Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore 11.9.13

Cognome............................*Nome*.................................**A.A.**.........

Matricola............................Corso di Laurea.............................. **Canale** [A] [B] [C] [D]

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Enunciare il criterio del rapporto per serie numeriche.

(ii) Risulta utile applicare tale criterio alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}$?

Risposta

(i) Vedi libro/dispense

(ii) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}$ risulta a termini strettamente positivi, quindi si può applicare il criterio del rapporto. Risulta $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(n^2+2)}{n(n^2+2n+5)} = 1$

Quindi il criterio non risulta utile

Domanda 2

[5 punti]

(i) Enunciare il teorema della media integrale.

(ii) Determinare il valor medio integrale della funzione $f(x) = x^3 e^{x^2}$ nell'intervallo $[0, 4]$.

Risposta

(i) vedi libro/dispense

$\exists\, c \in (0,4)$ tale che

(ii) $\int_0^4 x^3 e^{x^2} dx = f(c)\cdot 4$, visto che $f(x)$ è continua in $[0,4]$

$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int x^2 (2x e^{x^2}) dx = \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\cdot x^2 - \int 2x e^{x^2} dx\right] + c =$

$= \frac{1}{2}\left[e^{x^2} x^2 - e^{x^2}\right]$ dunque $f(c) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left[e^{x^2}(x^2-1)\right]_0^4 =$

$= \frac{1}{8}\left[e^{16}\cdot 15 + 1\right]$

Esercizio 1

[4 punti]

Calcolare

$$L = \lim_{x\to-\infty} \left(1+\sin\frac{1}{2x^2}\right)^{x^2}$$

FI 1^∞

Risoluzione

$$L = \lim_{x\to-\infty} e^{x^2 \ln\left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{2x^2}\right)}$$

Poiché

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{2x^2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2x^2}} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2x^2}}{\frac{1}{2x^2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$L = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

Esercizio 2

[4 punti]

Studiare la continuità in $(0,+\infty)$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \beta\ln(x+3) & \text{se } 0<x\leq 1, \\ \frac{5e^{x-1}}{\sqrt{x^2+8}} & \text{se } x>1 \end{cases}$$

al variare del parametro $\beta\in\mathbb{R}$.

Risoluzione

$f_1(x) = \beta\ln(x+3)$ è continua per $0<x\leq 1$ e $\forall\beta\in\mathbb{R}$

$f_2(x) = \frac{5e^{x-1}}{\sqrt{x^2+8}}$ è continua per $x>1$

dobbiamo controllare ~~la~~ la continuità di $f(x)$ in $x=1$, cioè

$$\lim_{x\to1^+} f_2(x) = f_1(1) = \beta\ln 4 = 2\beta\ln 2$$

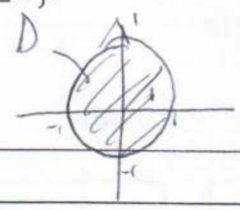
poiché $\lim_{x\to1^+} f_2(x) = \frac{5}{3}$, f risulta continua in $(0,+\infty)$

se $2\beta\ln 2 = \frac{5}{3}$, ossia $\beta = \frac{5}{6}\frac{1}{\ln 2}$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare l'integrale $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$, dove $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$.



Risoluzione

passiamo a coordinate polari

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= 2\pi\left(\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho\right) = 2\pi\left[-\frac{1}{2}\int_0^1 (1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\,d(1-\rho^2)\right] =$$

$$= -\pi\,\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}+1}\Big]_0^1 = -\frac{2}{3}\pi(0-1) = \frac{2}{3}\pi$$

Esercizio 4

[5 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(x_0,y_0)=(0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}+x^4-1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

passiamo a coordinate polari nel limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{e^{\rho^2}+\rho^4\cos^4\varphi-1}{\rho^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\rho\to 0}\frac{\cancel{1}+\rho^2+\frac{1}{2}\rho^4+o(\rho^4)+\rho^4\cos^4\varphi-\cancel{1}}{\rho^2}$$

$= 1$ dunque f non è continua e quindi non è differenz.

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)?$ $$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{h^2}+h^4-1}{h^3} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{1}+h^2+\frac{1}{2}h^4+h^4+o(h^4)-\cancel{1}}{h^3} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ \nexists$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)?$ $$\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{e^{k^2}-1}{k^3} = \lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\ \nexists$$

Esercizio 5

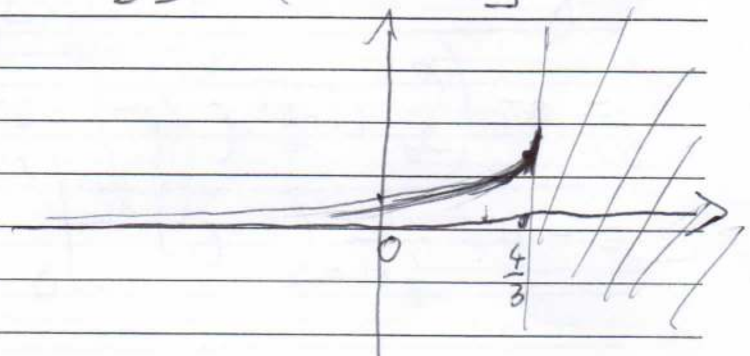
[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione $f(x) = \dfrac{1}{3+\sqrt{4-3x}}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

$$D_f = \{4-3x \geq 0\} = \left\{x \leq \frac{4}{3}\right\} = \left(-\infty, \frac{4}{3}\right]$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}, \quad f(0) = \frac{1}{5}$$



$f(x) > 0$ in D_f

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(3+\sqrt{4-3x})^2} \cdot \frac{-3}{2\sqrt{4-3x}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(3+\sqrt{4-3x})^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4-3x}}$$

f è derivabile in $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$ e risulta $f'(x) > 0$

$$\lim_{x \to \frac{4}{3}^-} f'(x) = +\infty$$