Analisi Matematica. **Durata della prova: 2 ore** **10.2.26**

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** Informatica

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Enunciare il criterio del rapporto per le serie numeriche.

(ii) Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} =: S$.

Risposta

(i) Sia $a_n > 0$ definitivamente e $q := \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Allora la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \begin{cases} \text{converge, se } q<1, \\ \text{diverge a } +\infty, \text{ se } q>1 \end{cases}$$

invece non si può concludere nulla sul comportamento della serie se $q=1$.

(ii) Sia $a_n := \frac{n^2}{2^n}$. Allora

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \to (1+0)^2 = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot \cancel{2^n}^{\,1}}{2^{\cancel{n+1}} \cdot n^2} = \frac{1}{2}\cdot \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2}_{=1} = \frac{1}{2} = q < 1$$

$\Rightarrow$ la serie S converge.

Domanda 2

[5 punti]

(i) Enunciare la Formula di Taylor con il resto di Peano.

(ii) Calcolare il polinomio di Maclaurin di ordine $n = 3$ di $f(x) := e^x \cdot \sin(x)$.

Risposta

(i) Sia $f \in C^n(a,b)$ e $x_0 \in (a,b)$. Allora

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot (x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^k\right) \quad \text{per } x \to x_0.$$

(ii) Si usano gli sviluppi notevoli $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ e

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \to 0$. Ciò implica

$$e^x \cdot \sin(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\cdot\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = x + x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$= x + x^2 + \frac{3-1}{6}x^3 + o(x^3) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0$$

$\Rightarrow T_3(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3}$, $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 1

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(2n^2 - n\cdot\sqrt{4n^2+2}\right) =: \ell$$

Risoluzione

$$\left(2n^2 - n\cdot\sqrt{4n^2+2}\right)\cdot\frac{2n^2+n\cdot\sqrt{4n^2+2}}{2n^2+n\cdot\sqrt{4n^2+2}} =$$

$$\frac{4n^4 - n^2\cdot(4n^2+2)}{2n^2+n\cdot\sqrt{4n^2+2}} = \frac{-2\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\cdot\left(2+\sqrt{4+\frac{2}{n^2}}\right)} \to \frac{-2}{2+2} = -\frac{1}{2} \text{ per } n\to+\infty$$

$\hookrightarrow \sqrt{4}=2$ per $n\to+\infty$

Quindi $\ell = -\frac{1}{2}$

Esercizio 2

[5 punti]

Trovare i punti di estremo locale di $f(x) := (x-2)\cdot e^{x^2-x+1}$ e classificarli.

Risoluzione

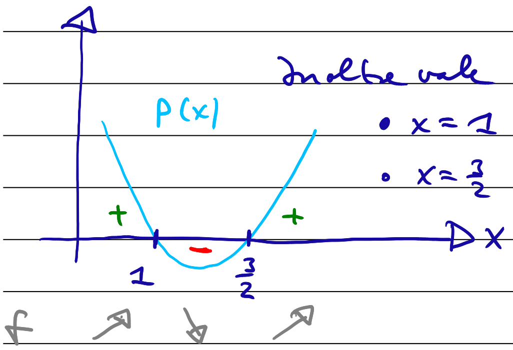
- f è definita e derivabile su tutto $\mathbb{R}$, quindi gli unici candidati per i punti di estremo locale sono i punti critici.

- $f'(x) = 1\cdot e^{x^2-x+1} + (x-2)\cdot e^{x^2-x+1}\cdot(2x-1)$

$$= \underbrace{(2x^2-5x+3)}_{p(x) :=}\cdot e^{x^2-x+1} \quad > 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$$

$= 0 \iff p(x) = 0$

$$\iff x = \frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot2\cdot3}}{2\cdot2} = \frac{5\pm1}{4} = \begin{cases} 1 \\ \frac{3}{2}\end{cases}$$



Inoltre vale segno $f'(x)$ = segno $p(x)$ $\Rightarrow$ $f'(x)$ cambia segno in

- $x=1$ da "+" a "−" $\Rightarrow$ $x=1$ è un punto di max. locale
- $x=\frac{3}{2}$ da "−" a "+" $\Rightarrow$ $x=\frac{3}{2}$ è un punto di min. locale

Esercizio 3

[4 punti]

Trovare un punto $x_0 > 0$ tale che la retta $y = 3x - e^2$ diventa una retta tangente al grafico della funzione $f(x) := \ln(x^x)$.

Risoluzione

- $\ln(x^x) = x \cdot \ln(x) \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \ln(x)$
- $t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = \left(f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0\right) + f'(x_0) \cdot x$

$$= \left(\cancel{x_0 \cdot \ln(x_0)} - (1 + \cancel{\ln(x_0)}) \cdot x_0\right) + (1 + \ln(x_0)) \cdot x$$

$$= \left(1 + \ln(x_0)\right) \cdot x - x_0 \overset{!}{=} 3x - e^2$$

$$\Rightarrow x_0 = e^2 \Rightarrow 1 + \ln(x_0) = 1 + \ln(e^2) = 1 + 2 = 3 \checkmark$$

Quindi il punto $\underline{\underline{x_0 = e^2}}$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(x_0, y_0)$ della funzione $f(x, y) := \dfrac{\cos(xy)}{y}$ nel punto $(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{4}, -2\right)$ per il versore $v := \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) =: (v_x, v_y)$

Risoluzione

- f è C^1, quindi differenziabile che, per il teorema del gradiente, implica che

$$D_v f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot v_x + f_y(x_0, y_0) \cdot v_y$$

- $f_x(x, y) = \dfrac{-\sin(x \cdot y) \cdot y}{y} = -\sin(x \cdot y) \Rightarrow f_x(x_0, y_0) = \underbrace{-\sin(-\pi/2)}_{\sin(\frac{\pi}{2}) = 1} = 1$
- $f_y(x, y) = \dfrac{y \cdot (-\sin(x \cdot y) \cdot x - 1 \cdot \cos(x \cdot y))}{y^2} = -\dfrac{\sin(xy) \cdot xy + \cos(xy)}{y^2} \Rightarrow$

$$f_y(x_0, y_0) = -\frac{\overbrace{\sin(-\frac{\pi}{2})}^{=-1} \cdot (-\frac{\pi}{2}) + \overbrace{\cos(-\frac{\pi}{2})}^{=0}}{(-2)^2} = -\frac{\pi/2}{4} = -\frac{\pi}{8}$$

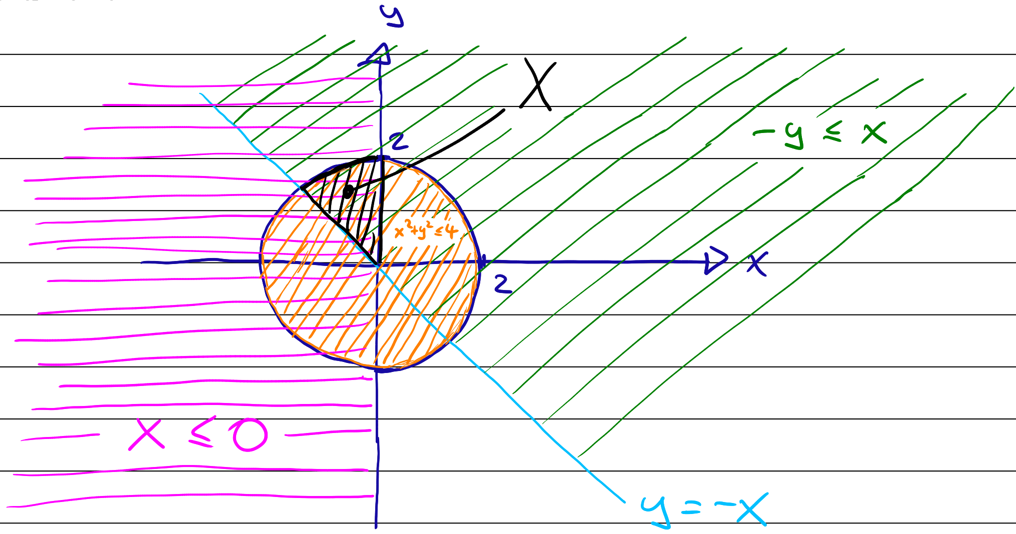
$$\Rightarrow D_v f(x_0, y_0) = 1 \cdot \frac{3}{5} + \left(-\frac{\pi}{\cancel{8}_{2}}\right) \cdot \left(-\frac{\cancel{4}^{1}}{5}\right) = \frac{6}{10} + \frac{\pi}{10} = \underline{\underline{\frac{6 + \pi}{10}}}$$

Esercizio 5 **[6 punti]**

Disegnare l'insieme $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, -y \leq x \leq 0\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_X \underbrace{(x^2 + y^2)}_{=: f(x,y)}\, dx\, dy$$

Risoluzione



X corrisponde a $X' = \{(\rho, \vartheta) \mid 0 \leq \rho \leq 2, \frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{3}{4}\pi\}$

$= [0,2] \times [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi]$ in coordinate polari

Inoltre $f(\rho \cdot \cos\vartheta, \rho \cdot \sin\vartheta) = \rho^2$ quindi risulta

$$I = \int_{\rho=0}^{2} \int_{\vartheta=\pi/2}^{3/4\pi} \rho^2 \cdot \rho \cdot d\vartheta\, d\rho$$

$$= \int_{\rho=0}^{2} \rho^3 \cdot \underbrace{[\vartheta]_{\pi/2}^{3/4\pi}}_{= \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}} d\rho$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{16}{4} = \pi$$