_0 = 0$)

$$\boxed{\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}}$$

Similmente seguono i seguenti sviluppi di altre funzioni elementari

- $\boxed{\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}}$
- $\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}}$
- $\boxed{\sinh(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}}$
- $\boxed{\cosh(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}}$

- $\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k} \quad \text{per ogni } x \in (-1,1)}$
- $\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot x^k \quad \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } x \in (-1,1)}$
- $\boxed{\arctan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{per ogni } x \in (-1,1)}$
- $\boxed{\operatorname{artanh}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{per ogni } x \in (-1,1)}$

Concludiamo questo capitolo sul calcolo differenziale con lo

Studio di Funzione

<u>Problema</u>. Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tracciare un grafico approssimativo di f.

Per risolvere questo problema conviene procedere cercando di seguire lo schema seguente più possibile. Si tenga presente che spesso non è possibile eseguire tutti i punti sottoelencati. In questi casi le informazioni mancanti (p.e. esistenza di zeri, estremi locali ecc.) si possono eventualmente dedurre alla fine dello studio come conseguenza delle altre informazioni.

(i) *Determinazione del dominio X:* Sono da individuare tutti i punti $x \in \mathbb{R}$ per i quali l'espressione $f(x)$ sia ben definita. Per esempio

- argomenti sotto radici di ordine pari devono essere ≥ 0,
- argomenti di logaritmi devono essere > 0,
- la base di un'esponenziale deve essere > 0,
- denominatori devono essere $\neq 0$, ecc.

In generale, per calcolare il dominio X di una funzione si deve risolvere un sistema di disequazioni.

<u>Esempio</u>. Sia $f(x) := \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{2-\ln(x^2-2)}}$. Allora il numeratore è definito per ogni $x \in \mathbb{R}$ mentre per il denominatore si deve verificare

$$\begin{aligned} x^2 - 2 > 0 \quad \text{e} \quad 2 - \ln(x^2-2) > 0 \quad &\iff \quad x^2 > 2 \quad \text{e} \quad 2 > \ln(x^2-2) \\ &\iff \quad |x| > \sqrt{2} \quad \text{e} \quad e^2 > x^2 - 2 \\ &\iff \quad |x| > \sqrt{2} \quad \text{e} \quad |x| < \sqrt{e^2+2} \\ &\iff \quad x \in \big(-\sqrt{e^2+2}, -\sqrt{2}\big) \cup \big(\sqrt{2}, \sqrt{e^2+2}\big). \end{aligned}$$

(ii) *Simmetrie (pari, dispari) e periodicità:* cfr. pagine 62 e 63.

(iii) *Intersezioni con gli assi:* Con l'asse-x: risolvere l'equazione $f(x) = 0$. Con l'asse y: se $0 \in X$ calcolare $f(0)$.

(iv) *Segno della funzione:* Risolvere l'equazione $f(x) > 0$ (o $f(x) < 0$).

(v) *Calcolo dei limiti (da destra/sinistra) alla frontiera di X:* Si calcolano i limiti (da destra/sinistra) di $f(x)$ negli estremi finiti, se esistono, del dominio X e si deducono gli eventuali *asintoti verticali*, cfr. pagina 77. Se X è illimitato, si calcolano inoltre i limiti $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) =: l$, determinando se vi sono *asintoti orizzontali* $y = l$ (se $l \in \mathbb{R}$), cfr. pagina 77. Se invece $l = \pm\infty$ si procede con la

(vi) *Individuazione degli asintoti obliqui:* Se esistono $m \neq 0$ e $q \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - [m\cdot x + q]\big) = 0 \qquad \text{e/o} \qquad \lim_{x\to-\infty}\big(f(x) - [m\cdot x + q]\big) = 0$$

allora si dice che la retta $y = mx + q$ è *asintoto obliquo* per f a $+\infty$ e/o $-\infty$. Graficamente ciò significa che la distanza tra il grafico di f e la retta $y = mx + q$ tende a 0 per $x \to \pm\infty$. Per verificare l'esistenza di un asintoto obliquo si procede come segue:

Si verifica prima se esiste finito il limite

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} =: m \neq 0 \qquad = \text{pendenza dell'asintoto.}$$

Nel caso affermativo si verifica se esiste finito il limite

$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - mx\big) =: q \qquad = \text{ordinata all'origine dell'asintoto.}$$

Se entrambi i limiti convergono (in $\mathbb{R}$) con $m \neq 0$, allora $y = mx + q$ è asintoto obliquo di f per $x \to \pm\infty$.

<u>Esempio</u>. Sia $f(x) := \ln\big(e^{3x+2} + 5\big)$. Allora

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln(5), \qquad \text{mentre} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Quindi $y = \ln(5)$ è un asintoto orizzontale di f per $x \to -\infty$. Inoltre, può esistere un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Perciò studiamo

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(e^{3x+2}+5\right)}{x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3\cdot e^{3x+2}}{e^{3x+2}+5}}{1} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{9\cdot e^{3x+2}}{3\cdot e^{3x+2}} = 3$$

e inoltre (usando la continuità del logaritmo)

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln\left(e^{3x+2}+5\right) - 3x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln\left(e^{3x+2}+5\right) - \ln\left(e^{3x}\right)\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^{3x+2}+5}{e^{3x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(e^2 + \frac{5}{e^{3x}}\right) = \ln\left(e^2\right) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Pertanto la retta di equazione

$$y = 3x + 2$$

è asintoto obliquo per $x \to +\infty$ della funzione data, cfr. Figura 45.

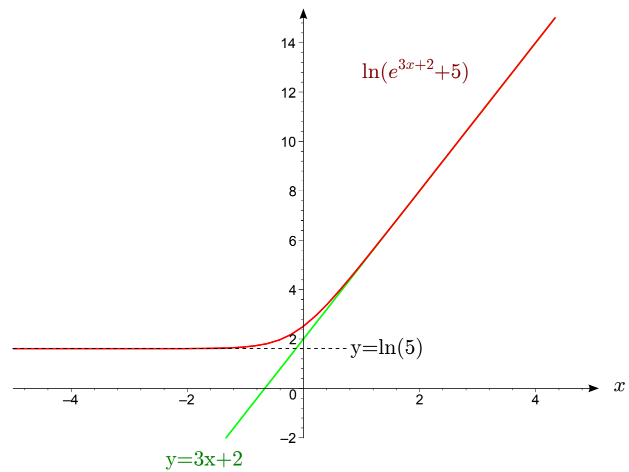


FIGURA 45. Asintoto obliquo.

(vii) *Studio della derivata prima (crescenza/decrescenza, punti critici ed estremi locali):* Si calcola la derivata prima $f'(x)$ e il corrispondente dominio. Risolvendo l'equazione $f'(x) = 0$ si calcolano i punti critici x_0 di f. Eventualmente, studiando il cambiamento del segno di $f'(x)$ in $x = x_0$ (o studiando le derivate successive in x_0, cfr. punto successivo) si può classificare la natura del punto critico (minimo o massimo locale, cfr. pagine 121 o 138). Infine si studia il segno di $f'(x)$ per ottenere informazioni sulla monotonia di f.

(viii) *Studio della derivata seconda (estremi locali, concavità/convessità, punti di flesso):* Si calcola (se non si ottiene un espressione troppo complessa) la derivata seconda. Se i punti critici non sono già stati classificati nel punto (vii) si calcolano i valori di f'' nei punti critici per poi applicare il criterio per estremi locali, cfr. pagina 138.

<u>Definizione</u>. Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in $(a, b) \subset X$. Se $f'(x)$ in (a, b) è

- crescente, allora si dice che f è *convessa* (oppure *concava verso l'alto*) in (a, b),
- decrescente, allora si dice che f è *concava* (oppure *concava verso il basso*) in (a, b).

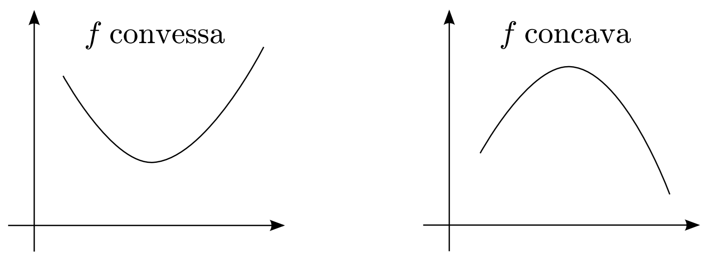


Figura 46. Funzioni convesse e concave.

Dal test di monotonia (cfr. pagina 119) segue che se $f \in \mathrm{C}^2(a, b)$, allora

$$\begin{aligned} f \text{ è convessa in } (a,b) &\iff f' \text{ è crescente in } (a,b) \iff f''(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in (a,b), \\ f \text{ è concava in } (a,b) &\iff f' \text{ è decrescente in } (a,b) \iff f''(x) \leq 0 \text{ per ogni } x \in (a,b). \end{aligned}$$

Diremo che $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ammette retta tangente in $x_0 \in (a,b)$ se il rapporto incrementale di f in x_0 ammette limite (finito o infinito), cioè se esiste

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

<u>Definizione</u>. Un punto $x_0 \in (a,b)$ si chiama *(punto di) flesso* di $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ in , se f è continua in (a,b), derivabile in $(a,b) \setminus \{x_0\}$ e se

- f ammette retta tangente in x_0, e
- la concavità di f è opposta dalle due parti di x_0.

Si nota che per $f \in \mathrm{C}^2(a,b)$ in un punto di flesso $x_0 \in (a,b)$ vale necessariamente $f''(x_0) = 0$ per il teorema degli zeri.

<u>Esempi</u>. (Cfr. Figura 47)

- Sia $f(x) = x^3$. Allora $f'(x) = 3x^2$ e $f''(x) = 6x$. Visto che $f''(x) < 0$ per $x < 0$ e $f''(x) > 0$ per $x > 0$, l'origine è un punto di flesso di f.
- Sia $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Allora f ammette una retta tangente verticale in $x_0 = 0$. Inoltre $f'(x) = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3}$ e $f''(x) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{x^{-\frac{2}{3}-1}}{3} = -\frac{2 \cdot x^{-\frac{5}{3}}}{9}$ per $x \neq 0$. Quindi $f''(x) > 0$ per $x < 0$ e $f''(x) < 0$ per $x > 0$ e allora l'origine è un punto di flesso di f.
- Sia $f(x) = |x| + x^3$. Allora il rapporto incrementale di f in $x_0 = 0$ è dato da

$$\lim_{h \to 0^\pm} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^\pm} \frac{|h| + h^3}{h} = \lim_{h \to 0^\pm} \left(\frac{|h|}{h} + h^2 \right) = \pm 1.$$

Quindi f non ammette tangente in $x_0 = 0$ e quindi $(0,0)$ *non* è un punto di flesso di f, nonostante che f cambia concavità in quel punto.

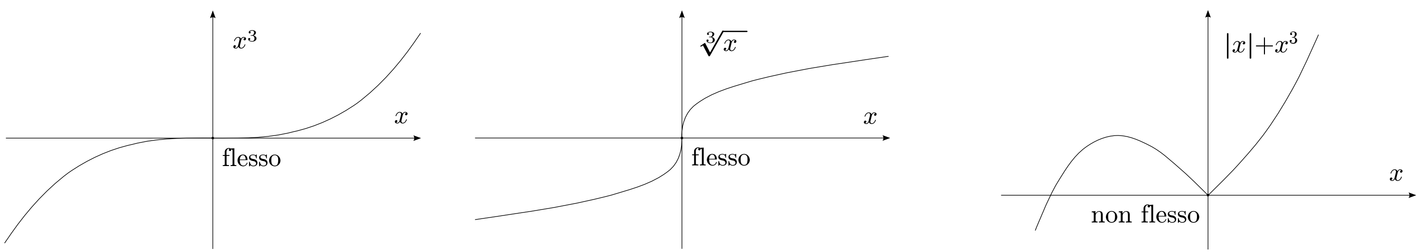


Figura 47. Punti di flesso e no.

Seguendo questo schema è utile tracciare il grafico gradualmente, inserendo le informazioni via via raccolte anziché raccogliere tutto e poi fare il grafico: i processi graduali aiutano a controllare la coerenza del procedimento e a capire quali informazioni è ancora utile raccogliere.

Consideriamo ora un esempio completo.

<u>Esempio</u>. Studiare la funzione $f(x) = e^{\frac{1}{x-3}} \cdot |x+3|$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Soluzione: (i) *Dominio:* $f(x)$ è definito per ogni $x \neq 3$ e quindi $X = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

(ii) *Simmetrie:* il grafico di f non rappresenta simmetrie.

(iii) *Intersezione con gli assi:* Visto che la funzione esponenziale è sempre > 0, $f(x) = 0 \iff |x+3| = 0 \iff x+3 = 0 \iff x = -3$. Inoltre vale $0 \in X$ e $f(0) = e^{\frac{1}{-3}} \cdot |3| = \frac{3}{\sqrt[3]{e}}$.

(iv) *Segno di $f(x)$:* Visto che il modulo è sempre ≥ 0, $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in X$.

(v) *Limiti alla frontiera del dominio:* I punti di frontiera di X sono: $-\infty$, 3, $+\infty$. Studiamo perciò i limiti (da destra/sinistra dove indicato) in quei punti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\overbrace{\frac{1}{x-3}}^{\to 0}} \cdot \overbrace{|x+3|}^{\to+\infty} = e^0 \cdot (+\infty) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} e^{\overbrace{\frac{1}{x-3}}^{\to \frac{1}{0^-} = -\infty}} \cdot \overbrace{|x+3|}^{\to 6} = e^{-\infty} \cdot 6 = 0,$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} e^{\overbrace{\frac{1}{x-3}}^{\to \frac{1}{0^+} = +\infty}} \cdot \overbrace{|x+3|}^{\to 6} = e^{+\infty} \cdot 6 = +\infty.$$

Quindi la retta $x = 3$ rappresenta un asintoto verticale per $x \to 3^+$. Visto che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, possono esistere

(vi) *Asintoti obliqui per $x \to \pm\infty$:* Visto che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ calcoliamo

$$m_\pm := \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\overbrace{e^{\frac{1}{x-3}}}^{\to 1} \cdot |x+3|}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x+3|}{x} = \pm 1,$$

e

$$\begin{aligned} q_\pm &:= \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - m_\pm x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \big(e^{\frac{1}{x-3}} \cdot |x+3| \mp x\big) \\ &= \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \big(e^{\frac{1}{x-3}} \cdot (x+3) - x\big) = \lim_{x\to+\infty} \Big(\big(e^{\frac{1}{x-3}} - 1\big) \cdot x + \overbrace{e^{\frac{1}{x-3}} \cdot 3}^{\to e^0 \cdot 3 = 3}\Big) & \text{nel caso “+”,} \\ \lim_{x\to-\infty} \big(e^{\frac{1}{x-3}} \cdot (-x-3) + x\big) = \lim_{x\to-\infty} \Big(\big(1 - e^{\frac{1}{x-3}}\big) \cdot x - \underbrace{e^{\frac{1}{x-3}} \cdot 3}_{\to e^0 \cdot 3 = 3}\Big) & \text{nel caso “−”.} \end{cases} \end{aligned}$$

Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} \Big(\big(e^{\frac{1}{x-3}} - 1\big) \cdot x\Big) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-3}} - 1}{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{x}{x-3} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-3} = 1 \cdot 1 = 1,$$

ove abbiamo usato che $t := \frac{1}{x-3} \to 0$ per $x \to \pm\infty$. Così risulta

$$q_\pm = \pm 1 \pm 3 = \pm 4$$

e quindi $y = x + 4$ e $y = -x - 4$ sono asintoti obliqui per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$, rispettivamente.

(vii) *Studio di $f'(x)$:* Visto che $|x+3|$ è derivabile per ogni $x \neq -3$, la funzione è derivabile per ogni $x \in X$ con $x \neq -3$. Inoltre per il rapporto incrementale nel punto $x_0 = -3$ vale

$$
\begin{aligned}
f'_{\pm}(-3) &= \lim_{x \to -3^{\pm}} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = \lim_{x \to -3^{\pm}} \frac{e^{\frac{1}{x-3}} \cdot |x+3| - 0}{x+3} \lim_{x \to -3^{\pm}} e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{|x+3|}{x+3} \\
&= e^{-\frac{1}{6}} \cdot (\pm 1) = \pm e^{-\frac{1}{6}}.
\end{aligned}
$$

Quindi $f'_{-}(-3) \neq f'_{+}(-3)$ e di conseguenza f non è derivabile in $x_0 = -3$.

Calcoliamo ora $f'(x)$ per $x \neq \pm 3$: per $x > -3$, $x \neq 3$ vale

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(e^{\frac{1}{x-3}} \cdot |x+3|\right)' = \left(e^{\frac{1}{x-3}} \cdot (x+3)\right)' = e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{-1}{(x-3)^2} \cdot (x+3) + e^{\frac{1}{x-3}} \cdot 1 \\
&= e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{(x-3)^2 - (x+3)}{(x-3)^2} = e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{x^2 - 7x + 6}{(x-3)^2}.
\end{aligned}
$$

Similmente segue per $x < -3$

$$
f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x-3}} \cdot |x+3|\right)' = \left(e^{\frac{1}{x-3}} \cdot (-x-3)\right)' = -e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{x^2 - 7x + 6}{(x-3)^2}
$$

e quindi

$$
f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{x^2-7x+6}{(x-3)^2} & \text{se } x > -3,\ x \neq 3, \\ -e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{x^2-7x+6}{(x-3)^2} & \text{se } x < -3. \end{cases}
$$

Calcoliamo ora i punti critici di f: Visto che la funzione esponenziale non ammette zeri, segue che

$$
\begin{aligned}
f'(x) = 0 \quad &\iff \quad x^2 - 7x + 6 = 0 \quad \iff \quad x = x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} \\
&\iff \quad x = x_1 = 6 \text{ opp. } x = x_2 = 1.
\end{aligned}
$$

Studiamo ora la monotonia di f attraverso il segno di $f'(x)$: Visto che

$$\frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^2} > 0 \quad \forall\, x \neq 3 \qquad \text{e}$$
$$x^2 - 7x + 6 = (x-6)\cdot(x-1)$$

segue che

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^2}\cdot(x-6)\cdot(x-1) < 0 & \text{per } x < -3, \\ \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^2}\cdot(x-6)\cdot(x-1) > 0 & \text{per } -3 < x < 1, \\ \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^2}\cdot(x-6)\cdot(x-1) < 0 & \text{per } 1 < x < 6,\ x \neq 3, \\ \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^2}\cdot(x-6)\cdot(x-1) > 0 & \text{per } 6 < x. \end{cases}$$

Di conseguenza

$$f \text{ è strettamente crescente in } (-3,1)\cup(6,+\infty),$$
$$f \text{ è strettamente decrescente in } (-\infty,-3)\cup(1,6)\setminus\{3\}.$$

(viii) *Studio di $f''(x)$:* f' è derivabile per $x \neq \pm 3$. Inoltre per $x > -3$, $x \neq 3$ vale

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(e^{\frac{1}{x-3}}\cdot\frac{x^2-7x+6}{(x-3)^2}\right)' \\ &= e^{\frac{1}{x-3}}\cdot\frac{-1}{(x-3)^2}\cdot\frac{(x^2-7x+6)}{(x-3)^2} + e^{\frac{1}{x-3}}\cdot\frac{(x-3)^2\cdot(2x-7)-2(x-3)\cdot(x^2-7x+6)}{\left((x-3)^2\right)^2} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^4}\cdot\Big((x-3)^2\cdot(2x-7)-2(x-3)\cdot(x^2-7x+6)-(x^2-7x+6)\Big) \\ &= \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^4}\cdot\big(13x-33\big). \end{aligned}$$

Similmente per $x < -3$ si ottiene

$$f''(x) = \left(-e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{x^2 - 7x + 6}{(x-3)^2}\right)' = -\frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^4} \cdot (13x - 33).$$

Quindi risulta

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^4} \cdot (13x - 33) & \text{se } x > -3,\ x \neq 3, \\ -\frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^4} \cdot (13x - 33) & \text{se } x < -3. \end{cases}$$

Classifichiamo i due punti critici $x_1 = 6$ e $x_2 = 1$ trovati nel punto precedente: Visto che $\frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^4} > 0$ per ogni $x \in X$ segue che

$$\begin{aligned} \text{segno}\big(f''(6)\big) &= \text{segno}\big(13 \cdot 6 - 33\big) > 0 &\Rightarrow&\quad x_1 = 6 \text{ è un punto di minimo locale,} \\ \text{segno}\big(f''(1)\big) &= \text{segno}\big(13 \cdot 1 - 33\big) < 0 &\Rightarrow&\quad x_2 = 1 \text{ è un punto di massimo locale} \end{aligned}$$

con $f(6) = 9 \cdot e^{\frac{1}{3}} = 9 \cdot \sqrt[3]{e}$ e $f(1) = 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{e}}$. Per trovare eventuali flessi risolviamo l'equazione

$$f''(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 13x - 33 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_0 := x = \frac{33}{13}.$$

Inoltre per $x \neq \pm 3$ vale

$$f''(x) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x < -3 \text{ oppure } x \geq \tfrac{33}{13}, \qquad \text{cioè } f \text{ è convessa in } (-\infty, -3),\ \left(\tfrac{33}{13}, 3\right) \text{ e } (3, +\infty)$$

$$f''(x) \leq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -3 < x \leq \tfrac{33}{13}, \qquad \text{cioè } f \text{ è concava in } \left(-3, \tfrac{33}{13}\right)$$

e quindi risulta che $x_0 = \frac{33}{13}$ è un punto di flesso.

Da tutte le informazioni ottenute risulta che f ha il seguente grafico.

□

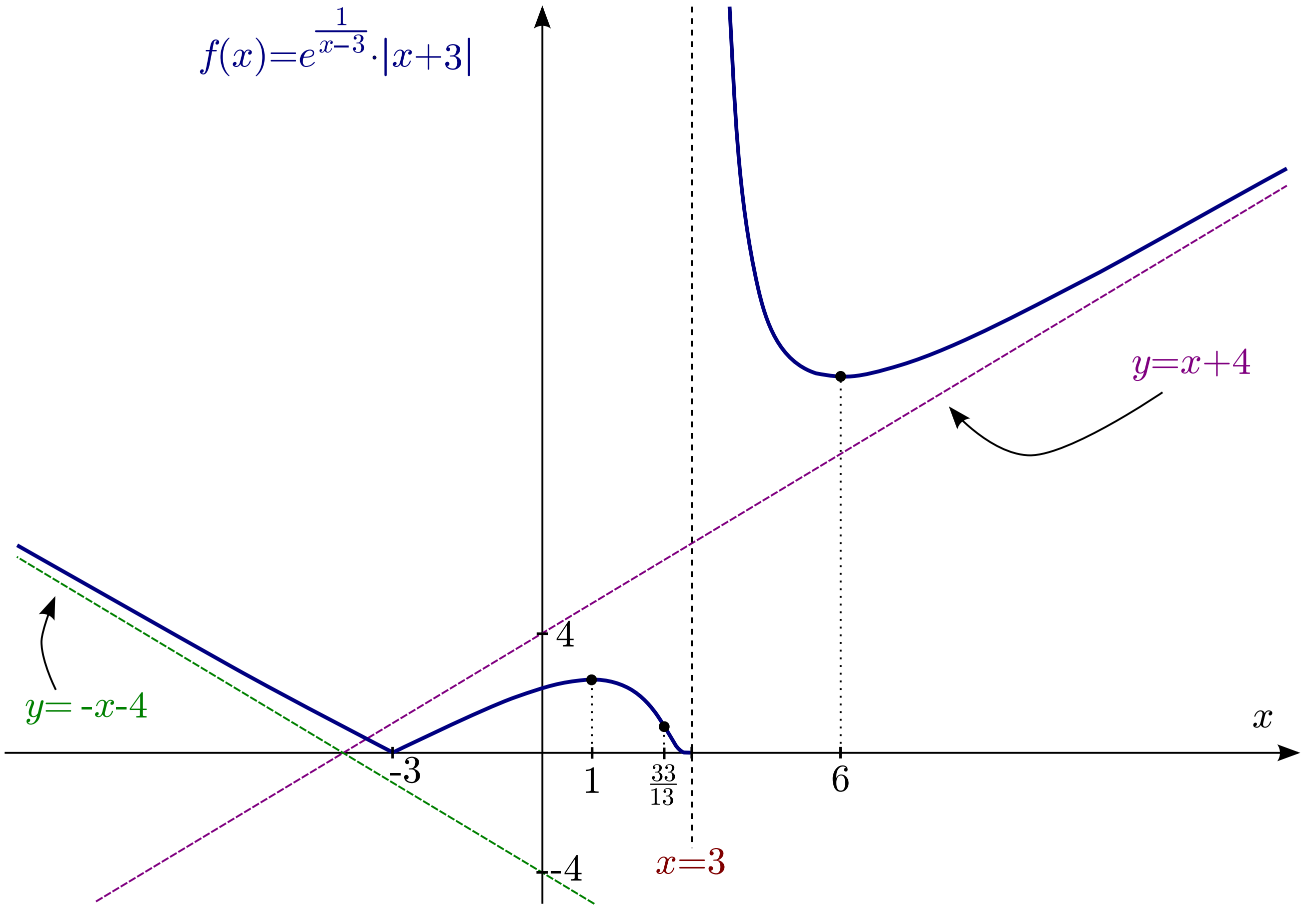


Figura 48. Grafico di $f(x) = e^{\frac{1}{x-3}} \cdot |x + 3|$.

CAPITOLO 6

Calcolo Integrale di Funzioni di una Variabile

Integrale: Definizione e prime Proprietà

<u>Problema</u>. Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata, calcolare l'area A tra il grafico di f e l'asse x, cfr. Figura 49.

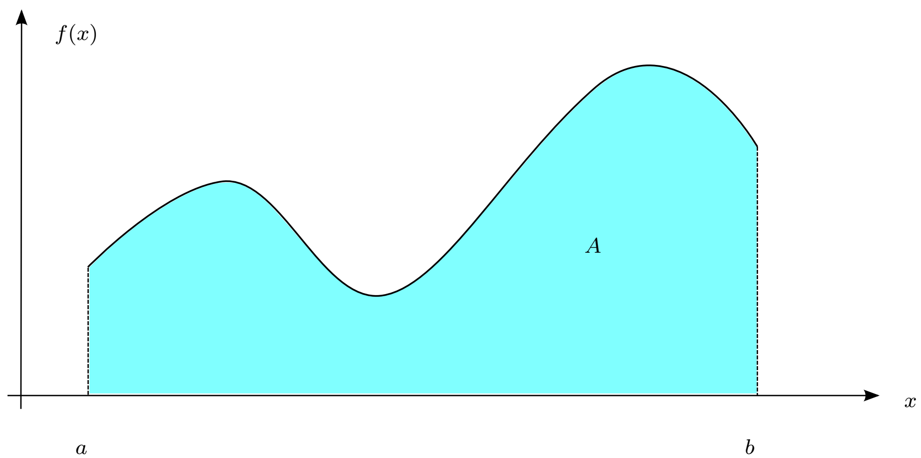


Figura 49. L'area A.

L'idea per risolvere questo problema è di approssimare l'area A da sotto e da sopra, cioè per eccesso e per difetto.

Se poniamo $m := \inf f$ e $M := \sup f$, allora sicuramente vale

$$m \cdot (b-a) \leq A \leq M \cdot (b-a),$$

che però dà una approssimazione troppo scarsa. Per migliorarla dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in tanti sottointervalli e procediamo in ogni sottointervallo come prima. Per precisare questa idea ci serve una

Definizione 6.1.

- Un insieme $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ si chiama *partizione di* $[a,b]$ se
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$
- Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è limitata e P è una partizione di $[a,b]$, allora definiamo per $i = 1, 2, 3, \ldots, n$
$$\begin{aligned} m_i &:= \inf\big\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\big\}, \\ M_i &:= \sup\big\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\big\}, \\ \Delta x_i &:= x_i - x_{i-1} (= \text{ lunghezza dell'intervallo } [x_{i-1}, x_i]) \\ s(f,P) &:= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i =: \text{ \textit{somma inferiore} (cfr. Figura 50)} \\ S(f,P) &:= \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i =: \text{ \textit{somma superiore} (cfr. Figura 50)} \end{aligned}$$

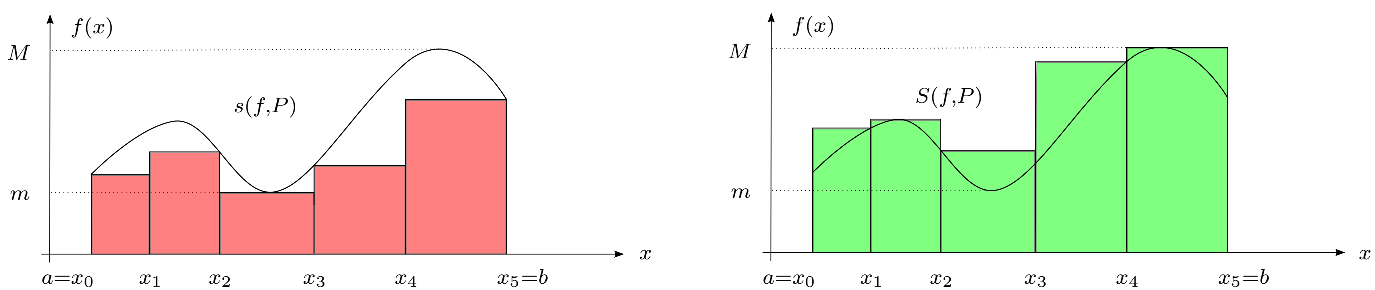


Figura 50. Somma inferiore $s(f,P)$ e somma superiore $S(f,P)$.

Quindi per ogni partizione P di $[a, b]$ vale

$$s(f, P) \leq A \leq S(f, P),$$

cioè le somme inferiori sono sempre approssimazioni di A per difetto mentre le somme superiori danno sempre approssimazioni per eccesso. Perciò

- più *grande* è $s(f, P)$ meglio è l'approssimazione (per difetto),
- più *piccolo* è $S(f, P)$ meglio è l'approssimazione (per eccesso).

Se non c'è differenza tra "la migliore" approssimazione da sotto (cioè quella più grande per difetto) e quella "migliore" da sopra (cioè quella più piccola per eccesso), allora il problema è (teoricamente) risolto e f si dice *integrabile*.

Per precisare questo procedimento facciamo la seguente

Definizione 6.2. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata. Se

$$\sup\big\{s(f, P) : P \text{ partizione di } [a, b]\big\} = \inf\big\{S(f, P) : P \text{ partizione di } [a, b]\big\} =: I,$$

allora f si dice *integrabile* (secondo Riemann[1]). In questo caso $A = I$ e

$$I =: \int_a^b f(x)\, dx$$

si dice *integrale* di f (= funzione integranda) in $[a, b]$ (= dominio dell'integrazione).

OSSERVAZIONI.

- Come variabile di integrazione non è necessario scegliere x si può anche scrivere

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(s)\, ds = \int_a^b f(t)\, dt = \ldots$$

- L'area sotto l'asse x è *negativa*, per esempio se $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := -1$ per ogni $x \in [0, 1]$ allora $\int_0^1 f(x)\, dx = -1$.

[1] Ci sono altri modi per affrontare questo problema che portano a definizioni diverse, per esempio quella di Lebesgue.

- f è integrabile $\iff$ per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $P = P_\varepsilon$ tale che

$$S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

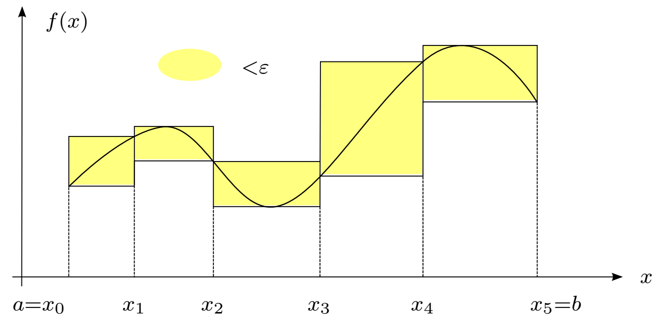


Figura 51. Criterio per l'integrabilità.

- L'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ rappresenta una somma continua di aree infinitesime, cfr. Figura 52. Questa interpretazione spiega l'uso della notazione

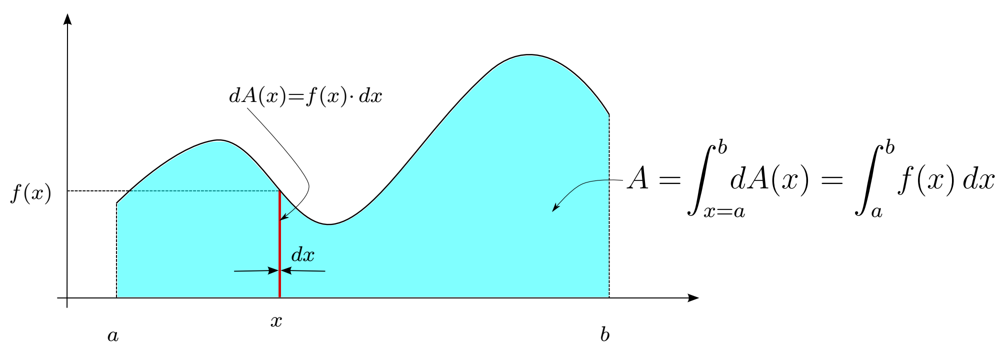


Figura 52. Integrale come somma continua.

$\int_a^b f(x)\,dx$ inventata da Leibniz più di 300 anni fa.

Consideriamo alcuni

<u>Esempi</u>. • Se f è costante, cioè $f(x) = c$ per ogni $x \in [a, b]$ allora $s(f, P) = S(f, P) = c \cdot (b - a)$ per $P = \{a, b\}$ e quindi f è integrabile con $\int_a^b f(x)\,dx = c \cdot (b - a)$.

- La funzione di Dirichlet (cfr. pagina 86)

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

non è integrabile. Infatti visto che per ogni partizione P ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ contiene sia punti razionali (in cui f ammette il valore 1) sia punti irrazionali (in cui f ammette il valore 0) segue $m_i = 0$ e $M_i = 1$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$. Così risulta per ogni partizione

$$s(f, P) = 0 \neq b - a = S(f, P)$$

che implica che f non è integrabile.

Continuiamo studiando alcune

Proprietà dell'Integrale. Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabili. Allora

- $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ è integrabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (cioè l'insieme delle funzioni integrabili con dominio $[a, b]$ è uno *spazio vettoriale*) e

$$\boxed{\int_a^b \big(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)\big)\,dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)\,dx}$$

(cioè l'integrale è un'operazione *lineare*);

- se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ allora

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx}$$

(cioè l'integrale è *monotona*);

- anche $|f|$ è integrabile e

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b \big|f(x)\big|\,dx}$$

(*disuguaglianza triangolare*);

- per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ si ha

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx}$$

(*additività* dell'integrale rispetto agli estremi di integrazione) ove definiamo

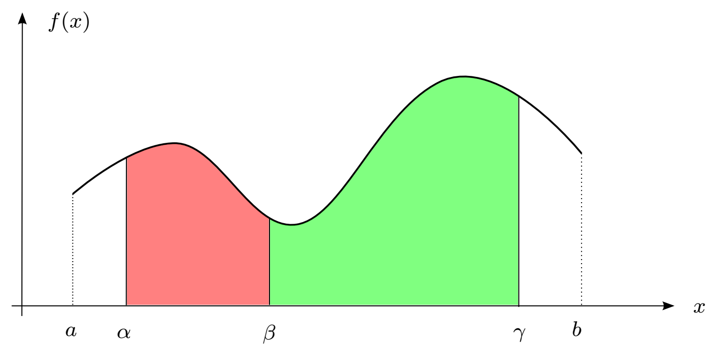


FIGURA 53. Additività rispetto agli estremi di integrazione.

$$\int_\alpha^\alpha f(x)\,dx := 0 \qquad \text{e} \qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx := -\int_\beta^\alpha f(x)\,dx \quad \text{se } \alpha > \beta;$$

per esempio $\int_1^0 f(x)\,dx := -\int_0^1 f(x)\,dx$.

Se la funzione integranda e il dominio di integrazione hanno qualche simmetria, allora l'integrale si semplifica nella seguente maniera.

<u>Proposizione</u> 6.3. *Sia* $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ *integrabile. Allora*

- $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ *se* f *è dispari,*
- $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)\,dx$ *se* f *è pari,*

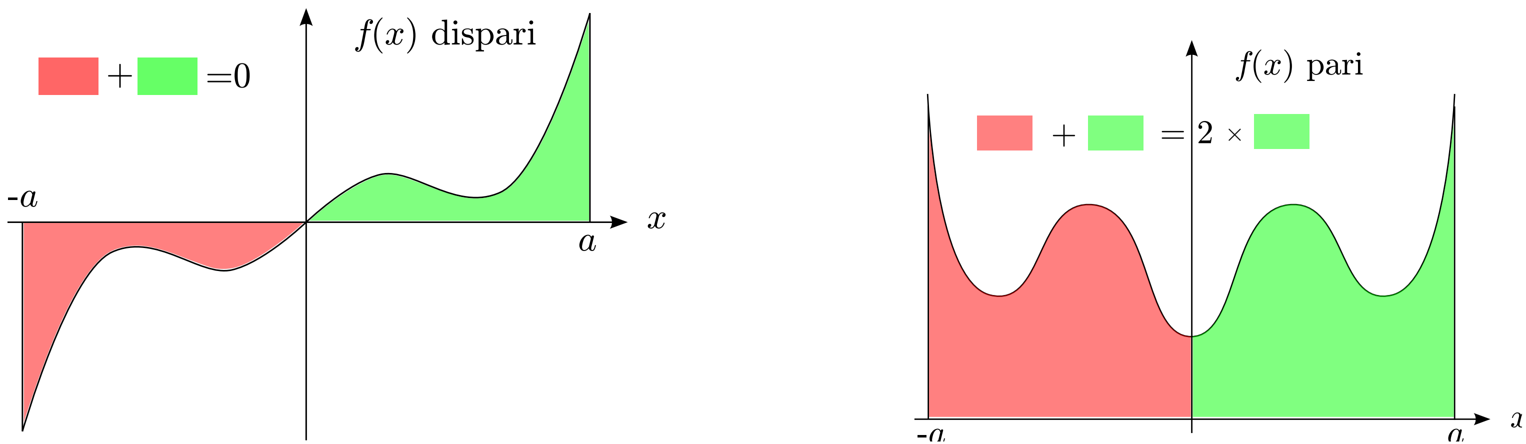


Figura 54. Integrazione di funzioni simmetrici.

A questo punto si pongono due

<u>Problemi</u>. (i) Quali funzioni sono integrabili?

(ii) Se f è integrabile, come si può calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$?

Per i nostri scopi il seguente risultato dà una risposta sufficiente al primo problema.

<u>TEOREMA</u> 6.4. *Se* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

- *è limitata e ha un numero finito di discontinuità, oppure*
- *è monotona*

allora f *è integrabile. In particolare ogni* $f \in \mathrm{C}[a,b]$ *è integrabile.*

Qui l'ultima affermazione segue dal primo punto visto che una funzione continua su $[a,b]$ ha zero punti di discontinuità ed è limitata per Weierstraß.

<u>ESEMPI</u>. Le funzioni $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ e $g : [0,3] \to \mathbb{R}$ definite come

$$f(x) := \begin{cases} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & \text{se } x \in \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}, 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right), \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \in [0,1), \\ x^2 - 2 & \text{se } x \in [1,2), \\ \sin(2x) & \text{se } x \in [2,3], \end{cases}$$

sono integrabili in quanto f (nonostante abbia un numero infinito di punti di discontinuità) è crescente e g ha soltanto 2 punti di discontinuità

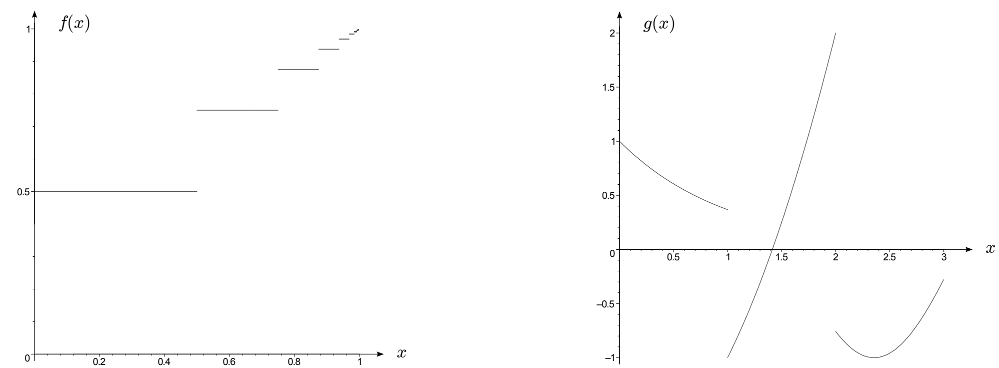


FIGURA 55. Esempi di funzioni integrabili non continue.

$(x_0 = 1$ e $x_1 = 2)$, cf. Figura 55.

Il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Passiamo ora al secondo problema, cioè cerchiamo modi per calcolare $A = \int_a^b f(x)\,dx$ visto che soltanto in casi particolarmente semplici è possibile di determinare A usando la definizione.

Perciò ci serve prima il seguente

Teorema 6.5 (*Teorema della Media*). *Se $f \in \mathrm{C}[a,b]$, allora esiste $c \in [a,b]$ tale che* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$

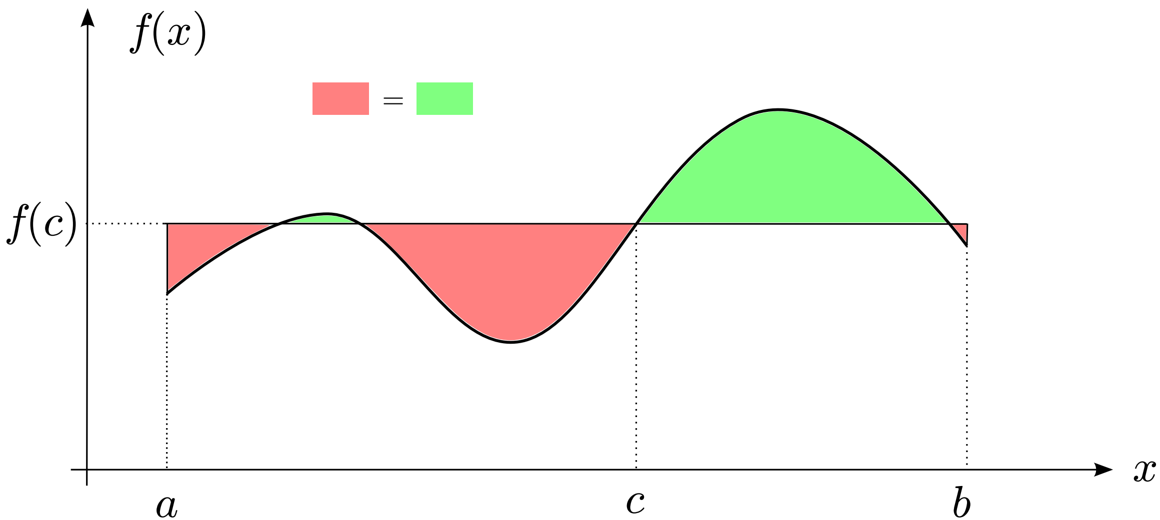


Figura 56. Teorema della media.

Dimostrazione. Per Weierstraß esistono

$$m := \min f, \qquad M := \max f.$$

Inoltre vale (cfr. pagina 171)

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M \cdot (b-a) \qquad \Rightarrow$$

$$\min f = m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{= \textit{valor medio} \text{ di } f \text{ in [a,b]}} \leq M = \max f.$$

Quindi per il teorema dei valori intermedi (cfr. pagina 88) esiste $c \in [a,b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a).$$

□

Dal teorema della media segue un risultato molto importante:

Teorema 6.6 (*Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale*). *Sia $f \in \mathrm{C}[a,b]$ allora la funzione*

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_a^x f(s)\,ds \quad = \text{funzione integrale di } f \ \textit{(cfr. Figura 57)}$$

è derivabile con

$$F'(x) = f(x) \quad \textit{per ogni } x \in [a,b].$$

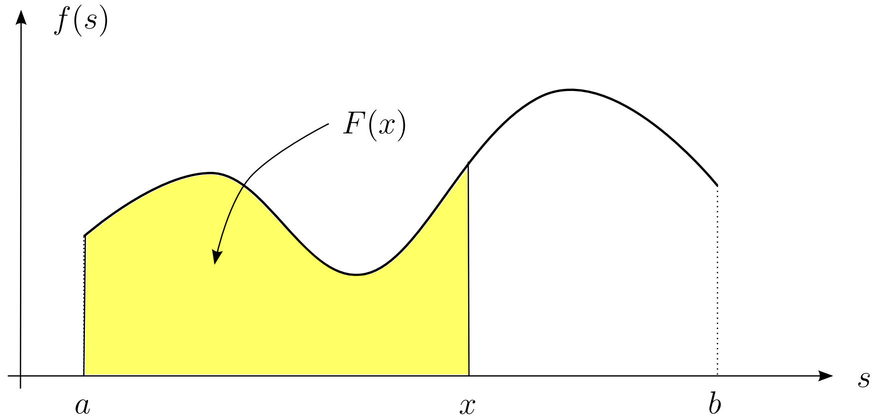


Figura 57. La funzione integrale.

Dimostrazione. Per verificare la derivabilità di F dobbiamo studiare il suo rapporto incrementale per $h \to 0$. Allora usando prima l'additività dell'integrale rispetto agli estremi di integrazione e poi il teorema della media segue

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{\int_a^{x+h} f(s)\,ds - \int_a^x f(s)\,ds}{h} \\ &= \frac{\int_x^{x+h} f(s)\,ds}{h} \\ &= \frac{h\cdot f(c)}{h} = f(c)\end{aligned}$$

per un $c = c_{x,h}$ tra x e $x+h$. Quindi $h \to 0$ implica $c_{x,h} \to x$ e la continuità di f implica

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(c_{x,h}) \to f(x) \qquad \text{per } h \to 0,$$

cioè F è derivabile con $F'(x) = f(x)$. □

<u>OSSERVAZIONI</u>. • Se G è una funzione derivabile tale che $G' = f$, allora G si dice *primitiva di* f. L'insieme

$$\int f(x)\,dx := \{G : G \text{ e una primitiva di } f\}$$

si chiama *integrale indefinito di* f.

- Per distinguere un integrale indefinito $\int f(x)\,dx$ (che rappresenta un'insieme di funzioni) da un integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ (che è un numero reale), quest'ultimo viene anche chiamato *integrale definito*.
- Se F e G sono due primitive di $f \in \mathrm{C}[a,b]$ allora

$$(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$$

e per la caratterizzazione delle funzioni costanti (cfr. pagina 122) esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$F(x) = G(x) + c \quad \text{per ogni } x \in [a,b].$$

Per questo motivo se F è una primitiva qualsiasi di f si scrive spesso

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

dove $c \in \mathbb{R}$ indica una costante arbitraria di integrazione.

Siamo ora in grado di dare una soluzione al secondo problema.

<u>COROLLARIO</u> 6.7. *Se $f \in \mathrm{C}[a,b]$ e G è una primitiva di f (cioè $G' = f$), allora*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) =: \big[G(x)\big]_a^b =: G(x)\Big|_a^b}$$

Dimostrazione. Sia F la funzione integrale di f. Allora per il Teorema fondamentale F è una primitiva di f e quindi per l'osservazione precedente esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) = G(x) + c$ per ogni $x \in [a, b]$. Quindi

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \overbrace{\int_a^b f(x)\,dx}^{=F(b)} - \overbrace{\int_a^a f(x)\,dx}^{=0=F(a)} \\ &= F(b) - F(a) = \big(G(b)+c\big) - \big(G(a)+c\big) \\ &= G(b) - G(a).\end{aligned}$$

□

Quindi vale la seguente

<u>Osservazione</u>. $\boxed{\text{Per calcolare } \int_a^b f(x)\,dx \text{ “basta” trovare una primitiva di } f.}$

Abbiamo scritto “basta” tra virgolette poiché come vedremo in seguito trovare una primitiva di una funzione f (si dice anche integrare f) generalmente non è un compito semplice.

Tuttavia possiamo ora calcolare i primi integrali non banali.

<u>Esempi</u>.

- Visto che $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$ segue $\int_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{1}{3} \cdot \left(2^3 - 1^3\right) = \frac{7}{3}$.

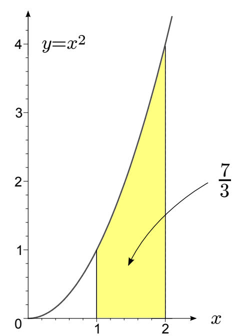


Figura 58. Area sotto il grafico.

- Sia $G(x) := \ln|x|$ per $x \neq 0$. Allora G è derivabile e

$$G'(x) = \begin{cases} \big(\ln(x)\big)' = \frac{1}{x} & \text{se } x > 0, \\ \big(\ln(-x)\big)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

  Quindi

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

  <u>Osservazione</u>. Questo fatto ci permette di dare una nuova rappresentazione per il logaritmo: Per $x > 0$ vale

$$\int_1^x \frac{1}{s}\,ds = \ln(s)\Big|_1^x = \ln(x) - \ln(1) = \ln(x) \quad \text{(cfr. Figura 59).}$$

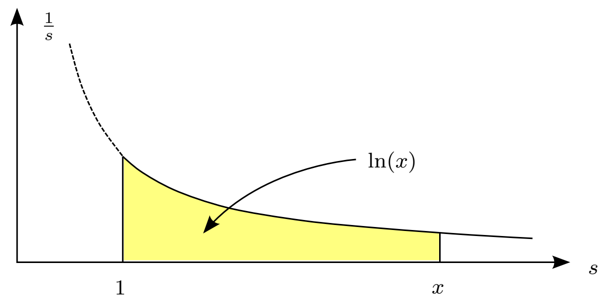


Figura 59. Il logaritmo.

- Visto che per ogni $r \neq -1$ vale $\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right)' = x^r$ insieme con l'esempio precedente segue

$$\boxed{\int x^r\,dx = \begin{cases} \ln|x| + c & \text{se } r = -1 \\ \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c & \text{se } r \neq -1 \end{cases}}$$

- La funzione $G(x) := \arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$ è derivabile con $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e quindi

$$\boxed{\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(x) + c}$$

- $\boxed{\int e^x \, dx = e^x + c}$
- $\boxed{\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + c}$ $\boxed{\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + c}$
- $\boxed{\int \sinh(x) \, dx = \cosh(x) + c}$ $\boxed{\int \cosh(x) \, dx = \sinh(x) + c}$

In questi esempi era semplice di indovinare la primitiva di una funzione integranda data (per esempio per x^r con $r \neq -1$) oppure siamo partiti con una funzione derivabile G che poi per definizione diventa la primitiva della sua derivata $f = G'$.

Nelle applicazioni invece è in generale data una funzione integranda f per la quale non è immediato indovinare una primitiva.

Quindi ci poniamo il seguente

<u>Problema</u>. Come si può trovare una primitiva di una funzione più complicata?

Per esempio, il logaritmo ln è continuo e quindi integrabile ma come si può calcolare

$$\int \ln(x) \, dx = ?$$

Per risolvere questo problema studiamo ora alcuni

Metodi di Integrazione

L'idea per trovare una primitiva di una funzione è che, grazie al Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale, *la derivazione e l'integrazione sono operazioni inverse*, cioè:

Se h è derivabile con continuità (brevemente si dice $h \in \mathrm{C}^1$), allora

$$(*) \qquad \int h'(x)\,dx = h(x) + c.$$

Così una regola di derivazione implica una regola associata di integrazione.

Integrazione per Parti. Sappiamo che se f, g sono C^1 allora anche $h := f \cdot g$ è C^1 con

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Quindi da $(*)$ segue

$$\int f'(x) \cdot g(x)\,dx + \int f(x) \cdot g'(x)\,dx = \int \underbrace{\big(f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\big)}_{=h'(x)}\,dx = \underbrace{f(x) \cdot g(x)}_{=h(x)} + c$$

Così risultano le formule

- *Integrazione per Parti* (versione indefinita)

$$\boxed{\int f'(x) \cdot g(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\,dx}$$

- *Integrazione per Parti* (versione definita)

$$\boxed{\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,dx = f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx}$$

Quindi il metodo di integrazione per parti corrisponde alla regola di derivazione di un prodotto.

Vediamo ora come si applica questa regola

ESEMPI. • Utilizziamo integrazione per parti per calcolare

$$\int x^r \cdot \ln(x)\, dx$$

per $r \neq -1$. A questo punto dobbiamo decidere quale dei fattori è $f'(x)$ e quale $g(x)$. Ma visto che con la scelta $f'(x) = \ln(x)$ non si può continuare non conoscendo la primitiva del logaritmo, l'unica possibilità è $x^r = f'(x)$ e $\ln(x) = g(x)$ e quindi (siccome $r \neq -1$) $f(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$ e $g'(x) = \frac{1}{x}$. Così risulta

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x^r}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)}\, dx &= \underbrace{\frac{x^{r+1}}{r+1}}_{f(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)} - \int \underbrace{\frac{x^{r+1}}{r+1}}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)}\, dx \\
&= \frac{x^{r+1}}{r+1} \cdot \ln(x) - \frac{1}{r+1} \cdot \int x^r\, dx \\
&= \frac{x^{r+1}}{r+1} \cdot \ln(x) - \frac{1}{r+1} \cdot \frac{x^{r+1}}{r+1} + c \\
&= \frac{x^{r+1}}{r+1} \cdot \left(\ln(x) - \frac{1}{r+1}\right) + c.
\end{aligned}$$

In questo esempio il metodo integrazione per parti funziona poiché il logaritmo $g(x) = \ln(x)$ è una funzione "complicata" con derivata $g'(x) = \frac{1}{x}$ "semplice". Quindi passando la derivata da $f(x)$ a $g(x)$ l'integrale si semplifica. Inoltre possiamo dire che per $r = 0$ otteniamo $g(x) = x^0 = 1$ per ogni x e quindi abbiamo anche calcolato

$$\int \ln(x)\, dx = x \cdot \big(\ln(x) - 1\big) + c.$$

Se si vuole calcolare questo integrale direttamente (cioè senza il fattore x^r) si deve procedere con un piccolo trucco:

$$\begin{aligned}
\int \ln(x)\, dx &= \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)}\, dx = \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)} - \int \overbrace{\underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)}}^{=1}\, dx \\
&= x \cdot \ln(x) - x + c.
\end{aligned}$$

- Anche l'integrale

$$\int e^x \cdot \cos(x)\,dx$$

si può calcolare usando integrazione per parti. Perciò scegliamo $f'(x) = e^x$ e $g(x) = \cos(x)$ (ma funzionerebbe anche viceversa). Allora $f(x) = e^x$ e $g'(x) = -\sin(x)$ e quindi

$$\int \underbrace{e^x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g(x)}\,dx = \underbrace{e^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g(x)} - \int \underbrace{e^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\big(-\sin(x)\big)}_{g'(x)}\,dx.$$

Sembra che non è cambiato molto, invece il trucco è di integrare un'altra volta per parti, dove usiamo u, v invece di f, g per non confonderci

$$\begin{aligned}\int e^x \cdot \cos(x)\,dx &= e^x \cdot \cos(x) + \int \underbrace{e^x}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v(x)}\,dx \\ &= e^x \cdot \cos(x) + \underbrace{e^x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v(x)} - \int \underbrace{e^x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v'(x)}\,dx.\end{aligned}$$

Così siamo tornati all'integrale iniziale e a prima vista il procedimento risulta essere inutile. Invece abbiamo trovato un'equazione del tipo

$$I = E + \alpha \cdot I$$

per l'integrale I in questione con un'espressione E nota e, molto importante,

$$\alpha = -1 \neq 1.$$

Nel caso $\alpha = 1$ l'integrale si semplifica e quindi tutto era infatti inutile. Per $\alpha \neq 1$ invece l'equazione si risolve facilmente come $I = \frac{E}{1-\alpha}$ cioè (visto che qui $1 - \alpha = 2$)

$$\int e^x \cdot \cos(x)\,dx = \frac{e^x\big(\sin(x) + \cos(x)\big)}{2} + c.$$

- Consideriamo

$$\int \cos^2(x)\,dx.$$

Allora, con $f'(x) = g(x) = \cos(x)$ otteniamo $f(x) = \sin(x)$ e $g'(x) = -\sin(x)$ e quindi

$$\int \underbrace{\cos(x)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g(x)}\,dx = \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g(x)} - \int \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\big(-\sin(x)\big)}_{g'(x)}\,dx$$

Ora si potrebbe avere la stessa idea come nell'integrale precedente di integrare un'altra volta per parti. Ciò invece non funziona e porta soltanto all'annullamento di tutto. Invece si usa la relazione $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ che implica

$$\begin{aligned}\int \cos^2(x)\,dx &= \sin(x)\cdot\cos(x) + \int \underbrace{\sin^2(x)}_{1-\cos^2(x)}\,dx = \sin(x)\cdot\cos(x) + \int 1\,dx - \int \cos^2(x)\,dx\\ &= \sin(x)\cdot\cos(x) + x - \int \cos^2(x)\,dx\end{aligned}$$

che, come prima, è un'equazione per l'integrale in questione che è facilmente da risolvere con la soluzione

$$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{\sin(x)\cdot\cos(x) + x}{2} + c.$$

Integrazione per Sostituzione. Abbiamo visto come il metodo integrazione per parti segue dalla regola per la derivazione di un prodotto. Ora invece partiamo con la regola della catena (per derivare le funzioni composte) e cerchiamo la regola corrispondente per l'integrazione.
Sia $f \in \mathrm{C}[a,b]$ con una primitiva F. Sia, inoltre $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ derivabile con continuità e $\varphi' \neq 0$. Allora la funzione composta[2]

$$h : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}, \quad h(t) := F\big(\varphi(t)\big)$$

è derivabile con

$$h'(t) = F'\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t).$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione $(*)$ a pagina 184 risulta la formula chiamata

- *Integrazione per Sostituzione* (versione indefinita)

$$\boxed{\int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,dt = F\big(\varphi(t)\big) + c.}$$

  dove F è una primitiva di f, cioè $F' = f$.

Sostituendo nella versione indefinita gli estremi $t=\beta$ e $t=\alpha$ segue dal corollario sul Teorema Fondamentale a pagina 180

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,dt &= F\big(\varphi(t)\big)\Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} \\ &= F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big) \\ &= F(x)\Big|_{x=\varphi(\alpha)}^{x=\varphi(\beta)} \\ &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Quindi abbiamo dimostrato la formula

- *Integrazione per Sostituzione* (versione definita)

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx}$$

[2]per non confonderci usiamo come variabili $t \in [\alpha,\beta]$ e $x \in [a,b]$.

Prima di considerare esempi concreti deduciamo due regole generali di integrazione:

<u>Esempi</u>. • Se nella versione indefinita della formula integrazione per sostituzione scegliamo $f(x) = \frac{1}{x}$ con la primitiva $F(x) = \ln|x|$ e per φ una funzione C^1 con $\varphi(t) \neq 0$ per ogni t allora segue

$$\boxed{\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt = \ln\big|\varphi(t)\big| + c}$$

Un esempio concreto di questo tipo è

$$\begin{aligned}\int \tan(t)\,dt &= \int \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\,dt \\ &= -\int \frac{\overbrace{-\sin(t)}^{\varphi'(t)}}{\underbrace{\cos(t)}_{\varphi(t)}}\,dt \\ &= -\ln\big|\cos(t)\big| + c.\end{aligned}$$

• Se nella versione indefinita della formula integrazione per sostituzione scegliamo $f(x) = x$ con la primitiva $F(x) = \frac{x^2}{2}$ e per φ una funzione C^1 allora segue

$$\boxed{\int \varphi(t)\cdot\varphi'(t)\,dt = \frac{\varphi(t)^2}{2} + c}$$

Un esempio concreto di questo tipo è

$$\int \underbrace{\sin(t)}_{\varphi(t)}\cdot\underbrace{\cos(t)}_{\varphi'(t)}\,dt = \frac{\sin^2(t)}{2} + c.$$

<u>Osservazione</u>. In pratica, si usa il metodo integrazione per sostituzione nel seguente modo: Nella funzione integranda (nella variabile t) si indovina un espressione $\varphi(t)$ che indichiamo con x, cioè si fa la *sostituzione* $x := \varphi(t)$. Considerando x come funzione in t si deriva rispetto a t e si ottiene (formalmente)

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \quad \Rightarrow \quad dx = \varphi'(t) \cdot dt$$

Così risulta già la versione indefinita: Se $F' = f$, allora

$$\int \underbrace{f\big(\overbrace{\varphi(t)}^{=x}\big)}_{=f(x)} \cdot \underbrace{\varphi'(t)\,dt}_{=dx} = \int f(x)\,dx = F(x) + c = F\big(\varphi(t)\big) + c.$$

Per ottenere la versione definitiva basta osservare che

- $t = \alpha \quad \Rightarrow \quad x = \varphi(t) = \varphi(\alpha)$, e
- $t = \beta \quad \Rightarrow \quad x = \varphi(t) = \varphi(\beta)$

cioè $t \in [\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$[3] $\iff$ $x \in [a, b]$ e quindi

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.$$

Questo ragionamento è puramente formale, ma dimostra la forza delle notazioni per le derivate (come rapporti $\frac{df}{dx}$ tra infinitesimi) e gli integrali (come somme continue $\int f(x)\,dx$) inventati più di 300 anni fa da Leibniz.

Vediamo ora come funziona questo procedimento in un esempio concreto:

<u>Esempi</u>. • Calcoliamo

$$\int_1^2 t \cdot \sqrt{t-1}\,dt.$$

In questo caso l'idea è far sparire la radice ponendo $x := \sqrt{t-1}$ $(= \varphi(t))$. Visto che anche il fattore t nell'integrale deve essere espresso nella nuova variabile risolviamo l'equazione $x := \sqrt{t-1}$ per t:

$$x^2 = t - 1 \quad \Rightarrow \quad t = x^2 + 1.$$

[3] se $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$, altrimenti $t \in [\varphi(\beta), \varphi(\alpha)]$

Ora ci sono 2 modi per trovare la relazione tra dx e dt:

- consideriamo (come sopra indicato) $x = \sqrt{t-1}$ come funzione in t e deriviamo rispetto a t, cioè

$$\frac{dx}{dt} = \left((t-1)^{\frac{1}{2}}\right)' = \tfrac{1}{2}\cdot(t-1)^{\frac{1}{2}-1} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{t-1}} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad dt = 2x\cdot dx.$$

oppure

- consideriamo $t = x^2+1$ come funzione in x e deriviamo rispetto a x, cioè

$$\frac{dt}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad dt = 2x\cdot dx$$

e quindi le due possibilità portano allo stesso risultato. Inoltre abbiamo

- $t = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1-1} = 0$, e
- $t = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2-1} = 1$.

Quindi risulta

$$\begin{aligned}\int_1^2 \underbrace{t}_{x^2+1}\cdot\underbrace{\sqrt{t-1}}_{x}\underbrace{dt}_{2x\cdot dx} &= \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} (x^2+1)\cdot x\cdot 2x\cdot\, dx \\ &= 2\cdot\int_0^1 (x^4+x^2)\,dx \\ &= 2\Big[\tfrac{x^5}{5}+\tfrac{x^3}{3}\Big]_0^1 \\ &= 2\Big(\tfrac{1^5}{5}+\tfrac{1^3}{3}-0\Big) = \frac{16}{15}\ .\end{aligned}$$

Nell'esempio precedente si trattava di un integrale definito in t per il quale abbiamo calcolato gli estremi nella nuova variabile x. Anziché calcolare gli estremi in x, dopo la integrazione si può anche tornare alla variabile iniziale (che per integrali indefiniti è sempre necessario) e poi sostituire gli estremi originali. Così faremo nei prossimi esempi.

- Calcoliamo

$$\int_1^4 e^{\sqrt{t}}\,dt.$$

Allora, per fare sparire la radice procediamo come prima e poniamo $x := \sqrt{t}$ cioè $t = x^2$. Ciò implica $\frac{dt}{dx} = 2x$ e quindi $dt = 2x \cdot dx$. Ora non calcoliamo gli estremi in x ma li sostituiamo con "…" intendendo che non ci interessano in questo momento. Così risulta

$$\int_1^4 e^{\sqrt{t}}\,dt = \int_{\dots}^{\dots} e^x \cdot 2x\,dx.$$

Questo è un tipico integrale che si risolve per parti e quindi dobbiamo individuare chi è f' e chi g. Qui la scelta giusta è $f'(x) = e^x$ e $g(x) = x$ poiché se facciamo viceversa l'integrale non si semplifica ma diventa tipo $\int x^2 e^x\,dx$ che è ancora più difficile. Allora

$$\begin{aligned}
2\int_{\dots}^{\dots} \underbrace{e^x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)}\,dx &= 2\Big(\underbrace{e^x \cdot x}_{f(x)\cdot g(x)}\Big|_{\dots}^{\dots} - \int_{\dots}^{\dots} \underbrace{e^x \cdot 1}_{f(x)\cdot g'(x)}\,dx\Big) \\
&= 2\Big[x \cdot e^x - e^x\Big]_{\dots}^{\dots} \\
(x = \sqrt{t}) \qquad &= 2\Big[e^{\sqrt{t}}\big(\sqrt{t} - 1\big)\Big]_1^4 \\
&= 2\Big(e^2 \cdot (2-1) - e^1 \cdot (1-1)\Big) = 2 \cdot e^2.
\end{aligned}$$

In questo esempio abbiamo visto che può capitare che si devono usare entrambi i metodi, cioè integrazione per sostituzione e anche integrazione per parti.

- Consideriamo ora l'integrale indefinito

$$\int \cos\big(\ln(t)\big)\,dt.$$

In questo esempio facciamo sparire il logaritmo ponendo $x := \ln(t)$ cioè $t = e^x$. Ciò implica

$$\frac{dt}{dx} = e^x \quad \Rightarrow \quad dt = e^x \cdot dx.$$

Quindi otteniamo

$$\int \cos\big(\underbrace{\ln(t)}_{x}\big)\underbrace{dt}_{e^x \cdot dx} = \int \cos(x) \cdot e^x\,dx.$$

L'ultimo integrale è già stato calcolato a pagina 186 usando integrazione per parti e quindi

$$\begin{aligned} &= \frac{e^x\big(\sin(x)+\cos(x)\big)}{2} + c \\ \big(x = \ln(t)\big) \qquad &= e^{\ln(t)} \cdot \frac{\sin\big(\ln(t)\big)+\cos\big(\ln(t)\big)}{2} + c \\ &= t \cdot \frac{\big(\sin(\ln(t))+\cos(\ln(t))\big)}{2} + c \end{aligned}$$

Ripetiamo che in questo esempio, come per tutti gli integrali indefiniti, dopo la sostituzione è necessario tornare alla variabile iniziale, in questo caso t.

Mentre negli esempi passati era abbastanza semplice indovinare la sostituzione (cioè trovare il $\varphi(t)$ che poi viene chiamato x) ci sono integrali dove la giusta sostituzione non è così evidente da trovare.

- Calcoliamo l'area A di un cerchio di raggio 1 data dall'equazione
$$x^2 + y^2 = 1.$$
Risolvendo l'equazione nel primo quadrante si ottiene $y = \sqrt{1-x^2}$ e per simmetria segue
$$A = 4 \cdot \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$$
Con la sostituzione $x := \sin(t)$ cioè $t = \arcsin(x)$ segue
  - $\frac{dx}{dt} = \cos(t) \Rightarrow dx = \cos(t) \cdot dt,$
  - $x = 0 \Rightarrow t = \arcsin(0) = 0,$
  - $x = 1 \Rightarrow t = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$

  Visto che per $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ vale $\cos(t) \geq 0$ risulta $\cos(t) = +\sqrt{1-\sin^2(t)}$ e quindi
$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overbrace{\sqrt{1-\sin^2(t)}}^{=\cos(t)} \cdot \cos(t) \cdot\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\, dt. \end{aligned}$$
Abbiamo calcolato questo integrale già a pagina 187
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\, dt = \frac{\sin(t) \cdot \cos(t) + t}{2} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$
Quindi risulta
$$A = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi.$$

  Nella stessa maniera si può verificare che l'area $A(r)$ di un cerchio di raggio $r \geq 0$ è data da
$$A(r) = \pi \cdot r^2.$$

- Calcoliamo

$$\int \arctan(x)\,dx$$

Visto che $\arctan(x)$ (come anche $\ln(x)$) è una funzione "complicata" con una derivata $\frac{1}{1+x^2}$ molto più semplice, l'idea per risolvere questo integrale é usare l'integrazione per parti. Perciò useremo il trucco di inserire il fattore 1 che abbiamo già usato per integrare il logaritmo $\ln(x)$ (cfr. pagina 185):

$$\begin{aligned}\int \arctan(x)\,dx &= \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\arctan(x)}_{g(x)}\,dx \\ &= \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\arctan(x)}_{g(x)} - \int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{g'(x)}\,dx \\ &= x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{\overbrace{2x}^{\varphi'(x)}}{\underbrace{1+x^2}_{\varphi(x)}}\,dx \\ &= x \cdot \arctan(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + c,\end{aligned}$$

dove per l'ultimo integrale abbiamo usato la formula a pagina 189. Altrimenti si potrebbe anche utilizzare la sostituzione $t := 1+x^2$ e procedere come negli altri esempi.

<u>Osservazione</u>. Gli esempi che abbiamo visto dimostrano chiaramente che integrare una funzione può essere difficile ed impegnativo mentre in confronto derivare è una semplice procedura che si può fare abbastanza meccanicamente. In effetti ci sono funzioni continue (che quindi, per il teorema fondamentale, possiedono una primitiva) composizione di funzioni elementari tali che le primitive non possono essere espresse usando solo funzioni elementari.

Per esempio

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{\pm x^2}$$

sono continue (infatti C^∞) ma le loro primitive *non* si possono esprimere utilizzando solo le funzioni che abbiamo incontrati finora. Quindi in un certo senso non si possono calcolare

$$\int e^{x^2}\,dx \qquad \text{e} \qquad \int e^{-x^2}\,dx$$

e questo fatto dimostra che integrare *esplicitamente* una funzione può essere addirittura impossibile.

ESEMPIO. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \left(1 - e^{s^2}\right) ds}{\sin(x^3)} =: l.$$

SOLUZIONE. Come indicato sopra non possiamo calcolare l'integrale. Però, grazie alle Regole di l'Hospital e il Teorema Fondamentale del calcolo integrale ciò non è neanche necessario! Prima di derivare sostituiamo $\sin(x^3)$ con l'espressione x^3 che è asintotica per $x \to 0$ e possiede derivate molto più semplici. Quindi, per il principio di sostituzione, vale

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \left(1 - e^{s^2}\right) ds}{x^3} \qquad \left(= \tfrac{0}{0}\right) \\ &\stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{x^2}}{3x^2} = -\frac{1}{3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \\ &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

□

Integrazione di Funzioni Razionali

<u>Problema</u>. Come si integra una funzione razionale $\frac{p(x)}{q(x)}$ per due polinomi p, q, per esempio

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 10}{x^2 - 3x + 2}\, dx \quad ?$$

A questo problema c'è sempre una soluzione che inoltre coinvolge soltanto i tre integrali notevoli per x^r con $r \neq -1$, x^{-1} e $\frac{1}{1+x^2}$.

Il problema, però, è scomporre la funzione integranda in una somma tra un polinomio e fratti semplici in maniera che si possono utilizzare tali integrali.

Perciò si procede in 3 passi:

1° Passo (divisione con resto): Se grado(p) $\geq$ grado(q), allora dividiamo p per q con resto ottenendo polinomi s e r con

- $p = s \cdot q + r$,
- grado(r) $<$ grado(q),

cioè

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}\ .$$

Per esempio per $p(x) = x^4 - 2x^2 + 10$ e $q(x) = x^2 - 3x + 2$ otteniamo

$$\begin{array}{rrrrrl}
\big(x^4 & & -2x^2 & & +10\big) & : \big(x^2 - 3x + 2\big) = x^2 + 3x + 5 + \dfrac{9x}{x^2 - 3x + 2} \\
-x^4 & +3x^3 & -2x^2 & & & \\
\hline
 & 3x^3 & -4x^2 & & & \\
 & -3x^3 & +9x^2 & -6x & & \\
\hline
 & & 5x^2 & -6x & +10 & \\
 & & -5x^2 & +15x & -10 & \\
\hline
 & & & 9x & &
\end{array}$$

2° Passo: Usando la linearità dell'integrale si ottiene

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \underbrace{\int s(x)\,dx}_{\text{semplice da calcolare}} + \int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx$$

Per esempio

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4-2x^2+10}{x^2-3x+2}\,dx &= \int x^2+3x+5\,dx + \int \frac{9x}{x^2-3x+2}\,dx\\ &= \frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+5x+\int \frac{9x}{x^2-3x+2}\,dx.\end{aligned}$$

3° Passo (decomposizione in fratti semplici): Si calcola

$$\int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx.$$

Consideriamo soltanto il caso grado$(q) = 2$ cioè $q(x) = ax^2 + bx + c$, $r(x) = dx + e$. Ci sono 3 casi secondo il segno del discriminante di $q(x)$:

(i) $b^2 - 4ac > 0$, cioè $q(x)$ ha due zeri reali distinti x_1, x_2.

(ii) $b^2 - 4ac = 0$, cioè $q(x)$ ha soltanto uno zero (doppio) reale x_0.

(iii) $b^2 - 4ac < 0$, cioè $q(x)$ non ha zeri reali.

Caso (i): I due zeri distinti di $q(x)$ sono date da

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Allora si possono trovare due costanti $A, B \in \mathbb{R}$ (uniche) tali che

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx = A \cdot \ln|x-x_1| + B \cdot \ln|x-x_2| + c.$$

L'esempio precedente con $q(x) = x^2 - 3x + 2$ entra proprio in questo caso: Qui abbiamo

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{3\pm 1}{2} = 1 \text{ opp. } 2.$$

Inoltre $r(x) = 9x$ e quindi cerchiamo costanti $A, B \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{9 \cdot x - 0}{x^2 - 3x + 2} \overset{!}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B) \cdot x - (2A+B)}{(x-1) \cdot (x-2)}.$$

Confrontando i coefficienti ciò vale se e solo se

$$\left\{ \begin{aligned} A + B &= 9 \\ 2A + B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} A &= -9 \\ B &= 18 \end{aligned} \right\}$$

e quindi otteniamo

$$\frac{9x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-9}{x-1} + \frac{18}{x-2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{9x}{x^2 - 3x + 2}\, dx = -9 \cdot \ln|x-1| + 18 \cdot \ln|x-2| + c.$$

Così risulta

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 10}{x^2 - 3x + 2}\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 5x - 9 \cdot \ln|x-1| + 18 \cdot \ln|x-2| + c.$$

Caso (ii): L'unico zero di $q(x)$ è dato da

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Allora si possono trovare due costanti $A, B \in \mathbb{R}$ (uniche) tali che

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A}{x - x_0} + \frac{B}{(x - x_0)^2} \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{r(x)}{q(x)}\, dx = A \cdot \ln|x - x_0| - \frac{B}{x - x_0} + c.$$

Come esempio concreto consideriamo l'integrale

$$\int \frac{3x}{x^2 - 2x + 1}\, dx.$$

Allora il denominatore si annulla se e solo se

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} = 1 = x_0.$$

Quindi cerchiamo $A, B \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{3 \cdot x + 0}{x^2 - 2x + 1} \overset{!}{=} \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} = \frac{A \cdot x + (B - A)}{(x - 1)^2}$$

Confrontando i coefficienti ciò vale se e solo se

$$\begin{Bmatrix} A = 3 \\ B - A = 0 \end{Bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{Bmatrix} A = 3 \\ B = 3 \end{Bmatrix}$$

e quindi otteniamo

$$\frac{3x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{3}{x - 1} + \frac{3}{(x - 1)^2} \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{3x}{x^2 - 2x + 1}\, dx = 3 \cdot \ln|x - 1| - \frac{3}{x - 1} + c.$$

Caso (iii): In questo caso $q(x)$ non ha zeri reali. Allora si possono trovare due costanti $A, B \in \mathbb{R}$ (uniche) tali che

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A \cdot q'(x)}{q(x)} + \frac{B}{q(x)} \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx = A \cdot \ln|q(x)| + B \int \frac{1}{q(x)}\,dx,$$

dove abbiamo usato la formula $\int \frac{q'(x)}{q(x)}\,dx = \ln|q(x)|$ (cfr. pagina 189). Rimane da calcolare l'integrale

$$\int \frac{dx}{q(x)} = \int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\,dx.$$

Per fare ciò si cercano costanti $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tale che

$$q(x) = ax^2 + bx + c = \gamma \cdot \left(1 + \left(\tfrac{x+\alpha}{\beta}\right)^2\right)$$

Usando la sostituzione

$$t := \frac{x+\alpha}{\beta} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\beta} \qquad \Rightarrow \qquad dx = \beta \cdot dt$$

risulta

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{q(x)} &= \int \frac{dx}{\gamma \cdot \left(1 + \left(\tfrac{x+\alpha}{\beta}\right)^2\right)} \\ &= \frac{\beta}{\gamma} \cdot \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\beta}{\gamma} \cdot \arctan(t) + c \\ &= \frac{\beta}{\gamma} \cdot \arctan\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right) + c. \end{aligned}$$

Riassumendo, in questo caso otteniamo

$$\int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx = A \cdot \ln|q(x)| + \frac{\beta \cdot B}{\gamma} \cdot \arctan\Big(\frac{x+\alpha}{\beta}\Big) + c.$$

dove

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A \cdot q'(x) + B}{q(x)} \qquad \text{e} \qquad q(x) = \gamma \cdot \Big(1 + \big(\tfrac{x+\alpha}{\beta}\big)^2\Big).$$

Come esempio concreto consideriamo l'integrale

$$\int \frac{4x}{x^2 - 4x + 13}\,dx.$$

Visto che il discriminante del denominatore $b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 13 < 0$ siamo nel terzo caso. Allora, cerchiamo prima $A, B \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{4 \cdot x + 0}{x^2 - 4x + 13} \overset{!}{=} \frac{A \cdot \overbrace{(x^2 - 4x + 13)'}^{=2x-4} + B}{x^2 - 4x + 13} = \frac{2A \cdot x + (-4A + B)}{x^2 - 4x + 13}.$$

Confrontando i coefficienti ciò vale se e solo se

$$\begin{Bmatrix} 2A = 4 \\ -4A + B = 0 \end{Bmatrix} \iff \begin{Bmatrix} A = 2 \\ B = 8 \end{Bmatrix}$$

e quindi

$$\int \frac{4x}{x^2 - 4x + 13}\,dx = 2 \cdot \ln\big(x^2 - 4x + 13\big) + 8 \int \frac{1}{x^2 - 4x + 13}\,dx.$$

Inoltre vale

$$x^2 - 4x + 13 = (x-2)^2 + 9 = 9 \cdot \left(1 + \left(\tfrac{x-2}{3}\right)^2\right)$$

cioè $\alpha = -2$, $\beta = 3$ e $\gamma = 9$ e così con la sostituzione $t := \frac{x-2}{3} \Rightarrow dx = 3dt$ risulta

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 - 4x + 13}\, dx &= \frac{1}{9} \cdot \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x-2}{3}\right)^2} \\ &= \frac{3}{9} \cdot \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3} \cdot \arctan(t) + c \\ &= \tfrac{1}{3} \cdot \arctan\left(\tfrac{x-2}{3}\right) + c.\end{aligned}$$

Riassumendo otteniamo il risultato finale

$$\int \frac{4x}{x^2 - 4x + 13}\, dx = 2 \cdot \ln\left(x^2 - 4x + 13\right) + \tfrac{8}{3} \cdot \arctan\left(\tfrac{x-2}{3}\right) + c.$$

<u>Altri Esempi</u>.

- Calcolare $\int_0^1 \frac{2}{\cosh(x)}\, dx$ (Sost. $e^x = t$).
- Calcolare $\int \frac{2}{\sinh(x)}\, dx$. (Sost. $e^x = t$).

Integrali Impropri

Ricordiamo che finora un'integrale definito rappresenta un'area A tra l'asse x e il grafico

- di una *funzione integranda f limitata*,
- su un *dominio di integrazione $[a, b]$ limitato*.

Questo significa che al momento non abbiamo definito integrali del tipo

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{(funzione integranda } non \text{ limitata)}$$

oppure

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \quad \text{(dominio di integrazione } [0, +\infty) \ non \text{ limitato)}$$

cfr. Figura 60.

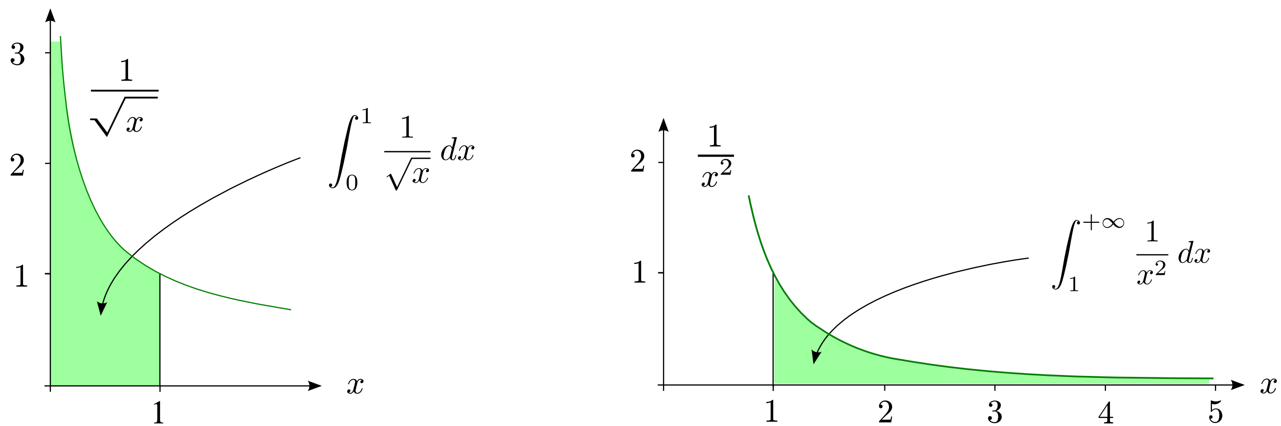


Figura 60. Integrali impropri.

Però con il concetto di limite è semplice eliminare questi due vincoli.

Definizione 6.8 (*Integrale Improprio*). Sia $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tale che f è integrabile in $[a,c]$ per ogni $a < c < b$. Allora, se converge

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx =: A$$

si dice che l'integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx := A \quad (= \textit{integrale improprio} \text{ oppure } \textit{generalizzato})$$

esiste nel senso *improprio* oppure che *converge*[4]. Una definizione analoga si ha per $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx.$$

Esempi.

- Per $r \in \mathbb{R}$ studiamo la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} x^r\,dx := \lim_{c \to +\infty} \int_1^c x^r\,dx.$$

Conviene considerare 2 casi

- $r = -1$: Allora

$$\int_1^c x^{-1}\,dx = \ln(x)\Big|_1^c = \ln(c) - \ln(1) \to +\infty \quad \text{per } c \to +\infty,$$

cioè l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$$

diverge.

[4]Per integrali impropri si usa lo stesso linguaggio delle serie, cioè si parla di convergenza e divergenza etc.

- $r \neq -1$: Allora

$$\int_1^c x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}\bigg|_1^c = \frac{c^{r+1}}{r+1} - \frac{1}{r+1} \xrightarrow{(c\to+\infty)} \begin{cases} -\frac{1}{r+1} & \text{se } r+1<0 \iff r<-1, \\ +\infty & \text{se } r+1>0 \iff r>-1. \end{cases}$$

Quindi risulta

$$\boxed{\int_1^{+\infty} x^r\,dx = \begin{cases} -\frac{1}{r+1} & \text{se } r<-1, \\ +\infty & \text{se } r\geq -1. \end{cases}}$$

Per esempio per $r=-2<-1$ otteniamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{-2+1} = 1.$$

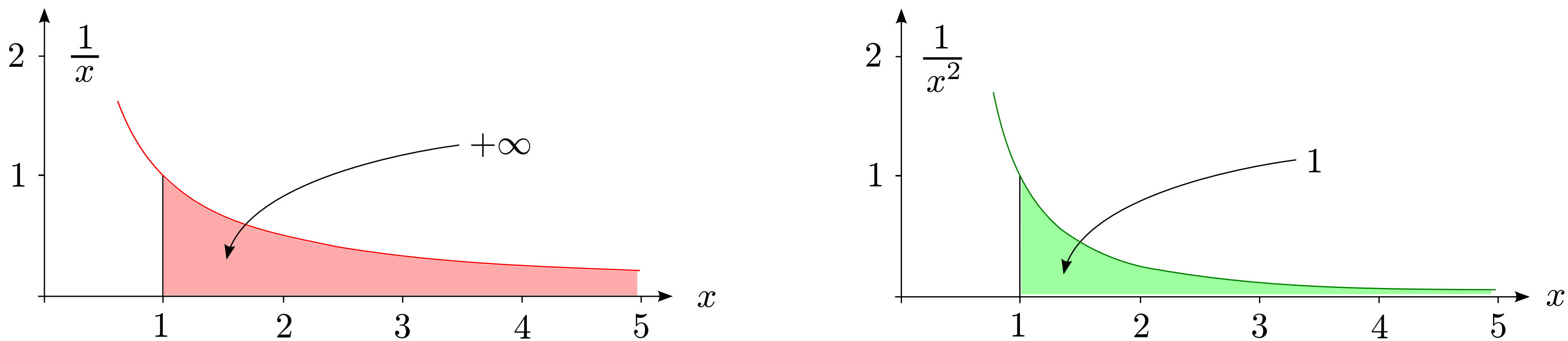


FIGURA 61. Integrali impropri.

- Consideriamo ora la stessa funzione integranda ma sul dominio di integrazione $[0,1]$, cioè studiamo[5]

$$\int_0^1 x^r\,dx := \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 x^r\,dx.$$

Come prima conviene considerare 2 casi

- $r=-1$: Allora

$$\int_c^1 x^{-1}\,dx = \ln(x)\Big|_c^1 = \ln(1)-\ln(c) \to -(-\infty) = +\infty \quad \text{per } c\to 0^+,$$

cioè l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$$

diverge.

- $r\neq -1$: Allora

$$\int_c^1 x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}\Big|_c^1 = \frac{1}{r+1}-\frac{c^{r+1}}{r+1} \overset{(c\to 0^+)}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{r+1} & \text{se } r+1>0 \iff r>-1,\\ +\infty & \text{se } r+1<0 \iff r<-1.\end{cases}$$

Quindi risulta

$$\boxed{\int_0^1 x^r\,dx = \begin{cases} \frac{1}{r+1} & \text{se } r>-1,\\ +\infty & \text{se } r\leq -1.\end{cases}}$$

Per esempio per $r=-\frac{1}{2}>-1$ otteniamo

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} = 2.$$

[5] qui il limite è solo necessario se $r<0$.

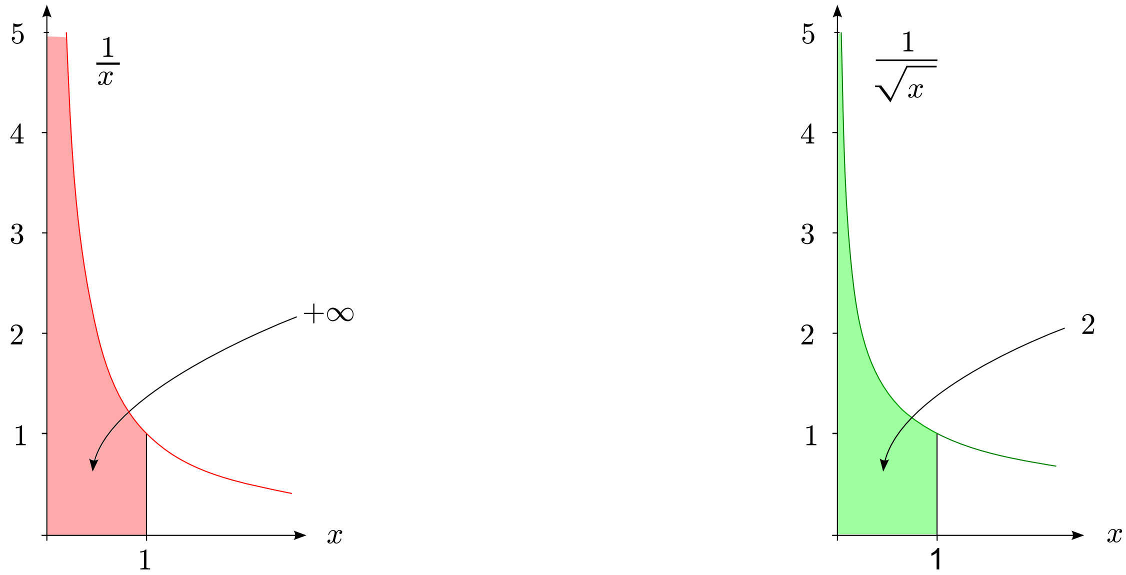


FIGURA 62. Integrali impropri.

Mentre per x^r nei due esempi precedenti era abbastanza semplice trovare una primitiva abbiamo visto che può essere difficile e addirittura impossibile integrare esplicitamente una funzione. Perciò si pone il seguente[6]

PROBLEMA. Come si può studiare la convergenza di un'integrale improprio senza conoscere una primitiva della funzione integranda?

Evidenziamo che così non chiediamo più di calcolare il valore dell'integrale ma soltanto di verificare che esiste e sia finito.

[6] Questo problema è molto simile a quello che abbiamo incontrato nel capitolo sulle serie: come si può studiare la convergenza di una serie *senza* avere una formula esplicita per le somme parziali, cfr. pagina 43.

Teorema 6.9 (*del Confronto per gli Integrali Impropri*). *Siano $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e tale che per ogni $a < c < b$, f, g siano integrabili su $[a, c]$. Se*

- $|f(x)| \leq g(x)$ *per ogni* $x \in [a, b)$ *(cioè g è un* maggiorante di $|f|$*) e*
- $\int_a^b g(x)\, dx$ *converge,*

allora converge anche $\int_a^b f(x)\, dx$. Un risultato simile vale anche per $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$.

Esempi.

- Consideriamo l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.

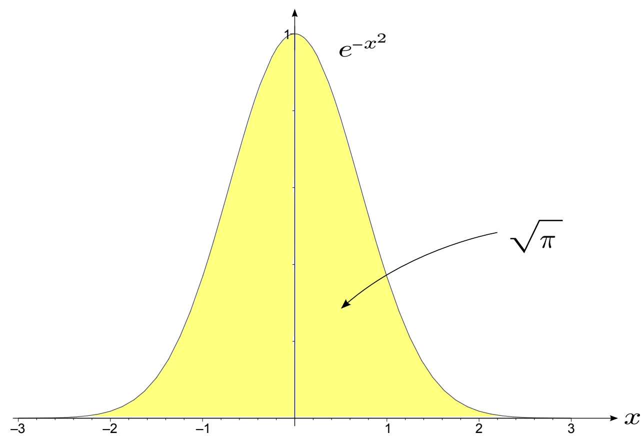


Figura 63. Integrale improprio della "Campana di Gauss".

In questo caso non soltanto uno degli estremi è "critico" (nel senso che è infinito oppure un'asintoto verticale della funzione integranda) ma entrambi. In questi casi si spezza l'integrale nella somma di due integrali scegliendo un punto c tra gli estremi. Nel caso in questione per simmetria conviene scegliere il punto $c = 0$ e quindi definiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx := \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Visto che $f(x) = e^{-x^2}$ è una funzione pari, dalla proposizione su pagina 175 segue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

e quindi l'integrale converge su $(-\infty, +\infty)$ se e solo se converge su $[0, +\infty)$. A questo punto ci serve una funzione maggiorante per la quale l'integrale improprio converge. Poiché

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{0}^{1} e^{-x^2}\,dx + \int_{1}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx,$$

dove il primo integrale è un'integrale definito e quindi esiste finito, basta che tale funzione sia maggiorante soltanto per $x \geq 1$. Allora, per $x \geq 1$ vale

$$|f(x)| = e^{-x^2} \leq 2x \cdot e^{-x^2} =: g(x)$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{c} 2x \cdot e^{-x^2}\,dx &= -\int_{1}^{c} -2x \cdot e^{-x^2}\,dx \\
&= -e^{-x^2}\Big|_{1}^{c} \\
&= e^{-1} - e^{-c^2} \to e^{-1} \qquad \text{per } c \to +\infty.
\end{aligned}$$

Quindi $\int_{1}^{+\infty} g(x)\,dx$ converge e per il criterio del confronto converge anche $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ e di conseguenza anche $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

<u>Osservazione</u>. In seguito (cfr. pagina 257) dimostreremo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

- Verifichiamo che $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$ converge.

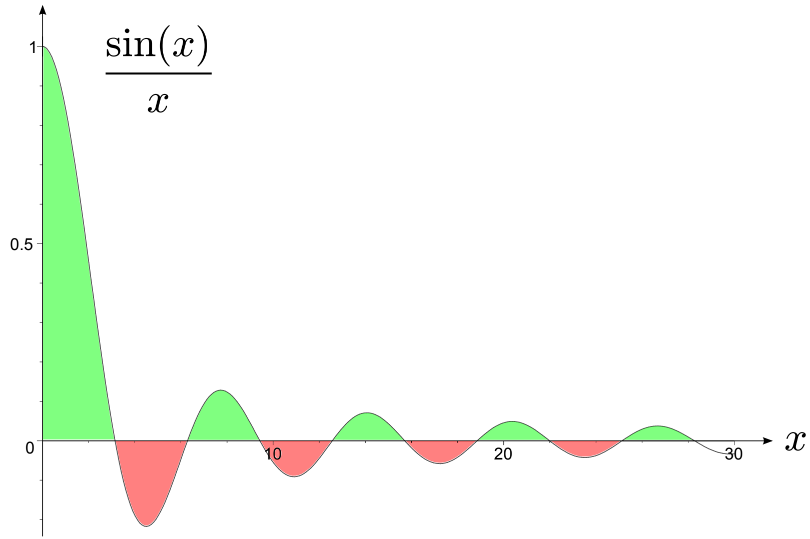


FIGURA 64. Integrale improprio convergente.

Visto che $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ solo l'estremo $b = +\infty$ è "critico". Quindi l'integrale converge su $[0, +\infty)$ se e solo se converge su $[1, +\infty)$. Integrando per parti risulta

$$\int_1^c \underbrace{\frac{1}{x}}_{f} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g'}\, dx = \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)} \cdot \underbrace{\big(-\cos(x)\big)}_{g(x)}\Big|_1^c - \int_1^c \underbrace{\frac{-1}{x^2}}_{f'} \cdot \underbrace{\big(-\cos(x)\big)}_{g}\, dx$$

$$= \underbrace{\cos(1) - \frac{\cos(c)}{c}}_{\to\cos(1) \text{ per } c\to+\infty} - \int_1^c \frac{\cos(x)}{x^2}\, dx.$$

Quindi l'integrale converge se e solo se

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}\, dx$$

converge. Ora è semplice trovare un maggiorante per il quale converge l'integrale improprio. Infatti

$$\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2} \qquad \text{e} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \quad \text{converge}$$

(vedi pagina 206). Quindi anche l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$$

converge. Notiamo che qui era necessario

- integrare una volta per parti (aumentando così il grado del denominatore da x a x^2) visto che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = +\infty \quad \text{diverge}$$

- considerare l'integrale su $[1, +\infty)$ e non su $[0, +\infty)$ visto che

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = +\infty \quad \text{diverge.}$$

Concludiamo questo capitolo con alcune osservazioni su

Integrali Impropri e Serie. Spesso gli elementi di una serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ sono dati dai valori di una funzione $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ in $x = k$, cioè

$$a_k = f(k), \quad k = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

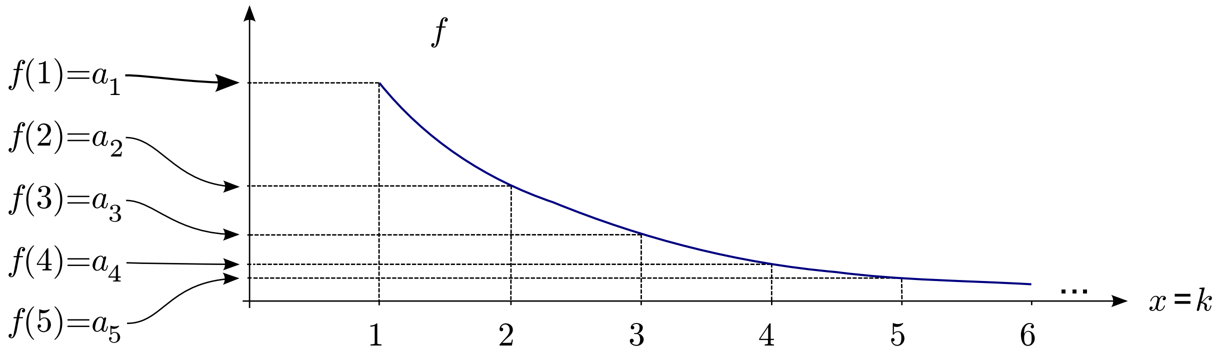


FIGURA 65. Integrali impropri e serie: $f(k) = a_k$.

Quindi si può chiedere che legame c'è tra

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \qquad \text{e} \qquad \int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Interpretando la somma della serie come area dimostreremo il seguente

<u>TEOREMA</u> 6.10 (*Criterio Integrale per le Serie*). *Se $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ è decrescente e $a_k := f(k)$, allora*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad \textit{converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \quad \textit{converge.}$$

Dimostrazione. "$\Rightarrow$": Se la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge, allora dal seguente grafico segue

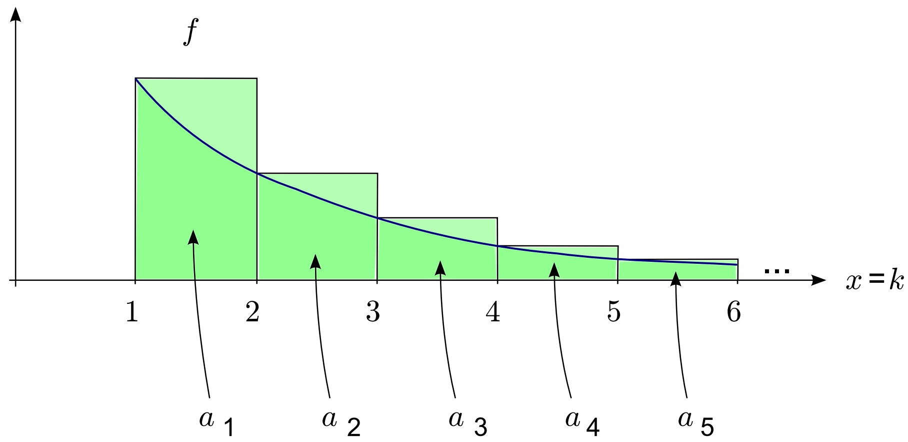


Figura 66. La serie maggiora l'integrale.

$$F(c) := \int_1^c f(s)\,ds \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \qquad \text{per ogni } c \geq 1.$$

Inoltre, F è crescente e quindi per il teorema su pagina 82 converge

$$\lim_{c\to+\infty} F(c) = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

"$\Leftarrow$": Se invece l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, allora dal grafico segue

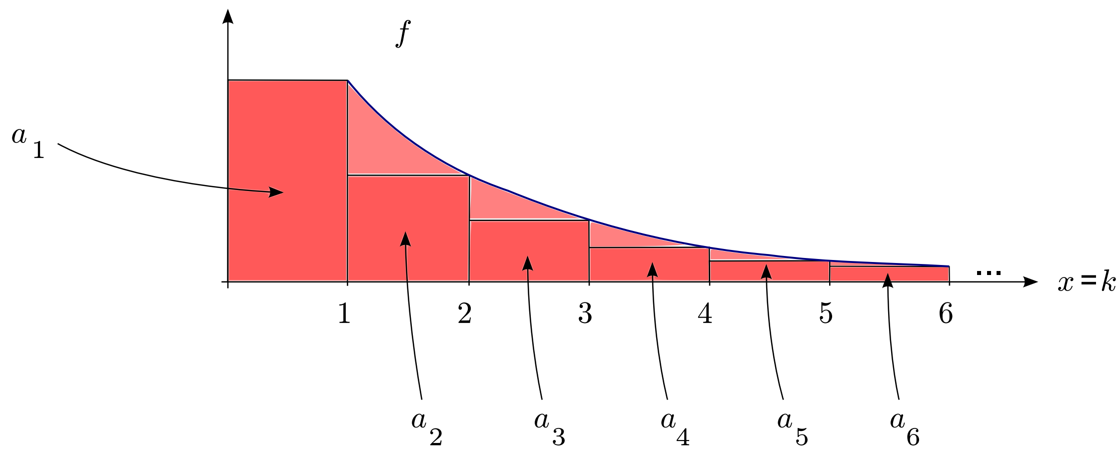


Figura 67. L'integrale maggiora la serie.

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \le a_1 + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \qquad \text{per ogni } n = 1, 2, 3\ldots$$

Inoltre la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ è a termini positivi e quindi convergente per il teorema su pagina 44. $\square$

<u>Esempio</u>. Per $\alpha \in \mathbb{R}$ consideriamo la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, cfr. pagina 50. Allora per $\alpha \leq 0$ la successione $\left(\frac{1}{k^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ non è infinitesima e quindi la serie diverge a $+\infty$. Se invece $\alpha > 0$, allora la funzione $f(x) = x^{-\alpha}$, $x \geq 1$, e derivabile con

$$f'(x) = -\alpha \cdot x^{-\alpha-1} < 0 \quad \text{per ogni } x \geq 1.$$

Quindi f è decrescente e dal Criterio Integrale per le Serie segue che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx \quad \text{converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha > 1.$$

dove la seconda equivalenza è stata dimostrata su pagina 206 con $r = -\alpha$.

Quindi possiamo definire la funzione

$$\zeta : (1, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad \zeta(s) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$$

che si chiama la *funzione zeta di Riemann* ed è legato all'ipotesi di Riemann, uno dei problemi aperti più importanti della matematica.

CAPITOLO 7

Funzioni Reali di due Variabili: Limiti e Continuità

In questo capitolo consideriamo funzioni reali di due variabili reali, cioè funzioni definite in un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ a valori reali. Perciò introduciamo per prima

Lo Spazio $\mathbb{R}^2$

Definiamo l'insieme $\mathbb{R}^2 := \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$. Gli elementi (x,y) si chiamano *vettori* (o punti) in $\mathbb{R}^2$. Con le operazioni

- $(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$ (*somma tra vettori*),
- $\alpha \cdot (x,y) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y)$ per $\alpha \in \mathbb{R}$ (*moltiplicazione di un vettore per uno* "scalare" *reale*)

$\mathbb{R}^2$ diventa uno *"spazio vettoriale"* (cfr. il corso di Geometria o Matematica Discreta).

Per misurare la lunghezza di un vettore in $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (oppure la distanza del punto (x,y) dall'origine $(0,0)$ nel piano xy), definiamo (usando il Teorema di Pitagora) la sua *norma*

$$\big\|(x,y)\big\| := \sqrt{x^2+y^2}.$$

La norma soddisfa le seguenti regole.

PROPOSIZIONE 7.1.
- *$\|(x,y)\| \geq 0$ e $\|(x,y)\| = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$,*
- *$\|\alpha \cdot (x,y)\| = |\alpha| \cdot \|(x,y)\|$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$,*
- *$\|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\| \leq \|(x_1,y_1)\| + \|(x_2,y_2)\|$ (*disuguaglianza triangolare*, cfr. Figura 68).*

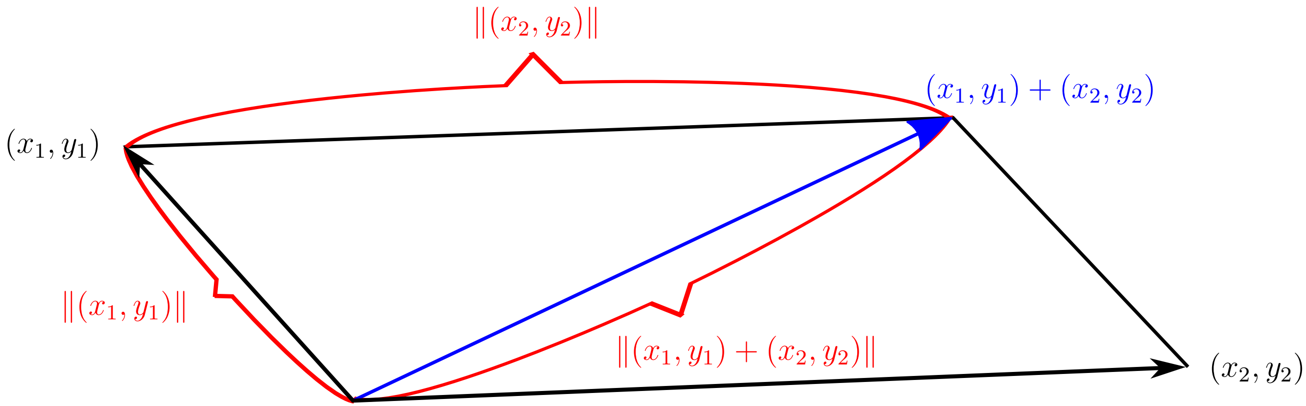


FIGURA 68. Disuguaglianza triangolare.

<u>OSSERVAZIONI</u>. • La norma permette (come il modulo in $\mathbb{R}$, cfr. pagina 10) di misurare distanze tra punti in $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\big\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\big\| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = \text{distanza tra } (x_1,y_1) \text{ e } (x_2,y_2)}$$

Infine introduciamo il *prodotto scalare* tra vettori (x_1,y_1) e (x_2,y_2) con risultato un numero reale come

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) := x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 \in \mathbb{R},$$

Si noti che $(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) = (x_2,y_2)\cdot(x_1,y_1)$ e $(x,y)\cdot(x,y) = \|(x,y)\|^2$ per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Funzioni Reali di due Variabili Reali: Prime Proprietà

Definizione 7.2. Una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to Y \subseteq \mathbb{R}$ si dice *funzione reale di due variabili reali*.

Esempi.
- $V : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $V(R, I) := R \cdot I$ (legge di Ohm).
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + xy + xy^3$ (polinomio nelle variabili x y di grado 4).
- $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. In questo caso il dominio di f è l'insieme $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, cioè il cerchio di centro l'origine e raggio 1.

Problema. Come si può visualizzare una funzione reale $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, cioè di due variabili?

In pratica ci sono *2 modi*:

1. Attraverso il *grafico* di f definito come
$$G(f) := \Big\{ \big(x, y, f(x, y)\big) : (x, y) \in X \Big\} \in \mathbb{R}^3.$$
Quindi il grafico di una funzione di due variabili è un sottoinsieme dello spazio tridimensionale.

   Esempi. Grafici di funzioni di due variabili in $\mathbb{R}^3$, cfr. Figura 69.

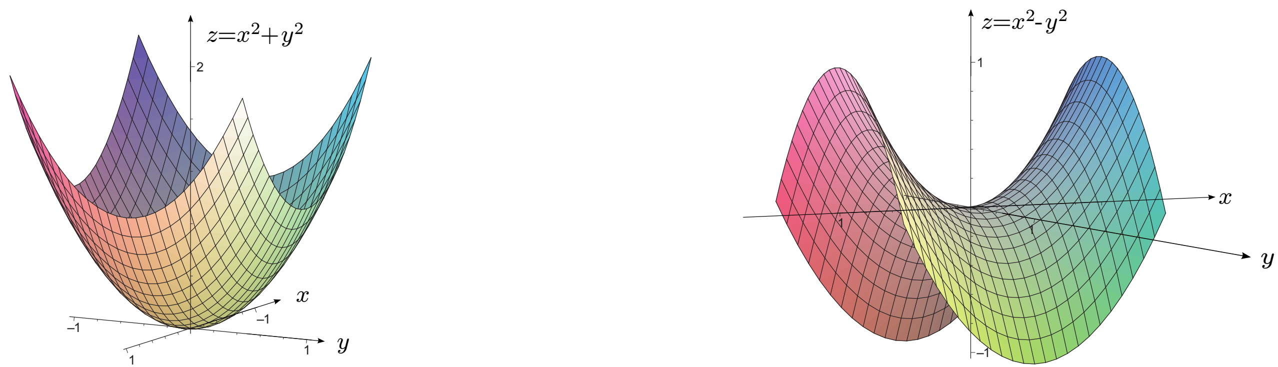


Figura 69. Grafici di $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ e $f_2(x, y) = x^2 - y^2$ per $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$.

2. Attraverso le curve (o linee) di livello: Data $c \in \mathbb{R}$, si definisce *curva di livello c* di f l'insieme

$$\Gamma_c := \Big\{(x, y) \in X : f(x, y) = c\Big\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Esempi concreti sono le isobare in una mappa meteorologica oppure le curve di livello in una mappa topografica. Si nota che per determinati valori di c le curve di livello corrispondenti possono essere l'insieme vuoto.

<u>Esempi</u>. Curve di livello in $\mathbb{R}^2$, cfr. Figura 70.

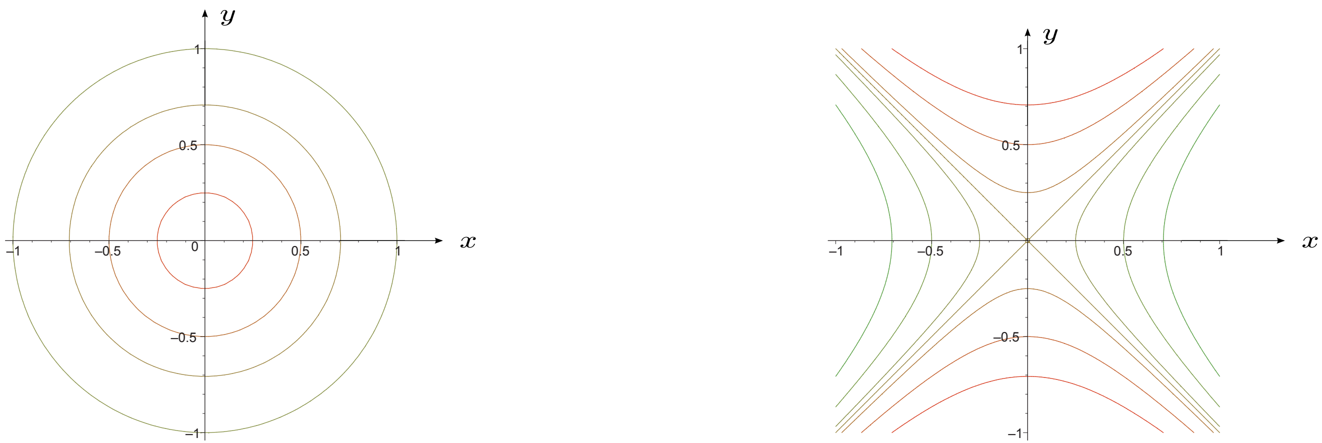


Figura 70. Linee di livello Γ_c delle funzioni $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ per c =0, 1/16, 1/4, 1/2, 1 e $f_2(x, y) = x^2 - y^2$ per c =-1, -1/2, -1/4, 0, 1/4, 1/2, 1 con $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Limiti di Funzioni Reali di due Variabili Reali

Con l'aiuto della norma il concetto di limite si generalizza molto facilmente da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$.

Definizione 7.3 (*Limiti per vettori*). Diremo che la successione di vettori $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ converge a $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ se $\|(x_n, y_n) - (x_0, y_0)\| \to 0$ per $n \to +\infty$. In questo caso scriviamo

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0)} \qquad \text{oppure} \qquad \boxed{(x_n, y_n) \to (x_0, y_0) \text{ per } n \to +\infty}.$$

Osservazione. Vale che

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0) \text{ in } \mathbb{R}^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0 & \text{e} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y_0 & \text{in } \mathbb{R} \end{cases}$$

Cioè una successione di vettori converge se e solo se converge in ogni componente.

Con la definizione precedente possiamo estendere facilmente la definizione di limite per le funzioni da una a due variabili.

Definizione 7.4 (*Limiti per Funzioni*). Sia $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione reale di due variabili reali. Allora diremo che

$f(x, y)$ tende a $l \in \mathbb{R}$ per (x, y) tendente a (x_0, y_0)

se per ogni successione $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus \{(x_0, y_0)\}$ con $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$ segue che $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = l$. In questo caso scriveremo

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l} \qquad \text{oppure} \qquad \boxed{f(x, y) \to l \text{ per } (x, y) \to (x_0, y_0)}.$$

Osservazioni.

- La definizione di limite per funzioni di due variabili può essere data solo per $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, cioè al finito, poiché, a differenza di $\mathbb{R}$, non essendoci un ordinamento naturale in $\mathbb{R}^2$ non si può definire una direzione privilegiata secondo cui raggiungere ∞ in $\mathbb{R}^2$

- Il concetto di limite per le funzioni come definito sopra si basa su quello del limite per le successioni. Come nel caso di una variabile esiste anche un'altra possibilità di introdurre limiti per le funzioni di due variabili che non fa riferimento alle successioni:

  Se $l \in \mathbb{R}$, allora

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tale che } \big|f(x,y) - l\big| < \varepsilon\ \forall\,(x,y) \in X \text{ con } 0 < \big\|(x,y) - (x_0,y_0)\big\| < \delta$$

- La definizione di limite in $\mathbb{R}^2$ conserva molte delle proprietà di quelle in $\mathbb{R}$. In particolare
  (i) il limite, se esiste, è unico;
  (ii) valgono le regole per il calcolo dei limiti di somme, differenze, prodotti e quozienti.

Calcolo dei Limiti di Funzioni di due Variabili

Mentre, come abbiamo visto, la definizione di limite si generalizza facilmente da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$, il calcolo dei limiti in due variabili presenta delle difficoltà aggiuntive. Ciò è dovuto al fatto che, rispetto al caso di $\mathbb{R}$, possiamo avvicinarci al punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ in cui vogliamo calcolare il limite da varie direzioni e modi molto diversi. Per semplicità ci restringeremo nel seguente al caso del punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$, cioè l'origine.

Una Condizione per la *non* Esistenza del Limite. Il fatto che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$$

vuol dire che *ogni* tipo di avvicinamento di (x, y) al punto $(0, 0)$ (p.e. su rette, parabole oppure spirali passando per l'origine, cfr. figura Figura 71) risulta nella convergenza di $f(x, y)$ allo *stesso* valore l.

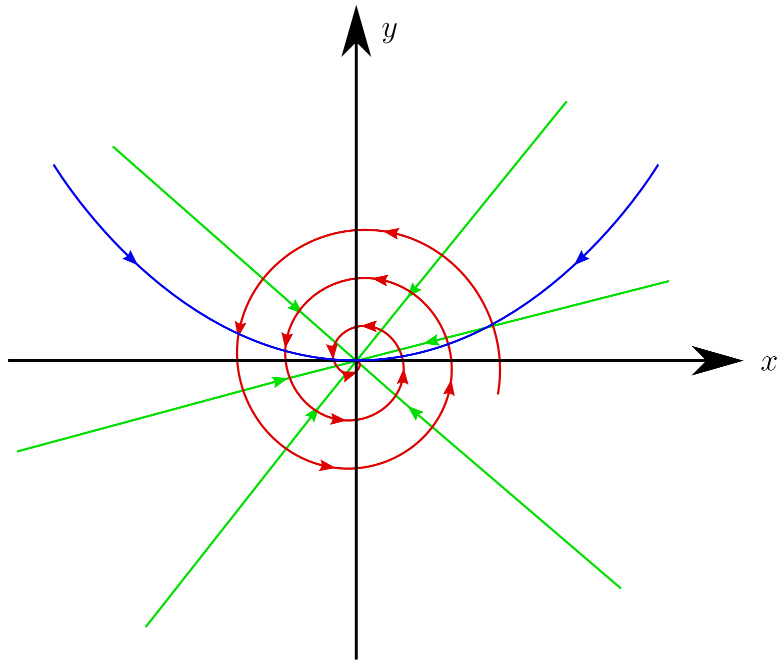


FIGURA 71. Diversi avvicinamenti lungo curve passando per l'origine in $\mathbb{R}^2$.

In altre parole,

se esistono due avvicinamenti a $(0,0)$ con corrispondenti valori limite diversi, allora

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \textit{non} \text{ esiste.}$$

In particolare, considerando avvicinamenti su rette che passano per l'origine, cioè del tipo $y = mx$ al variare della pendenza $m \in \mathbb{R}$, otteniamo il seguente risultato per la *non* esistenza del limite.

<u>Proposizione</u> 7.5. *Se* $\lim_{x\to 0} f(x, mx)$ *esiste ma dipende da* $m \in \mathbb{R}$ *allora il limite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) \quad \text{non} \ \textit{esiste.}$$

<u>Esempio</u>. Consideriamo il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Ponendo $y = mx$ per $m \in \mathbb{R}$ otteniamo che

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2} \quad \text{dipende da } m.$$

Risulta quindi che il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ *non* esiste.

<u>Osservazione</u>. Non vale il contrario della proposizione precedente, cioe se $\lim_{x\to 0} f(x, mx)$ esiste ed è indipendente da $m \in \mathbb{R}$ ciò *non* implica che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ esiste. Comunque se

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = l$$

indipendemente da $m \in \mathbb{R}$, allora l è l'unico candidato per il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

<u>Esempio</u>. Consideriamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}.$$

Si ha che

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{x^2+m^2} = 0 \qquad \text{per ogni } m \in \mathbb{R}.$$

Quindi tutti i limiti al variare di $m \in \mathbb{R}$ esistono e sono uguali. Pertanto se il limite l di f esiste, deve essere uguale a $l = 0$.

Consideriamo ora la parabola $y = x^2$. Tale curva passa per il punto $(0,0)$, quindi fornisce un altro modo per avvicinarsi ad esso. Ponendo $y = x^2$ e calcolando il limite per $x \to 0$, cioè muovendosi verso il punto $(0,0)$ sulla parabola, allora risulta

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4+x^4} = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{x\to 0} f(x,x) \text{ !!}$$

Quindi abbiamo trovato due curve passanti per il punto $(0,0)$, muovendoci lungo le quali troviamo diversi valori del limite. Possiamo pertanto concludere che il

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

non esiste.

<u>Osservazione</u>. Le scelta della curva $y = x^2$ è stata fatta per ristabilire il rapporto omogeneo fra le variabili x e y. Infatti sia al numeratore che al denominatore il rapporto fra il grado della x e della y è 2 a 1

Una Tecnica per dimostrare l'Esistenza del Limite. Fin qui abbiamo visto come si può dimostrare la *non* esistenza di un limite. Adesso vediamo come si può dimostrare l'esistenza di un limite in $\mathbb{R}^2$. Perciò servono dapprima le

Coordinate polari: Ricordiamo (cfr. corso di Geometria) che un punto P del piano, oltre che con le sue coordinate cartesiane (x, y), può essere rappresentato con le *coordinate polari* $(\rho, \vartheta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi)$, cfr. Figura 72.

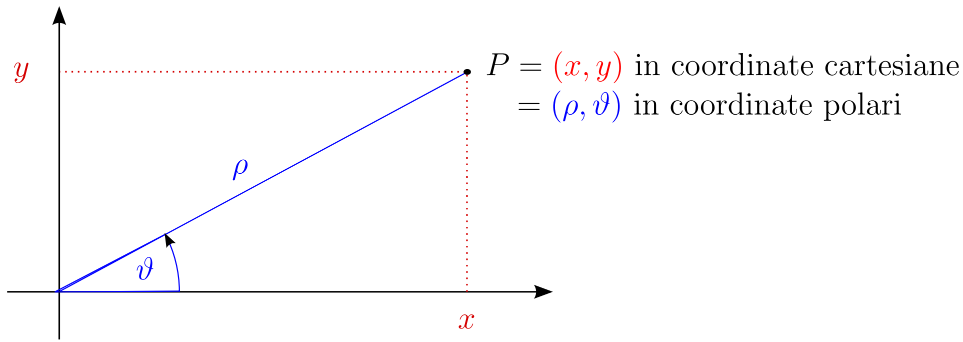


FIGURA 72. Coordinate polari.

Le formule di passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari sono date da

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\vartheta) \\ y = \rho\sin(\vartheta) \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\vartheta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Si noti che la relazione $\tan\vartheta = \frac{y}{x}$ non può essere risolto per ϑ in quanto la funzione tan non è invertibile in $[0, 2\pi) \ni \vartheta$. Si noti che

$$\boxed{(x, y) \to (0, 0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \rho \to 0^+}.$$

Quindi passando dalle coordinate cartesiane alle coordinate polari il limite da *due* variabili si trasforma in un limite di *una* variabile! Sfruttando questa idea si ottiene la seguente

<u>PROPOSIZIONE</u> 7.6. *Se esiste $l \in \mathbb{R}$ e una funzione $g(\rho)$ (indipendente da ϑ!) tale che*

$$\left| f\big(\overbrace{\rho\cos(\vartheta)}^{=x}, \overbrace{\rho\sin(\vartheta)}^{=y}\big) - l \right| \leq g(\rho)$$

con $g(\rho) \to 0$ per $\rho \to 0^+$, allora

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l.$$

Consideriamo alcuni esempi.

<u>ESEMPIO</u>. Calcola, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} =: l.$$

Allora $\lim_{x\to 0} f(x,mx) = 0$ per ogni $m \in \mathbb{R}$, quindi se il limite esiste deve essere $l = 0$. Per studiare la convergenza passiamo alle coordinate polari, cioè scriviamo

$$f(x,y) = f\big(\rho\cos(\vartheta), \rho\sin(\vartheta)\big) = \frac{2\rho^2\cos^2(\vartheta)\cdot\rho\sin(\vartheta)}{\rho^2} = 2\rho\cos^2(\vartheta)\sin(\vartheta).$$

Visto che $|\sin(\vartheta)|, |\cos(\vartheta)| \leq 1$, segue

$$\begin{aligned}\left| f\big(\rho\cos(\vartheta), \rho\sin(\vartheta)\big) - l \right| &= \left|2\rho\cos^2(\vartheta)\sin(\vartheta) - 0\right| = 2\rho\cdot\left|\cos^2(\vartheta)\sin(\vartheta)\right| \\ &\leq 2\rho =: g(\rho) \to 0 \qquad \text{per } \rho \to 0^+.\end{aligned}$$

Quindi, per il risultato precedente, segue che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

<u>Esempio</u>. Studiare la convergenza di

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)+x^2+y^2}{x^2+y^2} =: l.$$

È facile verificare che $\lim\limits_{x\to 0} f(x,mx) = 1$ per ogni $m \in \mathbb{R}$, quindi se il limite l esiste deve essere $l=1$.

Si ha $f(\rho\cos(\vartheta),\rho\sin(\vartheta)) = \frac{\sin(\rho^3\cos^2(\vartheta)\sin(\vartheta))+\rho^2}{\rho^2}$ e quindi

$$\left|f\big(\rho\cos(\vartheta),\rho\sin(\vartheta)\big) - l\right| = \left|\frac{\sin(\rho^3\cos^2(\vartheta)\sin(\vartheta))}{\rho^2}\right|$$

Se procediamo utilizzando come prima la relazione $|\sin(t)| \leq 1$ per $t \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$\left|f\big(\rho\cos(\vartheta),\rho\sin(\vartheta)\big) - l\right| = \left|\frac{\overbrace{\sin(\rho^3\cos^2(\vartheta)\sin(\vartheta))}^{\leq 1}}{\rho^2}\right| \leq \frac{1}{\rho^2} =: g(\rho) \not\to 0 \qquad \text{per } \rho \to 0^+.$$

Quindi non possiamo concludere l'esistenza del limite. Tuttavia possiamo ricordare che $|\sin(t)| \leq |t|$ per $t \in \mathbb{R}$, quindi per $t = \rho^3\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)$,

$$\begin{aligned}\left|f\big(\rho\cos(\vartheta),\rho\sin(\vartheta)\big) - l\right| &\leq \frac{|\rho^3\cos^2(\vartheta)\sin(\vartheta)|}{\rho^2} \leq \frac{\rho^3\cdot\overbrace{|\cos^2(\vartheta)\sin(\vartheta)|}^{\leq 1}}{\rho^2} \\ &\leq \rho =: g(\rho) \to 0 \qquad \text{per } \rho \to 0^+\end{aligned}$$

che dimostra che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)+x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$.

Continuità di Funzioni di due Variabili

Anche la definizione di continuità si generalizza facilmente da una a due variabili.

Definizione 7.7 (Continuità). Una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice

- *continua in* $(x_0, y_0) \in X$ se per ogni successione $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ con $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ segue $f(x_n, y_n) \to f(x_0, y_0)$ per $n \to +\infty$;
- *continua*, se è continua in ogni $x \in X$.
- Denotiamo con
$$\mathrm{C}(X) := \big\{f : X \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ è continua}\big\}$$
l'insieme delle funzioni continue su $X \subseteq \mathbb{R}^2$.

Valgono molte delle osservazioni fatte nel caso di una variabile.

Osservazioni. • Come in una variabile, la continuità si può anche definire senza fare riferimento alle successioni:

f è continua in $(x_0, y_0) \iff$ per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$ per ogni $(x, y) \in X$ con $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$.

- f è continua in $(x_0, y_0) \iff \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.
- Somme, differenze, prodotti, rapporti e composizione di funzioni continue sono continue.

Esempio. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = \sin(xe^y + x^2y)$ risulta continua in quanto composizione di funzioni continue.

CAPITOLO 8

Calcolo Differenziale per Funzioni Reali di due Variabili

In questo capitolo estenderemo il concetto di derivazione alle funzioni reali di due variabili. Come vedremo in seguito ciò *non* è cosi semplice come generalizzare il concetto di limite oppure di continuità da una a due variabili.

Concetti di Derivabilità di Funzioni di due Variabili

Mentre per le funzioni reali di una variabile esiste soltanto un concetto di derivabilità scopriremo in seguito che per funzioni di due variabili la situazione è più complicata.

Derivate Parziali e Derivabilità. La prima generalizzazione del concetto di derivata si basa (come in una variabile) sul limite di un rapporto incrementale.

Definizione 8.1. Siano $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in X$ un "punto interno" di X. Se converge

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$$

allora f si dice *derivabile parzialmente rispetto x* in (x_0, y_0) con *derivata parziale* $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) =: f_x(x_0, y_0) =: D_x f(x_0, y_0)$. Similmente, se converge

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$$

allora f si dice *derivabile parzialmente rispetto y* in (x_0, y_0) con *derivata parziale* $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) =: f_y(x_0, y_0) =: D_y f(x_0, y_0)$.

<u>Osservazione</u>. La derivata parziale rispetto x corrisponde a fare la derivata ordinaria (cioè rispetto a una variabile) della funzione $g(x) := f(x, y_0)$ che è la restrizione di f alla retta $y = y_0$. Similmente, la derivata parziale rispetto y corrisponde a fare la derivata ordinaria della funzione $h(y) := f(x_0, y)$ che è la restrizione di f alla retta $x = x_0$, cfr. Figura 73.

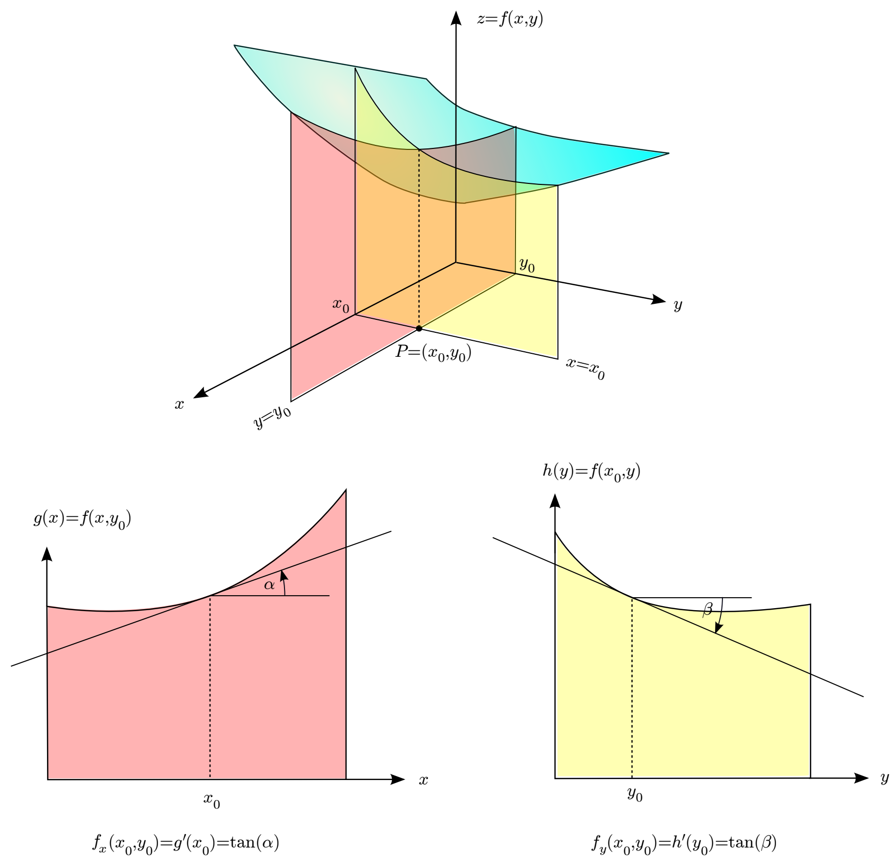


Figura 73. Derivate parziali.

Quindi le derivate parziali $f_x(x_0,y_0)$ e $f_y(x_0,y_0)$ forniscono informazioni sulla monotonia di f lungo le rette $y=y_0$ e $x=x_0$, rispettivamente, nell'intorno del punto (x_0,y_0).

<u>Osservazione</u>. Per calcolare le derivate parziali di una funzione rispetto ad x (oppure y) è sufficiente, se le funzioni che la compongono sono derivabili, derivare in maniera ordinaria rispetto ad x (rispettivamente y), considerando y (rispettivamente x) come costante.

<u>Esempi</u>.

- Se $f(x,y)=2x^3y-y^2+3xy$, allora $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=6x^2y+3y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2x^3-2y+3x$.
- Se $f(x,y)=e^{xy}+y^2$, allora $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\,e^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\,e^{xy}+2y$.

Se però le funzioni che intervengono non sono derivabili, bisogna passare attraverso la definizione delle derivate parziale.

<u>Esempio</u>. Sia $f(x,y)=|x|\cdot y$, allora in un punto del tipo $(0,y)$ non possiamo derivare direttamente rispetto ad x, ma dobbiamo usare la definizione

$$f_x(0,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,y)-f(0,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|\cdot y}{h}=\begin{cases}\nexists & \text{se } y\neq 0,\\ 0 & \text{se } y=0.\end{cases}$$

<u>Problema</u>. Chè cos'è la derivata di una funzione reale di due variabili?

Questo problema si risolve raggruppando le derivate parziali in un vettore.

<u>Definizione</u> 8.2. Siano $f:X\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ e $(x_0,y_0)\in X$. Se f è derivabile parzialmente rispetto ad x e y in (x_0,y_0), allora f si dice *derivabile* (parzialmente) in (x_0,y_0). In tal caso si può definire il vettore delle derivate parziali

$$\boxed{Df(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\in\mathbb{R}^2}$$

Tale vettore si chiama *gradiente* di f in (x_0,y_0) e può essere considerato come derivata (prima) di una funzione reale di due variabili. Per il gradiente si usano anche le notazioni $Df(x,y)=:\operatorname{grad}f(x,y)=:\nabla f(x,y)$ (si legge “nabla di f”).

<u>Esempio</u>. Se $f(x,y)=2x^3y-y^2+3xy$, allora $Df(x,y)=(6x^2y+3y,2x^3-2y+3x)\in\mathbb{R}^2$. In particolare, $Df(1,1)=(6+3,2-2+3)=(9,3)$.

<u>OSSERVAZIONE</u>. Avendo dato una definizione di derivabilità per funzioni di due variabili è naturale chiedersi se essa gode delle stesse proprietà del caso unidimensionale dove, per esempio, la derivabilità implica la continuità. Il seguente esempio mostra che *non* è così!!

<u>ESEMPIO</u>. Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Abbiamo verificato (cfr. pagina 225) che $f(x,y)$ non ammette limite, e quindi non è continua, in $(0,0)$. Tuttavia in $(0,0)$ esiste la derivata parziale

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

e analogamente $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Quindi f è derivabile ma non continua in $(0,0)$.

Questa osservazione ci porta a concludere che la precedente definizione di derivabilità non è la corretta generalizzazione di quella unidimensionale.

D'altra parte la continuità non implica la derivabilità, poiché ad esempio la funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$ è continua, ma non è derivabile in $(0,0)$. Quindi nel caso di due variabili non esiste nessuna relazione tra continuità e derivabilità!

Per trovare la giusta generalizzazione del concetto di derivabilità dal caso unidimensionale a quello di due variabili ricordiamo che per una funzione reale $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$ di *una* variabile le seguenti affermazioni sono equivalenti, cfr. pagina 129.

(a) f è derivabile in x_0, cioè $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =: f'(x_0)$ converge.

(b) Esiste $A \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$.

Inoltre, in questo caso $A = f'(x_0)$

Cioè f è derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ se e solo se esiste una "buona" approssimazione lineare di $f(x)$ in x_0. Generalizzando la seconda affermazione a due variabili otterremo il concetto di

Differenziabilità. Abbiamo visto che sulla base della convergenza dei rapporti incrementali non si ottiene una proprietà soddisfacente in $\mathbb{R}^2$. Nella prossima definizione seguiamo invece il secondo approccio basato sull'approssimazione lineare.

Definizione 8.3. Sia $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in X$. Se esiste un vettore $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tale che

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(x_0,y_0) + A \bullet (x-x_0, y-y_0) + o\big(\|(x-x_0,y-y_0)\|\big)\\
&= f(x_0,y_0) + a\cdot(x-x_0) + b\cdot(y-y_0) + o\Big(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\Big) \quad \text{per } (x,y)\to(x_0,y_0)
\end{aligned}
$$

allora f si dice *differenziabile* in (x_0, y_0) (il simbolo "$\bullet$" denota in questo caso il prodotto scalare tra vettori in $\mathbb{R}^2$).

PROPOSIZIONE 8.4. *Sia $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile nel punto $(x_0, y_0) \in X$. Allora*

- *f è continua in (x_0, y_0);*
- *f è derivabile in (x_0, y_0) e $A = Df(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$. Quindi risulta*

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(x_0,y_0) + Df(x_0,y_0) \bullet (x-x_0, y-y_0) + o\big(\|(x-x_0,y-y_0)\|\big)\\
&= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + o\Big(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\Big) \quad \textit{per } (x,y)\to(x_0,y_0)
\end{aligned}
$$

OSSERVAZIONI.

- Ricordando la definizione di $o(\cdot)$ la condizione definendo la differenziabilità in (x_0, y_0) si può riscrivere come

$$
\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - \big(f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)\big)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0
$$

- Il termine lineare nella definizione di differenziabilità fornisce l'equazione

$$\boxed{z = p(x,y) := f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2}$$

  del *piano tangente* p al grafico di f nel punto (x_0,y_0), cioè del piano che localmente ha un unico punto di intersezione con il grafico di f, cfr. Figura 74.

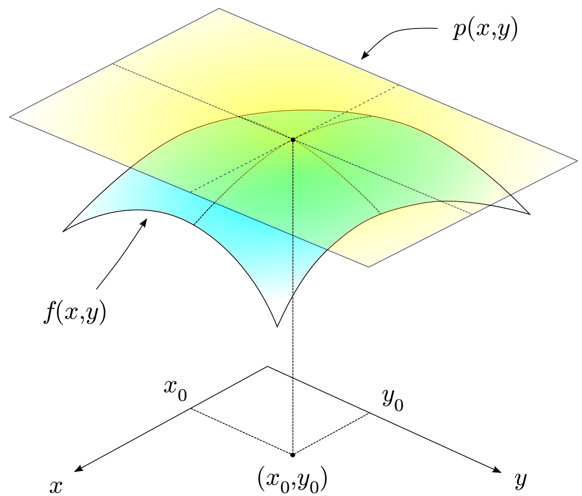


FIGURA 74. Piano tangente.

ESEMPIO. Se $f(x,y) = 2x^3y - y^2 + 3xy$ e $(x_0,y_0) = (1,1)$, allora da $f(1,1) = 4$ e $Df(1,1) = (9,3)$ segue

$$\begin{aligned} p(x,y) &= f(1,1) + f_x(1,1)\cdot(x-1) + f_y(1,1)\cdot(y-1) \\ &= 4 + 9\cdot(x-1) + 3\cdot(y-1). \end{aligned}$$

PROBLEMA. Come si può (facilmente) verificare la differenziabilità?

Questo problema si risolve con la seguente proposizione che fornisce una semplice condizione sufficiente per la differenziabilità.

<u>PROPOSIZIONE</u> 8.5. *Se $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è derivabile con continuità (cioè le derivate parziali f_x e f_y di f esistono e sono continue, brevemente si dice che $f \in \mathrm{C}^1$) allora f è differenziabile.*

<u>ESEMPIO</u>. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := \sin(x^2 \cdot e^y)$. Allora, visto che

$$f_x(x, y) = \cos(x^2 \cdot e^y) \cdot 2x \cdot e^y, \quad f_y(x, y) = \cos(x^2 \cdot e^y) \cdot x^2 \cdot e^y$$

sono (come prodotti e composizioni di funzioni continue) continue, f è differenziabile.

Riassumendo abbiamo per una funzione f di *due* variabili

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{f \in \mathrm{C}^1} & \substack{\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow} & \boxed{f \text{ differenziabile}} & \substack{\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow} & \boxed{f \text{ derivabile (parzialmente)}} \\
 & & \Downarrow \not\Uparrow & \not\nearrow \not\swarrow & \\
 & & \boxed{f \text{ continua}} & &
\end{array}$$

mentre per una funzione di *una* variabile la derivabilità e la differenziabilità sono equivalenti.

Derivate Direzionali. Concludiamo le varie definizioni di derivabilità con quella di derivata direzionale.

<u>Definizione</u> 8.6. Sia $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $P_0 = (x_0, y_0) \in X$ e $v = (v_0, v_1) \in \mathbb{R}^2$ un versore, cioè $\|v\| = \sqrt{v_0^2 + v_1^2} = 1$. Se converge

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(P_0 + h \cdot v) - f(P_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv_0, y_0 + hv_1) - f(x_0, y_0)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$$

allora f si dice *derivabile rispetto la direzione v* in (x_0, y_0) con *derivata direzionale* $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$. Altre notazioni: $f_v(x_0, y_0) = D_v f(x_0, y_0)$.

<u>OSSERVAZIONI</u>.
- Usando le coordinate polari si vede che tutti i versori $v \in \mathbb{R}^2$ si possono rappresentare come $v = (\cos(\vartheta), \sin(\vartheta))$ per $\vartheta \in [0, 2\pi)$.
- La derivata direzionale in (x_0, y_0) rispetto $v \in \mathbb{R}^2$ corrisponde a fare la derivata ordinaria (cioè rispetto a una variabile) della funzione $F(t) = f(x_0 + tv_0, y_0 + tv_1)$, $t \in \mathbb{R}$, che è la restrizione di f alla retta $v_0 \cdot (y - y_0) = v_1(x - x_0)$. Quindi essa fornisce informazioni sulla crescenza/decrescenza di f lungo tale retta nell'intorno del punto (x_0, y_0), cioè nella direzione di v partendo da (x_0, y_0), cfr. Figura 75.

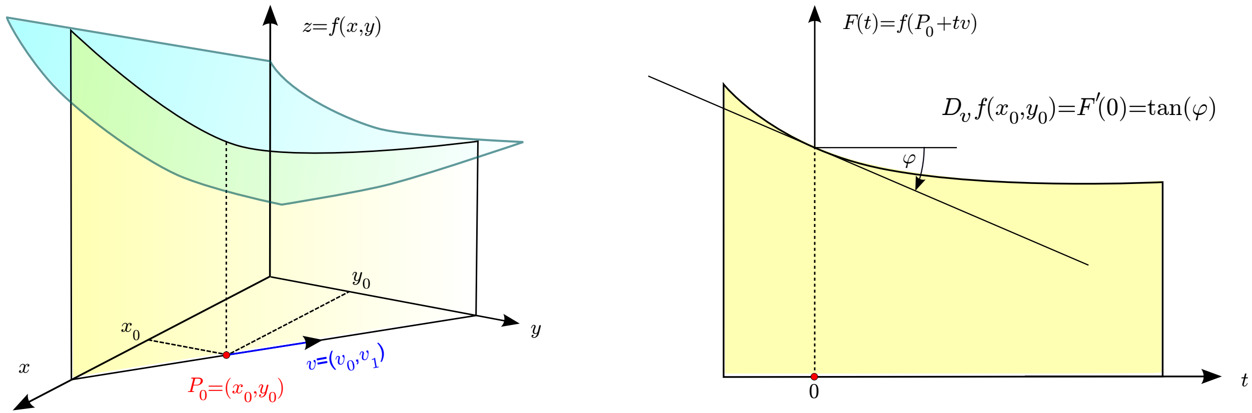


FIGURA 75. Derivata direzionale.

- Se $v = (1,0)$ allora $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ mentre per $v = (0,1)$ vale $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

PROBLEMA. Come si può (facilmente) calcolare una derivata direzionale?

Per risolvere il problema si usa il seguente importante teorema che lega gradiente e derivate direzionali. Oltre a fornire una semplice regola per il calcolo della derivata direzionale, esso implica anche due importanti proprietà geometriche del gradiente.

TEOREMA 8.7 (*Teorema del Gradiente*). *Sia $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in X$ e $v = (v_0, v_1) \in \mathbb{R}^2$ un versore. Se f è differenziabile in (x_0, y_0) allora*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = v \cdot Df(x_0, y_0) = v_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + v_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

dove "$\cdot$" indica il prodotto scalare tra vettori in $\mathbb{R}^2$.

OSSERVAZIONE. Dal teorema precedente segue che se f è differenziabile in (x_0, y_0), allora in (x_0, y_0) esistono le derivate direzionali secondo ogni direzione v.

<u>Esempio</u>. Sia $f(x,y) = 2x^3y - y^2 + 3xy$, $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $(x_0, y_0) = (1,1)$. Allora

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot Df(1,1) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot (9,3) = \tfrac{9}{\sqrt{2}} + \tfrac{3}{\sqrt{2}} = \tfrac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

Due Interpretazioni geometriche del Gradiente.

• Per il prodotto scalare tra due vettori $u, v \in \mathbb{R}^2$ vale

$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\varphi)$$

dove $\varphi \in [0, \pi]$ denota l'angolo tra u e v, cfr. Figura 76.

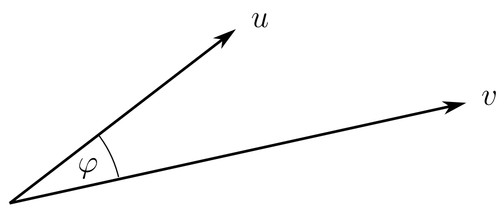


Figura 76. Prodotto scalare.

Quindi $u \cdot v$ diventa massima se $\varphi = 0$, cioè se u e v puntano nella stessa direzione. Inoltre, se $u = Df(x_0, y_0)$ il versore che punta nella stessa direzione è dato da

$$v = \frac{Df(x_0, y_0)}{\|Df(x_0, y_0)\|}\,.$$

Dal teorema del gradiente segue

$$\max_{\|v\|=1} \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \frac{Df(x_0, y_0)}{\|Df(x_0, y_0)\|} \cdot Df(x_0, y_0) = \|Df(x_0, x_0)\|.$$

Sapendo che la derivata direzionale misura il tasso di crescita di f nella direzione data, possiamo concludere che il gradiente

$$\boxed{Df(x_0, y_0) \textit{ punta nella direzione di massima crescita di } f \textit{ in } (x_0, y_0)}$$

Similmente si conclude che

$$\boxed{-Df(x_0, y_0) \textit{ punta nella direzione di massima decrescita di } f \textit{ in } (x_0, y_0)}$$

• Consideriamo ora la curva di livello $c := f(x_0, y_0)$ di f passando per il punto (x_0, y_0), cioè

$$\Gamma_c = \big\{(x, y) \in X : f(x, y) = f(x_0, y_0)\big\}.$$

Supponiamo che in (x_0, y_0) esiste il versore tangente τ a Γ_c, cfr. Figura 77.

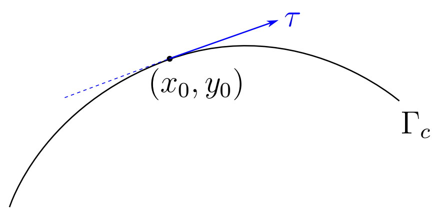


FIGURA 77. Versore tangente τ.

Poiché f è costante su Γ_c e, partendo in (x_0, y_0), muoversi lungo la direzione τ corrisponde, almeno in termini infinitesimali, a muovendosi lungo la curva Γ_c, si ha euristicamente

$$\frac{\partial f}{\partial \tau}(x_0, y_0) = 0.$$

Quindi dal Teorema del Gradiente segue

$$\frac{\partial f}{\partial \tau}(x_0, y_0) = \tau \cdot Df(x_0, y_0) = 0.$$

Ricordando che il prodotto scalare tra due vettori è nullo se e solo se i due vettori sono perpendicolari, concludiamo che il gradiente

$$\boxed{\textit{$Df(x_0, y_0)$ è ortogonale alla curva di livello di f passante per (x_0, y_0)}}$$

cfr. Figura 78.

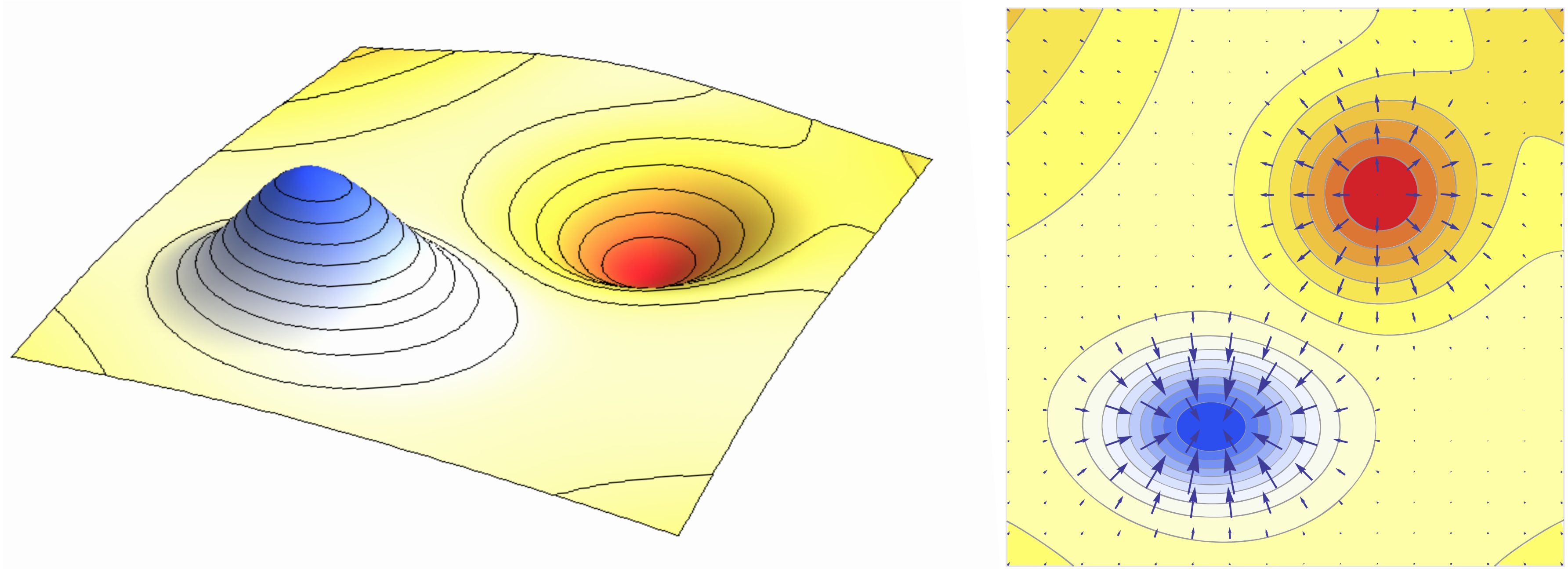


Figura 78. Grafico e linee di livello con gradiente.

CAPITOLO 9

Calcolo Integrale per Funzioni di due Variabili

Integrali Doppi: Definizione e prime Proprietà

Ci poniamo il seguente

<u>Problema</u>. Data una funzione $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ limitata, calcolare il volume V compreso tra il grafico di f (che in generale rappresenta una superfice nello spazio tridimensionale) e il piano xy.

Come nel caso degli integrali in una variabile, l'idea è di approssimare il volume V da sotto e da sopra, cioè per difetto (con somme inferiori) e per eccesso (con somme superiori). Però, in questo caso il dominio X non è più un semplice intervallo ma può avere una geometria molto più complicata.

Pertanto scegliamo prima un rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$ tale che $X \subseteq R$ e definiamo

$$(*) \qquad \bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{se } (x, y) \in X; \\ 0, & \text{se } (x, y) \in R \setminus X. \end{cases}$$

cioè estendiamo f ponendola 0 fuori da X. Allora, i volumi compresi tra i grafici di f e $\bar{f}$ da un lato e il piano xy dall'altro sono uguali. Poi creiamo una partizione di R in sotto-rettangoli a partire da partizioni di $[a, b]$ e $[c, d]$ e approssimiamo il volume compreso tra il grafico di $\bar{f}$ e ogni sotto-rettangolo. Più precisamente:

- Date due partizioni

$$P_x = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\} \quad \text{di } [a,b] \text{ e}$$
$$P_y = \{c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_m = d\} \quad \text{di } [c,d],$$

definiamo la partizione (cfr. Figura 79)

$$P_{xy} := P_x \times P_y \quad \text{di } R = [a,b] \times [c,d] \text{ nei rettangoli}$$
$$R_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \quad \text{per } i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.$$

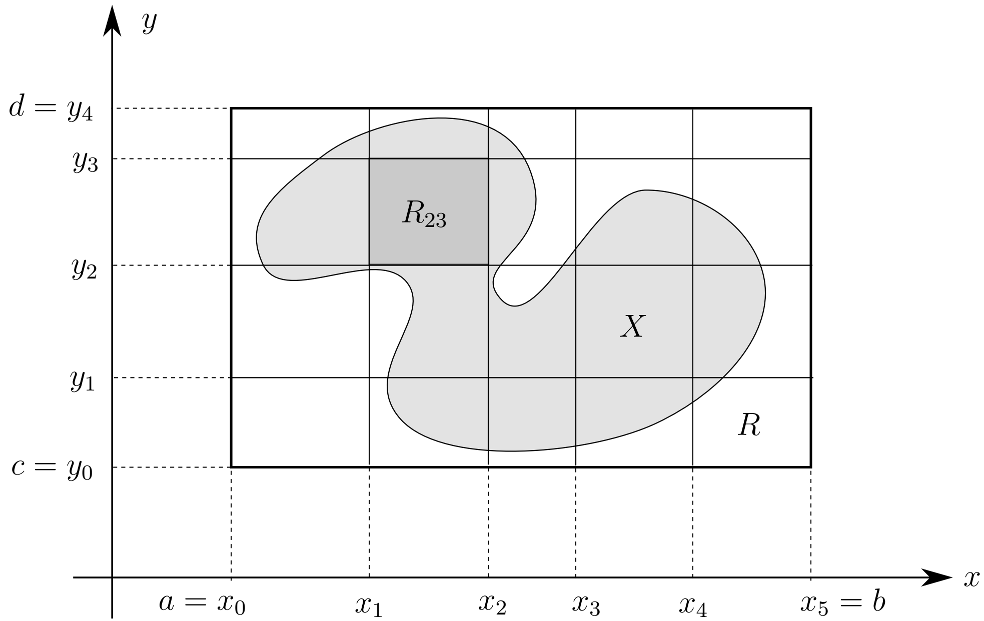


Figura 79. Partizione del rettangolo R contenente X ($n = 5$, $m = 4$).

- Per P_{xy} poniamo per $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} m_{ij} &:= \inf\big\{\bar{f}(x,y) : (x,y) \in R_{ij}\big\}, \\ M_{ij} &:= \sup\big\{\bar{f}(x,y) : (x,y) \in R_{ij}\big\}, \\ |R_{ij}| &:= (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) = \text{ area del rettangolo } R_{ij}, \end{aligned}$$

  e definiamo

$$\begin{aligned} s(\bar{f}, P_{xy}) &:= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij} \cdot |R_{ij}| =: \textit{ somma inferiore}, \\ S(\bar{f}, P_{xy}) &:= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij} \cdot |R_{ij}| =: \textit{ somma superiore}. \end{aligned}$$

Quindi per ogni partizione P_{xy} di R vale

$$s(\bar{f}, P_{xy}) \leq V \leq S(\bar{f}, P_{xy}),$$

cioè le somme inferiori sono sempre approssimazioni di V per difetto mentre le somme superiori danno sempre approssimazioni per eccesso. Perciò

- più *grande* è $s(\bar{f}, P_{xy})$ migliore è l'approssimazione (per difetto),
- più *piccolo* è $S(\bar{f}, P_{xy})$ migliore è l'approssimazione (per eccesso).

Se non c'è differenza tra la migliore approssimazione da sotto (cioè quella più grande) e quella migliore da sopra (cioè quella più piccola), allora il problema di determinare il volume V è (teoricamente) risolto e f si dice *integrabile*. Tutto ciò motiva la seguente

Definizione 9.1. Sia $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ limitata. Se per $\bar{f}$ definita in ($*$) vale

$$\sup\big\{s(\bar{f}, P_{xy}) : P_{xy} \text{ partizione di } R\big\} = \inf\big\{S(\bar{f}, P_{xy}) : P_{xy} \text{ partizione di } R\big\} =: I,$$

allora f si dice *integrabile* (secondo Riemann). In questo caso $V = I$ e si definisce *l'integrale doppio*

$$\iint_X f(x,y)\,dx\,dy := I$$

della funzione integranda f nel dominio dell'integrazione X.

Osservazioni.
- Si può dimostrare che la definizione precedente è indipendente dalla particolare scelta del rettangolo R contenente X.
- Il volume sotto il piano xy conta in maniera negativo.

Esempi.
- Se f è costante, cioè $f(x,y) = k$ per ogni $(x,y) \in X := [a,b] \times [c,d]$ è facile verificare che f è integrabile con integrale $\iint_X f(x,y)\,dx = k \cdot (b-a) \cdot (d-c)$.
- Per costruire un esempio di funzione *non* integrabile, si può estendere la funzione di Dirichlet (cfr. pagina 86) in $\mathbb{R}^2$.

  La funzione $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$,

  $$f(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è razionale,} \\ 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale} \end{cases}$$

  non è integrabile. Infatti, come nel caso dell'esempio unidimensionale, per ogni partizione P_x di $[a,b]$ si ha che ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ contiene sia punti razionali (in cui f ammette il valore 1) sia punti irrazionali (in cui f ammette il valore 0). Quindi segue $m_{ij} = 0$ e $M_{ij} = 1$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Così risulta per ogni partizione P_{xy}

  $$s(f, P_{xy}) = 0 \neq (b-a) \cdot (d-c) = S(f, P_{xy})$$

  per cui f non è integrabile.

Visto che integrando la funzione identicamente 1 sul dominio X si ottiene il volume $V = 1 \cdot \text{area}(X)$ del cilindro contenente i punti compresi tra il grafico di f e il piano xy, cfr. Figura 80, si ottiene la seguente definizione di misura di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$.

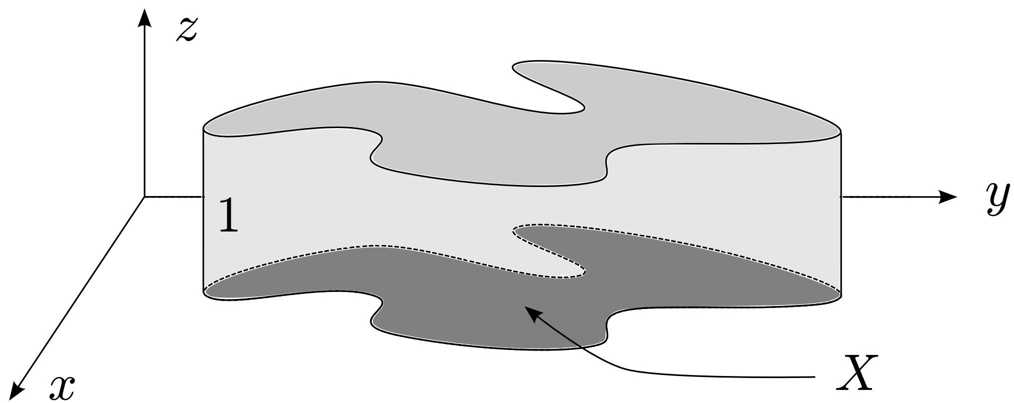


Figura 80. La misura di un'insieme.

Definizione 9.2. Se $X \subset \mathbb{R}^2$ è un insieme limitato tale che la funzione $\mathbb{1} : X \to \mathbb{R}$, $\mathbb{1}(x, y) = 1$ è integrabile, allora si dice che X è *misurabile* e si pone

$$\boxed{|X| := \iint_X 1\, dx\, dy \ = \textit{misura} \ (= \text{area}) \text{ di X}}$$

Proprietà dell'Integrale. Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ integrabili con $X \subset \mathbb{R}^2$ misurabile. Allora

- $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ è integrabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (cioè l'insieme delle funzioni integrabili con dominio X è uno spazio vettoriale) e

$$\iint_X \big(\alpha \cdot f(x,y) + \beta \cdot g(x,y)\big)\, dx\, dy = \alpha \cdot \iint_X f(x,y)\, dx\, dy + \beta \cdot \iint_X g(x,y)\, dx\, dy$$

  (cioè l'integrale è un'operazione *lineare*);

- se $f(x,y) \leq g(x,y)$ per ogni $(x,y) \in X$ allora

$$\iint_X f(x,y)\, dx\, dy \leq \iint_X g(x,y)\, dx\, dy$$

  (cioè l'integrale è *monotono*);

- anche $|f|$ è integrabile e

$$\left| \iint_X f(x,y)\, dx\, dy \right| \leq \iint_X |f(x,y)|\, dx\, dy$$

  (*disuguaglianza triangolare*);

- se $|X| = 0$, allora

$$\iint_X f(x,y)\, dx\, dy = 0$$

- se $X = X_1 \cup X_2$ e $|X_1 \cap X_2| = 0$, allora

$$\iint_X f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{X_1} f(x,y)\, dx\, dy + \iint_{X_2} f(x,y)\, dx\, dy$$

  (*additività* dell'integrale rispetto alla decomposizione di insiemi).

A questo punto, come nel caso di funzioni di una variabile, si pongono due

Problemi. (i) Quali funzioni $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sono integrabili?

(ii) Se f è integrabile, come si può calcolare $\iint_X f(x, y)\, dx\, dy$?

Visto che l'integrabilità di $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dipende sia dal dominio X sia dalla regolarità di f, la situazione non è così semplice come per funzioni di una variabile.

Teorema di Fubini–Tonelli

Nel caso f è continua su una regione limitata da intervalli e grafici di funzioni il Teorema di Fubini–Tonelli da una risposta a entrambi i problemi.

Definizione 9.3. Un insieme $X \subset \mathbb{R}^2$ limitato si dice

(i) *y-semplice* se esistono due funzioni continue $g_1,\ g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ tali che

$$\boxed{X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [a, b],\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\right\}}$$

(ii) *x-semplice* se esistono due funzioni continue $h_1,\ h_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ tali che

$$\boxed{X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \in [c, d],\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\right\}}$$

(iii) *semplice* se è y-semplice o x-semplice;

(iv) *regolare* se è l'unione di un numero finito di domini semplici.

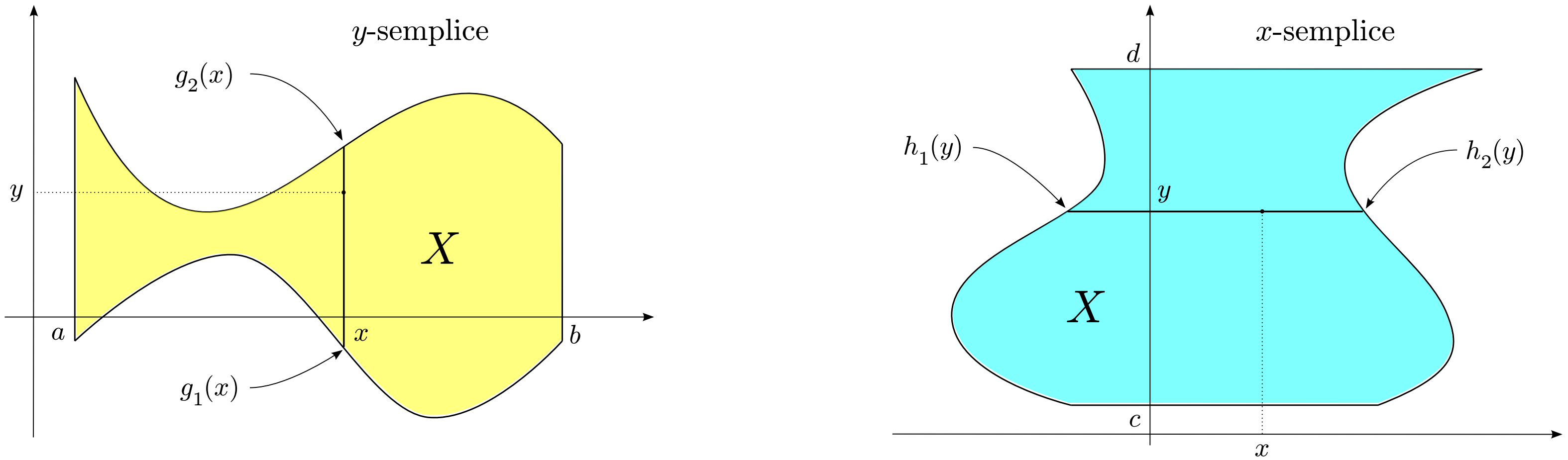


FIGURA 81. Domini y- e x-semplici.

L'idea del seguente risultato è quella di ridurre il calcolo dell'integrale doppio al calcolo in successione di due integrali in una variabile.

TEOREMA 9.4 (*Teorema di Fubini–Tonelli*). *Sia $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua e X un dominio semplice. Allora f è integrabile su X. Inoltre,*

(i) se X è y-semplice

$$\boxed{\iint_X f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx}$$

(ii) se X è x-semplice

$$\boxed{\iint_X f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy}$$

Interpretazione geometrica di Fubini–Tonelli. L'idea di fondo per calcolare V è di decomporlo in una unione di fette di spessore infinitesimale e poi sommare il volume di tale fette. Per spiegarlo meglio supponiamo che X sia y-semplice. Allora per ogni $x \in [a, b]$ consideriamo l'integrale interno

$$A(x) = \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy$$

che rappresenta la superficie del taglio di V al punto x, cfr. Figura 82. Moltiplicando per lo spessore dx otteniamo $dV(x) := A(x) \cdot dx$ che rappresenta

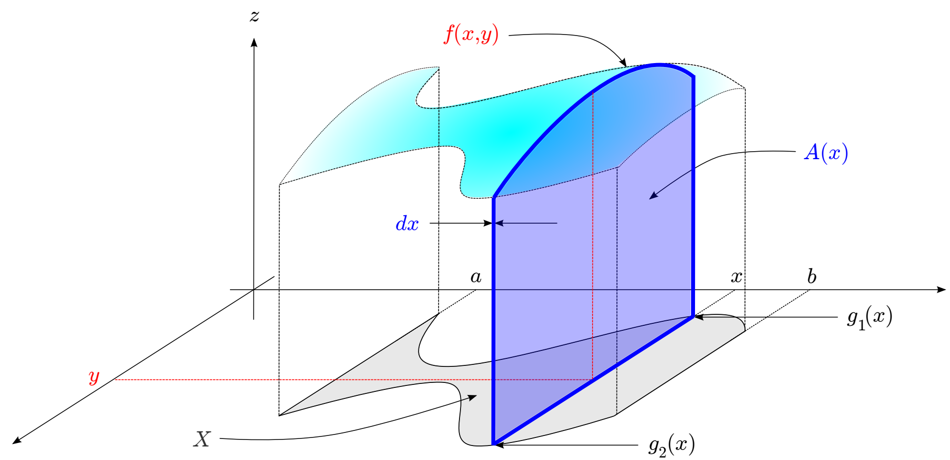


FIGURA 82. Il teorema di Fubini–Tonelli per X y-semplice.

il volume della x-esima fetta infinitesimale. L'integrale esterno

$$\int_{x=a}^{b} dV(x) = \int_{x=a}^{b} A(x)\, dx = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

poi somma i volumi di tutte le fette infinitesimali e quindi rappresenta il volume complessivo V.

<u>Esempio</u>. Calcolare
$$\iint_X 2x^2y\,dx\,dy \qquad \text{ove} \quad X = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,1],\ x+1\le y\le 2\big\}.$$
Il dominio si presenta già nella forma di un dominio y-semplice, cf. Figura 83.

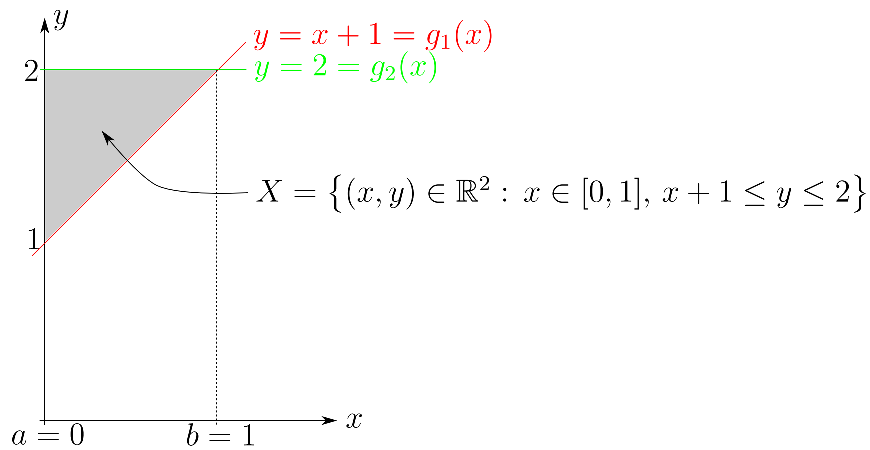


Figura 83. Esempio di un dominio y-semplice.

Quindi
$$\begin{aligned}\iint_X 2x^2y\,dx\,dy &= \int_{x=0}^1\left(\int_{y=x+1}^2 2x^2y\,dy\right)dx = \int_{x=0}^1 2x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x+1}^2 dx\\ &= \int_{x=0}^1 (4x^2-x^4-2x^3-x^2)\,dx = \left[4\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}-2\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^1 = \frac{4}{3}-\frac{1}{5}-\frac{2}{4}-\frac{1}{3}-0 = \frac{3}{10}\end{aligned}$$

<u>Esercizio</u>. Verificare che il dominio nell'esercizio precedente è anche x-semplice e calcolare l'integrale usando Fubini–Tonelli per domini x-semplici. (Soluzione: $X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[1,2],\ 0\le x\le y-1\}$).

<u>Esempio</u>. Calcolare

$$\iint_X \sin(y^3)\, dx\, dy \qquad \text{ove} \quad X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x \in [0,1], \, \sqrt{x} \le y \le 1\right\}.$$

Anche in questo caso, il dominio si presenta già nella forma di un dominio y-semplice, tuttavia se applichiamo la formula per domini y-semplici

$$\iint_X \sin(y^3)\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \sin(y^3) dy \right) dx = ???$$

otteniamo la funzione integranda $\sin(y^3)$ che non è integrabile elementarmente rispetto y.

Però, vale anche $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, y \in [0,1], \, 0 \le x \le y^2\right\}$ e quindi X è anche x-semplice, cfr. Figura 84.

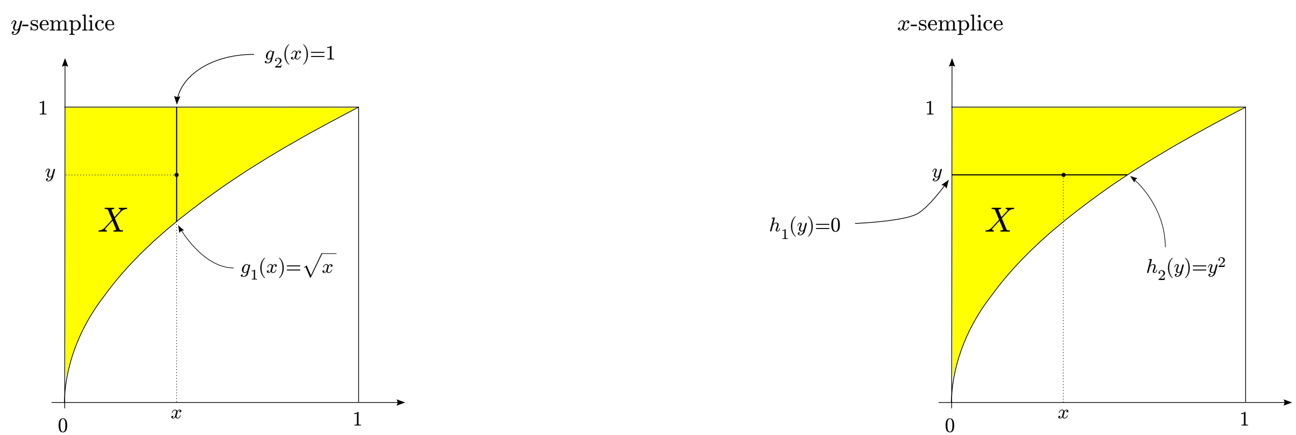


Figura 84. Dominio y- e x-semplice.

Così risulta

$$\iint_X \sin(y^3)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} \sin(y^3)dx\right) dy = \int_0^1 [x]_0^{y^2} \cdot \sin(y^3)dy = \int_0^1 y^2 \cdot \sin(y^3)dy$$
$$= \left[-\frac{1}{3}\cos(y^3)\right]_0^1 = \frac{1}{3}\big(1-\cos(1)\big)$$

Quindi in alcuni casi può essere necessario vedere il dominio come semplice rispetto ad una variabile piuttosto che all'altra.

<u>Osservazione</u>. Dal teorema di Fubini–Tonelli segue che se il dominio è un *rettangolo*, cioè $X = [a,b] \times [c,d]$, e $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, allora

$$\iint_X f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b f_1(x)dx \cdot \int_c^d f_2(y)dy.$$

Integrazione in Coordinate Polari

Per domini X "circolari" di integrazione conviene spesso di passare dalle coordinate cartesiane (x,y) alle coordinate polari (ρ,ϑ) per semplificare la rappresentzione di X. Per fare ciò serve il seguente risultato.

<u>Proposizione</u> 9.5. *Sia $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrabile. Se il dominio X in coordinate cartesiane (x,y) corrisponde al dominio X' in coordinate polari (ρ,ϑ), allora*

$$\boxed{\iint_X f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{X'} f\big(\rho\cdot\cos(\vartheta), \rho\cdot\sin(\vartheta)\big)\cdot \rho \cdot\, d\rho\, d\vartheta}$$

<u>Osservazione</u>. Si noti che passano alle coordinate polari l'elemento infinitesimale di area $dx\,dy$ si trasforma in $\rho\cdot\, d\rho\, d\vartheta$, cfr. Figura 85.

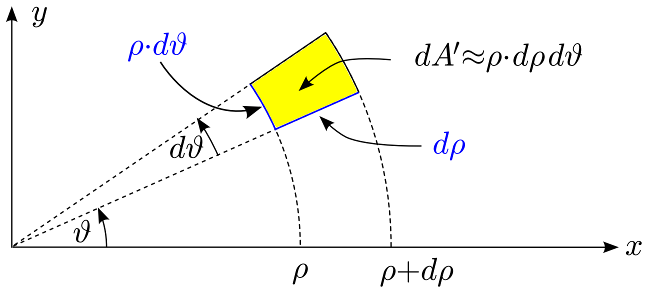


Figura 85. Cambiamento di variabili per coordinate polari.

<u>Esempio</u>. Calcolare

$$\iint_X xy\,dx\,dy \qquad \text{ove} \quad X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, x^2+y^2 \leq 1,\, 0 \leq y \leq x\right\}.$$

In questo tipo di problemi è opportuno dapprima disegnare il grafico.

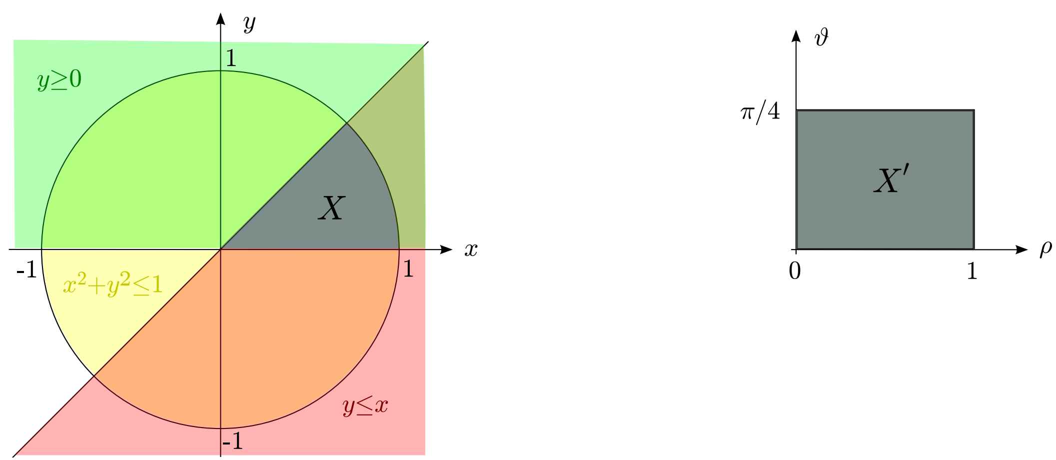


Figura 86. Dominio in coordinate cartesiane e polari.

Il dominio è x- (e anche y-) semplice. Però il dominio essendo un settore circolare, è molto più facilmente rappresentabile in coordinate polari come

$$X' = \left\{(\rho, \vartheta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) :\ 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \vartheta \leq \tfrac{\pi}{4}\right\} = [0,1] \times [0, \tfrac{\pi}{4}].$$

Quindi dalla proposizione precedente si ha (è importante non dimenticare il fattore ρ !!)

$$\iint_X xy\,dx\,dy = \iint_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \rho\cos(\vartheta)\cdot\rho\sin(\vartheta)\cdot\rho\cdot\ d\rho\,d\vartheta$$

Visto che X' è un rettangolo, ricordando l'osservazione su pagina 252, segue

$$\iint_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \rho^3\cdot\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\,d\rho\,d\vartheta = \int_0^1 \rho^3\,d\rho\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\,d\vartheta =$$

$$= \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1\cdot\left[\frac{\sin^2(\vartheta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{16}$$

<u>ALTRI ESEMPI</u>. • Calcolare la misura $|X|$ del dominio $X \subset \mathbb{R}^2$ che in coordinate polari è dato da

$$X' = \big\{(\rho, \vartheta) : \vartheta \in [\vartheta_0, \vartheta_1],\ 0 \le \rho \le R(\vartheta)\big\}$$

per una funzione continua $R : [\vartheta_0, \vartheta_1] \to [0, +\infty)$, cfr. Figura 87.

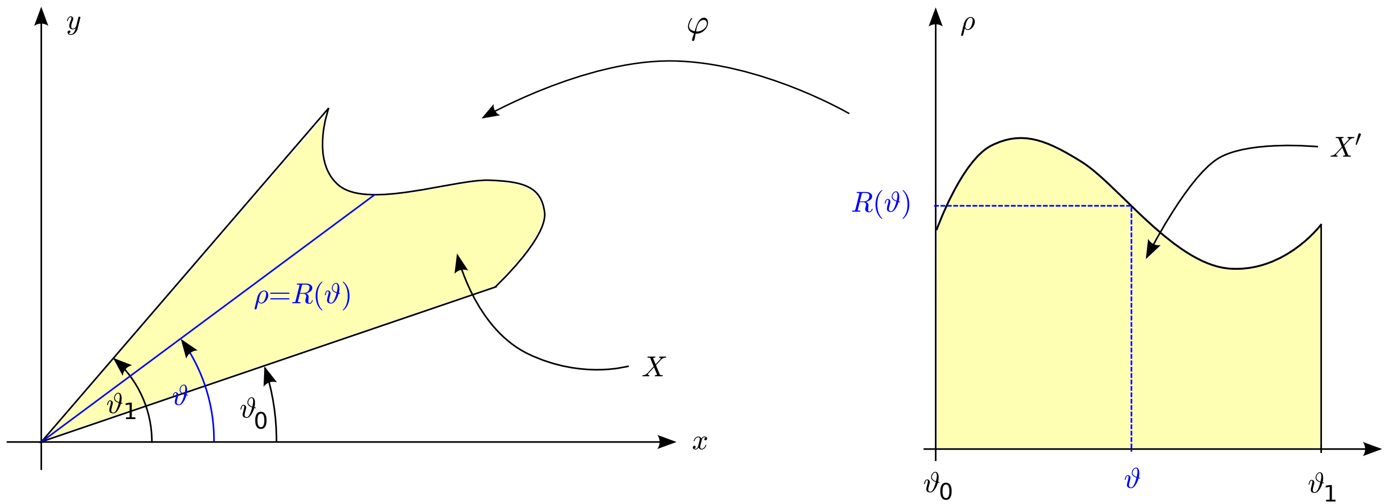


FIGURA 87. Dominio in coordinate cartesiane e polari.

Visto che il dominio X' è ρ-semplice, passando alle coordinate polari otteniamo

$$\begin{aligned}|X| &= \iint_X 1\,dx\,dy = \iint_{X'} \rho\,d\rho\,d\vartheta \\ &= \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \int_0^{R(\vartheta)} \rho\,d\rho\,d\vartheta = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\rho=0}^{\rho=R(\vartheta)} d\vartheta \\ &= \frac{1}{2}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} R^2(\vartheta)\,d\vartheta.\end{aligned}$$

Per dare un esempio concreto calcoliamo l'area della *spirale di Archimede* data in coordinate polari da $X' := \{(\rho, \vartheta) : \vartheta \in [0, 2\pi],\ 0 \le \rho \le \vartheta)\}$, cfr. Figura 88.

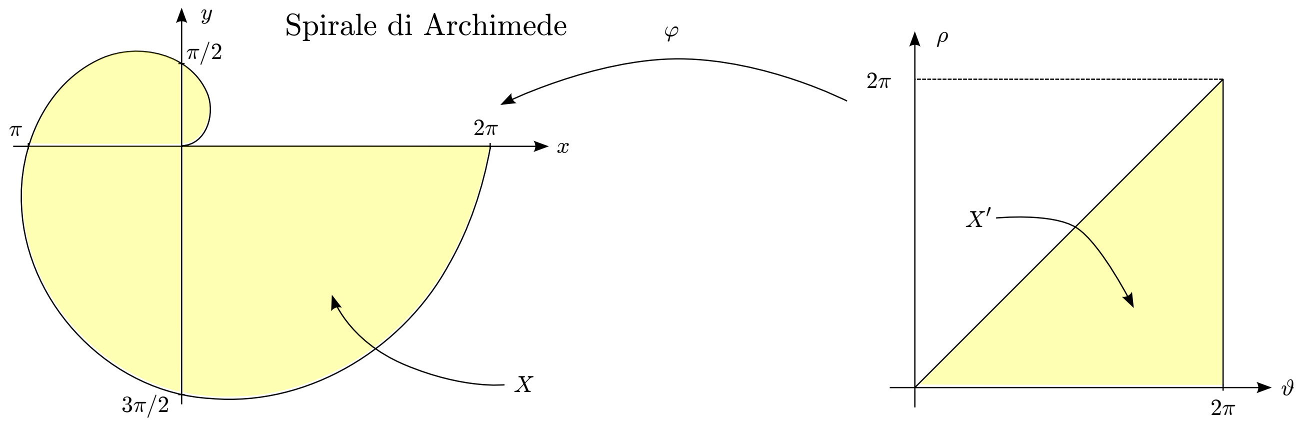


FIGURA 88. La spirale di Archimede.

In questo caso $R(\vartheta) = \vartheta$ e quindi otteniamo

$$|X| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \vartheta^2\, d\vartheta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\vartheta^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \cdot \pi^3.$$

- Calcolare
$$I_R := \iint_{X_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \qquad \text{per} \quad X_R := \{(x,y) : x^2+y^2 \le R^2\}.$$
Per risolvere l'integrale passiamo alle coordinate polari. Visto che il cerchio X_R in coordinate cartesiane corrisponde in coordinate polari al rettangolo $X_R' = [0,R] \times [0,2\pi]$ risulta (usando l'osservazione a pagina 252)
$$\begin{aligned} I_R &= \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2}\rho\,d\vartheta\,d\rho = \int_0^R e^{-\rho^2}\rho\,d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\vartheta \\ &= -\frac{e^{-\rho^2}}{2} \cdot 2\pi\Big|_0^R = \pi \cdot \left(1 - e^{-R^2}\right). \end{aligned}$$
Osserviamo che $\lim_{R\to+\infty} I_R = \pi$. Visto che per $R \to +\infty$ (in un certo senso) $X_R \to \mathbb{R}^2 = (-\infty,+\infty) \times (-\infty,+\infty)$ "segue" (usando di nuovo l'osservazione a pagina 252)
$$\begin{aligned} \pi &= \iint_{(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}\,dx\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2. \end{aligned}$$
Quindi siamo riusciti a calcolare
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$
che non è possibile usando una primitiva di e^{-x^2}, cfr. l'osservazione a pagina 195. Invece, passando alle coordinate polari, grazie al fattore ρ, si passa da e^{-x^2} a $\rho \cdot e^{-\rho^2}$ che è molto semplice da integrare.

Appendice

Tre principali Modi di Dimostrazioni

Siano A e B due affermazioni e siano $\neg A$ e $\neg B$ le loro negazioni. Allora sono equivalenti

- $A \Rightarrow B$;
- $\neg B \Rightarrow \neg A$;
- A e $\neg B \Rightarrow \lightning$.

Quindi per dimostrare che $A \Rightarrow B$ ci sono i seguenti 3 modi:

dimostrazione diretta: $A \Rightarrow B$;
dimostrazione indiretta: $\neg B \Rightarrow \neg A$;
dimostrazione per assurdo: A con $\neg B \Rightarrow \lightning$.

ESEMPIO. Sia A l'affermazione "*piove*" e B l'affermazione "*la strada è bagnata*", allora evidentemente vale $A \Rightarrow B$. Invece *non* vale il contrario, cioè $B \not\Rightarrow A$, in quanto non è detto che piove se la strada è bagnata. Quindi in questo esempio

- $A \Rightarrow B$ significa "*se piove, allora la strada si bagna*" che è vero.
- $\neg B \Rightarrow \neg A$ significa "*se la strada non è bagnata, allora non piove*" che è vero.
- A e $\neg B \Rightarrow \lightning$ significa "*piove e la strada non è bagnata*" che infatti è una contraddizione.

Elenco di alcuni Limiti Notevoli

Successioni.

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q > 1, \\ 1 & \text{se } q = 1, \\ 0 & \text{se } |q| < 1, \\ \nexists & \text{se } q \le -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0, \\ 1 & \text{se } \alpha = 0, \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \qquad \text{per ogni } a > 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1 \qquad \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0 \qquad \text{per ogni } \alpha > 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = 0 \qquad \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{R},\ q > 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n!} = 0 \qquad \text{per ogni } q \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n = e \qquad \text{più in generale}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \tfrac{a}{x_n}\right)^{x_n} = e^a \qquad \text{se } |x_n| \to +\infty \text{ per } n \to +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n)^{b_n} = a^b \qquad \text{se } a_n \to a > 0 \text{ e } b_n \to b \text{ per } n \to +\infty$$

Funzioni.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$ più in generale

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$$ per ogni $a > 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$ più in generale

$$\lim_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{t}{x}\right)^x = e^t$$ per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r$$ per ogni $r \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$$ per ogni $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \cdot \ln(x) = 0$$ per ogni $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$$

Definizione alternativa dei Limiti per Funzioni

Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione del dominio X di f. Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \qquad \Longleftrightarrow$$

- se $x_0, l \in \mathbb{R}$: Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che
$$\left| f(x) - l \right| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta.$$
- se $x_0 \in \mathbb{R}$, $l = +\infty$: Per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che
$$f(x) > M \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta.$$
- se $x_0 \in \mathbb{R}$, $l = -\infty$: Per ogni $M < 0$ esiste $\delta > 0$ tale che
$$f(x) < M \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta.$$
- se $x_0 = +\infty$, $l \in \mathbb{R}$: Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $L > 0$ tale che
$$\left| f(x) - l \right| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } x > L.$$
- se $x_0 = -\infty$, $l \in \mathbb{R}$: Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $L < 0$ tale che
$$\left| f(x) - l \right| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } x < L.$$
- se $x_0, l = +\infty$: Per ogni $M > 0$ esiste $L > 0$ tale che
$$f(x) > M \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } x > L.$$
- se $x_0 = +\infty$, $l = -\infty$: Per ogni $M < 0$ esiste $L > 0$ tale che
$$f(x) < M \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } x > L.$$
- se $x_0 = -\infty$, $l = +\infty$: Per ogni $M > 0$ esiste $L < 0$ tale che
$$f(x) > M \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } x < L.$$
- se $x_0 = -\infty$, $l = -\infty$: Per ogni $M < 0$ esiste $L < 0$ tale che
$$f(x) < M \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } x < L.$$

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di $X \cap (x_0, +\infty)$. Allora

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \qquad \Longleftrightarrow$$

- se $l \in \mathbb{R}$: Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\big| f(x) - l \big| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } 0 < x - x_0 < \delta.$$

- se $l = +\infty$: Per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) > M \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } 0 < x - x_0 < \delta.$$

- se $l = -\infty$: Per ogni $M < 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) < M \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } 0 < x - x_0 < \delta.$$

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di $X \cap (-\infty, x_0)$. Allora

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \qquad \Longleftrightarrow$$

- se $l \in \mathbb{R}$: Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\big| f(x) - l \big| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } 0 < x_0 - x < \delta.$$

- se $l = +\infty$: Per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) > M \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } 0 < x_0 - x < \delta.$$

- se $l = -\infty$: Per ogni $M < 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) > M \quad \text{per ogni } x \in X \text{ con } 0 < x_0 - x < \delta.$$

Elenco di alcuni Sviluppi di Maclaurin

Per $x \to 0$ valgono i seguenti sviluppi:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 + x + o(x)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) = x + o(x^2)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) = 1 + o(x)$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4) = x + o(x^2)$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) = 1 + o(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x + o(x)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$$

Elenco di alcuni Integrali indefiniti

Vale

$$\int x^r\,dx = \begin{cases} \ln|x| + c & \text{se } r = -1 \\ \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c & \text{se } r \neq -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + c$$

$$\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x) + c$$

$$\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x) + c$$

per una costante arbitraria $c \in \mathbb{R}$ di integrazione.

Testi consigliati

Teoria.

- M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa: *Matematica*, Zanichelli.
- M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa: *Analisi Matematica 1*, Zanichelli.

Esercizi.

- P. Marcellini, C. Sbordone: *Esercitazioni di Matematica*, Liguori Editore.
- S. Salsa, A. Squellati: *Esercizi di Matematica*, Zanichelli.