

Cognome: Nome:

Matricola: Corso di Laurea:

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+3 punti]

- (i) Data $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dare la definizione di continuità in un punto x_0 .
 (ii) Dare un esempio di una funzione f che è continua ma non derivabile in $x_0 = -\pi$.

Risposta

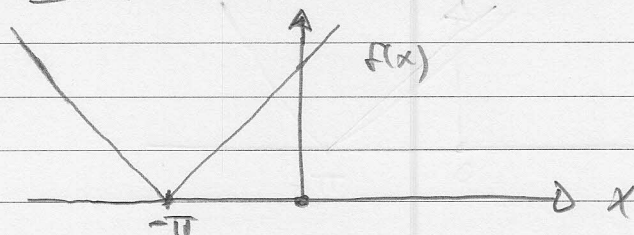
- (i) f è continua in x_0 se $\forall$ successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\text{con } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \text{ segue } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

(visto che dominio $f = \mathbb{R}$ non serve la condizione $x_n \in \text{dominio}$)

- (ii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x + \pi|$ è continua

ma non derivabile in $x_0 = -\pi$:

**Domanda 2**

[2+3 punti]

- (i) Enunciare il Teorema dei valori intermedi per una funzione f definita in un intervallo.
 (ii) Mostrare (anche graficamente) che il teorema non vale per funzioni continue su domini qualsiasi.

Risposta

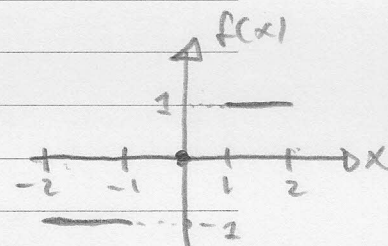
- (i) Sia $f \in C[a, b]$ e siano $m := \min f$ e $M := \max f$.

$$\text{Allora } \forall y \in [m, M] \quad \exists x \in [a, b] \text{ t.c.}$$

$$f(x) = y.$$

- (ii) Sia $f: [-2, -1] \cup [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} -1, & \text{se } x \in [-2, -1] \\ +1, & \text{se } x \in [1, 2] \end{cases}$$



Allora, f ammette i valori -1 e $+1$ ma non
 $\exists x \in \text{dominio di } f$ t.c. $f(x) = 0 \in [-1, 1]$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione tale che $a_n > 0$ e $a_n > 2a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora

☐ a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

☒ b $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

☐ c $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

☐ d nessuna delle precedenti

Risoluzione

Dal ipotesi segue $0 < a_{k+1} < \frac{a_k}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}$ e quindi

$$0 < a_{n+1} < \frac{a_n}{2} < \frac{a_{n-1}}{2 \cdot 2} < \frac{a_{n-2}}{2^2 \cdot 2} < \dots < \frac{a_0}{2^n \cdot 2} = \frac{a_0}{2^{n+1}}$$

$\downarrow$

$(n \rightarrow +\infty) \Rightarrow$ (per il cor. dei carabinieri) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$

$\downarrow$

0 $(n \rightarrow +\infty)$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f(x) = x^6 + 6x + 1$ e $p(x)$ il suo polinomio di Taylor di ordine 8 centrato in $x_0 = 0$. Allora, $p'(-1)$ vale

☐ a -1

☐ b 1

☐ c -4

☒ d nessuna delle precedenti
~~non si può calcolare~~

Risoluzione

Visto che f è un polinomio di grado 6 e $P \geq 6$ segue che

$$f(x) = T_P(x) = p(x) \Rightarrow p'(x) = f'(x) = 6x^5 + 6 \Rightarrow$$
$$p'(-1) = -6 + 6 = 0.$$

Esercizio 3

[4 punti]

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^3 = +\infty$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

☐ a converge

☒ b diverge

☐ c è oscillante

☐ d non si può dire nulla

Risoluzione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^3 \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \Rightarrow a_n \geq 1$$

definizione $\Rightarrow S_n = a_0 + \dots + a_n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty)$

$\Rightarrow$ la serie diverge a $+\infty$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\ln(1+x^2)} \cdot \left(\frac{\sin(x)}{x} - \frac{x}{\sin(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\sin^2(x) - x^2}{x \cdot \sin(x)} \right) = -\frac{1}{3}$$

Risoluzione

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x) - x^2}{x^4} \quad \text{Allora}$$

$$\bullet \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \Rightarrow \sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)^2 =$$

$$= x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{x^3}{6} + o(x^4) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \Rightarrow$$

$$\frac{\sin^2(x) - x^2}{x^4} = \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) - x^2}{x^4} \sim \frac{-\frac{x^4}{3}}{x^4} = -\frac{1}{3} = \text{limite}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare e classificare punti critici di $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy^2 + 1$.

Risoluzione

$$\text{Pti. critici: } 1) f_x(x, y) = 2x - 2y^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$2) f_y(x, y) = 2y - 4xy \stackrel{!}{=} 0 = 2y \cdot (1 - 2x) \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{opp.} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\underline{y=0}: \Rightarrow x=0 \Rightarrow \boxed{P_0 = (0, 0)} \text{ è un pto. critico}$$

$$\underline{x=\frac{1}{2}}: \Rightarrow 2y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{P_{1,2} = \left(\frac{1}{2}, \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \right)}$$

Sono pti. critici.

$$\text{Studio di } H_f: H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -4y \\ -4y & 2-4x \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$H_f(P_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{definita positiva} \Rightarrow \boxed{P_0 = \text{pto. di minimo locale}}$$

$$H_f(P_{1,2}) = \begin{pmatrix} 2 & \mp 4\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \mp 4\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(H_f(P_{1,2})) < 0 \Rightarrow$$

$$H_f(P_{1,2}) \text{ Sono indefinite} \Rightarrow \boxed{P_{1,2} \text{ sono pti. di sella}}$$

Esercizio 6

[4 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$9 \cdot \int_0^1 \frac{2x+1}{4+9x^2} dx =: I$$

Risoluzione

$$I = \int_0^1 \frac{(2x+1)}{(4+9x^2)} dx + \int_0^1 \frac{9}{4+9x^2} dx =: I_1 + I_2$$

$\begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix}$

$$I_1 = \left[\ln|f(x)| \right]_0^1 = \ln(4+9x^2) \Big|_0^1 = \ln(13) - \ln(4) = \ln\left(\frac{13}{4}\right)$$

$$I_2 = 9 \cdot \int_0^1 \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{3x}{2}\right)^2} dx = \frac{9}{4} \cdot \int_0^{3/2} \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{2}{3} dt$$

$$\begin{aligned} \text{Sost. } t = \frac{3x}{2} \Rightarrow dx &= \frac{2}{3} dt \\ \cdot x=0 &\Rightarrow t=0 \\ \cdot x=1 &\Rightarrow t=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \arctan(t) \Big|_0^{3/2} = \frac{3}{2} \cdot \arctan\left(\frac{3}{2}\right) - 0$$

$$\Rightarrow I = \ln\left(\frac{13}{4}\right) + \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{3}{2}\right)$$