Domanda 1

[4 punti]

10. 9. 21

(i) Enunciare il criterio della radice per una serie numerica.

(ii) Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2+3n}{5+7n}\right)^{11n} =: S$

Sol: i) Sia $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ t.c. $\lim_{n\to+\infty} a_n =: q$ esiste.

Allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

- converge se $q < 1$
- diverge se $q > 1$
- non si può concludere nulla se $q = 1$.

ii) • $a_n := \left(\frac{2+3n}{5+7n}\right)^{11n} \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

• $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{2+3n}{5+7n}\right)^{11} \to \left(\frac{3}{7}\right)^{11} =: q < 1$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow$ la serie S converge.

Domanda 2

[4 punti]

(i) Dare la definizione di derivabilità nel punto $x_0 \in \mathbb{R}$ per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Studiare la derivabilità della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| \cdot \sqrt[3]{x}$ nel punto $x_0 = 0$.

Sol: i) f è derivabile in x_0 se converge il limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

ii) Allora

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| \cdot \sqrt[3]{x} - 0}{x - 0}$$

$$= \underbrace{\frac{|x|}{x}}_{\text{limitato}} \cdot \underbrace{\sqrt[3]{x}}_{\to 0} \to 0 \quad \text{per } x \to 0$$

$\Rightarrow$ f è derivabile in $x_0 = 0$ con $f'(0) = 0$.

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \sin(x) - \ln(1+x^2)}{x^4} =: \ell$$

Si usa la formula di Taylor:

- denominatore di 4°-ordine $\Rightarrow$ numeratore da sviluppare fino al 4°-ordine
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow x \cdot \sin(x) = x^2 - \frac{x^4}{6} + x \cdot o(x^3)$

$$= x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4) \quad (x \to 0)$$

- $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad (t \to 0) \Rightarrow$

$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \quad (x \to 0)$

Quindi risulta

$$x \cdot \sin(x) - \ln(1+x^2) = \cancel{x^2} - \frac{x^4}{6} - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$= \frac{3-1}{6} \cdot x^4 + o(x^4)$$

$$\sim \frac{1}{3} \cdot x^4 \quad \text{per } x \to 0$$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{3} \cdot x^4}{x^4} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 2 **[5 punti]**

Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$\int_0^1 (1+x) \cdot \ln(x)\, dx =: I$$

Sol: • $I = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 (1+x) \cdot \ln(x)\, dx$

- $\int \underset{f'}{(1+x)} \cdot \underset{g}{\ln(x)}\, dx \overset{(i.p.p.)}{=} \underset{f}{\left(x + \frac{x^2}{2}\right)} \cdot \underset{g}{\ln(x)} - \int \underbrace{\left(x + \frac{x^2}{2}\right)}_{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}\, dx$ $\quad \left(x + \frac{x^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{x} = 1 + \frac{x}{2}$

$$= \left(x + \frac{x^2}{2}\right) \cdot \ln(x) - \left(x + \frac{x^2}{4}\right) + c$$

$$\Rightarrow \int_a^1 (1+x) \cdot \ln(x)\, dx = \left[\left(x + \frac{x^2}{2}\right) \cdot \ln(x) - x - \frac{x^2}{4}\right]_a^1$$

$$= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \overbrace{\ln(1)}^{=0}}_{=0} \underbrace{- 1 - \frac{1}{4}}_{= -5/4} - \underbrace{\left(a + \frac{a^2}{2}\right) \cdot \ln(a)}_{\to 0} \underbrace{- a - \frac{a^2}{4}}_{\to 0} \quad \text{per } a \to 0^+$$

$$\left(\lim_{x \to 0^+} x^\nu \cdot \ln(x) = 0 \ \forall \nu > 0 \right)$$

$$\to -5/4 \quad \text{per } a \to 0^+$$

$$\Rightarrow I = -5/4$$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(1,2)$ per $f(x,y) = x \cdot y^2 + x^2 \cdot y$ e il versore $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$.

- f è C^1 quindi differenziabile e dal teorema del gradiente segue $D_v f(1,2) = f_x(1,2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - f_y(1,2) \cdot \frac{1}{2}$

- $f_x(x,y) = y^2 + 2x \cdot y \Rightarrow f_x(1,2) = 4 + 2 \cdot 1 \cdot 2 = 8$
- $f_y(x,y) = 2xy + x^2 \Rightarrow f_y(1,2) = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1^2 = 5$

$\Rightarrow D_v f(1,2) = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 5 \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot \sqrt{3} - \frac{5}{2}$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(0,0)$ della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{1-\cos(xy)}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Sol:

- Per $x = y$ otteniamo

$$\lim_{x \to 0} f(x,x) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x^4)}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x^4)}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq f(0) = 0$$

$\Rightarrow$ f non è continua in $(0,0)$ $\Rightarrow$ f non è differenziabile in $(0,0)$.

- $f(h,0) = f(0,h) = 0 \quad \forall h \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{f(h,0) - f(0,0)}^{=0}}{h} = 0 =: f_x(0,0)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{f(0,h) - f(0,0)}^{=0}}{h} = 0 =: f_y(0,0)$$

$\Rightarrow$ f è derivabile in $(0,0)$ con $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$.

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione $f(x) := e^{(x^3-3x)} - 1$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Sol:

- dominio: tutto $\mathbb{R}$.
- zeri: $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x^3-3x} = 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0$

$$\overset{\shortparallel}{x \cdot (x^2 - 3)} = x \cdot (x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3})$$

$\iff x = 0$ opp. $x = \pm\sqrt{3}$.

- **asintoti:** $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e^{\lim_{x\to\pm\infty}(x^3-3x)} - 1$

$$= e^{\pm\infty} - 1 = \begin{cases} +\infty & \text{per } x\to+\infty \\ -1 & \text{per } x\to-\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $y = -1$ è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ $\Rightarrow$ non ci sono asintoti obliqui.

- **monotonia:** $f'(x) = e^{x^3-3x}\cdot(3x^2-3) = \underbrace{3\cdot e^{x^3-3x}}_{>0 \text{ sempre}}\cdot(x^2-1)$

$\Rightarrow f'(x) \geq 0 \iff x^2 \geq 1 \iff x \geq 1$ opp. $x \leq -1$

$\iff f$ è crescente

$f'(x) \leq 0 \iff x^2 \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1$

$\iff f$ è decrescente.

$f'(x) = 0 \iff x = \pm 1$.

Inoltre $f'(x)$ cambia segno in

- $x = +1$ da "$-$" a "$+$" $\Rightarrow$ $x = 1$ è un pto. di minimo locale
- $x = -1$ da "$+$" a "$-$" $\Rightarrow$ $x = -1$ è un pto. di massimo locale.

Grafico: