

Analisi Matematica 1: Compito di prova

Domanda 1

- (i) Dare la definizione di estremo superiore per un insieme $A \subset \mathbb{R}$.
- (ii) Fare un esempio di insieme limitato superiormente, ma non inferiormente.

Domanda 2

- (i) Enunciare il criterio di Leibniz per le serie a segno alterno.
- (ii) Fare un esempio di una serie convergente che *non* converge assolutamente.

Esercizio 1

Per un insieme $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ si ha $m = \inf A$ se solo se

- | | | | |
|----------------------------|---|----------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> a | $m \in A$ e $m \leq a \forall a \in A$ | <input type="checkbox"/> b | $\forall a \in A, m \leq a$ |
| <input type="checkbox"/> c | se $M \leq a \forall a \in A$, allora $M \leq m$ | <input type="checkbox"/> d | $m \leq a \forall a \in A$ e $\exists a \in A$ tale che $a > m$ |

Esercizio 2

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione limitata. Allora

- | | | | |
|----------------------------|---|----------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> a | $\exists n \in \mathbb{N}, \exists M > 0$ t.c. $ a_n \leq M$ | <input type="checkbox"/> b | $\exists M > 0$ t.c. $ a_n \leq M \forall n \in \mathbb{N}$ |
| <input type="checkbox"/> c | $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M > 0$ t.c. $ a_n \leq M$ | <input type="checkbox"/> d | $\exists M > 0$ t.c. $ a_n \leq M$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. |

Esercizio 3

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione tale che $(n+1) \cdot a_{n+1} \sim a_n$ per $n \rightarrow +\infty$. Allora

- | | | | |
|----------------------------|------------------------------------|----------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> a | $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge | <input type="checkbox"/> b | $a_n \sim \frac{1}{n}$ per $n \rightarrow \infty$ |
| <input type="checkbox"/> c | $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge | <input type="checkbox"/> d | $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é oscillante |

Esercizio 4

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n$$

Esercizio 5

Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$$

Esercizio 6

Calcolare sup, inf, min e max di $A = \left\{ \frac{n^2 + (-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.