Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 14.7.09

Cognome: .... Nome: ....

Matricola: .... Corso di Laurea: ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

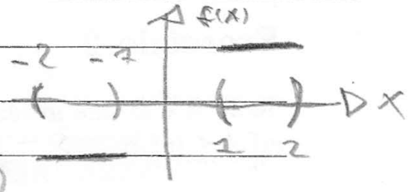
[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di derivabilità in $x_0 \in \mathbb{R}$ per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Se $f : D \to \mathbb{R}$ è tale che $f'(x) = 0$ per ogni $x \in D$, allora f è costante?

Risposta

(i) f è derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ se esiste finito $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =: f'(x_0)$



(ii) No! Definiamo p.e. $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$D := (-2,-1) \cup (1,2)$

$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{se } -2 < x < -1 \\ +1 & \text{se } 1 < x < 2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $f'(x) = 0 \ \forall x \in D$ ma f NON è costante

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di matrice Hessiana per $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) Enunciare il criterio di Hurwitz.

Risposta

(i) Se f è derivabile parzialmente 2 volte, allora la matrice

$$H_f(x,y) := \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

si chiama Hessiana di f.

(ii) Se $n=2$: $H = (h_{ij})_{2\times 2}$ è

definita positiva $\Leftrightarrow$ $h_{11} > 0$ e $\det(H) > 0$

definita negativa $\Leftrightarrow$ $h_{11} < 0$ e $\det(H) > 0$

indefinita $\Leftrightarrow$ $\det(H) < 0$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x \in D$. Che cosa significa che f è continua in x?

- [a] Per ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$, allora x_n converge a x.
- [b] Per ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in D, $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$.
- [c] Per ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x, $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$.
- [X d] Per ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in D convergente a x, $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$.

Risoluzione

Per la definizione di continuità

Esercizio 2

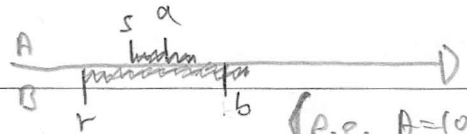
[3 punti]

Siano A e B due insiemi limitati non vuoti. Quale delle seguenti affermazioni è $\boxed{\text{equivalente}}$ a dire che $\inf A \leq \inf B$

- [a] Per ogni $a \in A$, esiste $b \in B$ t.c. $a \leq b$.
- [X b] Per ogni $\epsilon > 0$ e $b \in B$, esiste $a \in A$ t.c. $a \leq b + \epsilon$.
- [c] Per ogni $a \in A$ e $b \in B$, $a \leq b$.
- [d] Esiste b t.c. $a < b$ per ogni $a \in A$.

Risoluzione

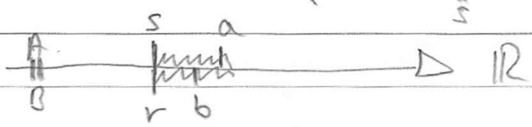
Non a) e non d)



$\underset{r}{\inf B} < \underset{s}{\inf A}$

(p.e. $A=(\underset{s}{0},1)$, $B=(\underset{r}{-2},2)$)

Non c)



$\inf A = \inf B$ ma non vale c)

(p.e. $A=B=(0,1)$)

Esercizio 3

[4 punti]

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è assolutamente convergente e $b_n \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

- [a] è convergente, ma non assolutamente convergente
- [b] è assolutamente convergente, ma non convergente ← impossibile! (poiché conv. assol. $\Rightarrow$ conv. semplice)
- [c] è divergente a $-\infty$
- [X d] non si può concludere nulla

Risoluzione

Visto che b_n può essere anche negativo non si può dire nulla. Oppure per esclusione: Se $a_n = b_n = \frac{1}{n^2}$ vale l'ipotesi ma non valgono a) e c).

Esercizio 4

[4 punti]

Trovare il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato nell'origine della funzione

$$f(x) = \ln(1 - x + x^2) \qquad t = -x + x^2 \sim -x$$

Risoluzione

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \stackrel{t}{=}$$

$\Rightarrow o(t) = o(x)$ per $t \to 0 \Leftrightarrow x \to 0$

$$= -x + x^2 - \frac{(-x+x^2)^2}{2} + \frac{(-x+x^2)^3}{3} + o(x^3)$$

$$= -x + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\Rightarrow T_3(x) = -x + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3.$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\int_0^4 \sqrt{1+\sqrt{x}}\, dx =: J$$

Risoluzione

Ci sono vari modi per risolvere questo integrale, p.e. sostituendo $t = \sqrt{x}$ e poi integrare per parti.

Più semplice è però la sostituzione

$$\sqrt{1+\sqrt{x}} =: t \Rightarrow x = (t^2-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 4 \Rightarrow t = \sqrt{3} \end{cases}$$

e $dx = 2(t^2-1)\cdot 2t\, dt$, quindi

$$J = \int_1^{\sqrt{3}} t \cdot 2(t^2-1)\cdot 2t\, dt = 4\int_1^{\sqrt{3}} (t^4 - t^2)\, dt =$$

$$= 4\cdot\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt{3}} = 4\cdot\left(\frac{(\sqrt{3})^5}{5} - \frac{(\sqrt{3})^3}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= 4\cdot\left(\frac{9}{5}\sqrt{3} - \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}}\sqrt{3} + \frac{2}{15}\right)$$

$$= \frac{16}{5}\sqrt{3} + \frac{8}{15}$$

Esercizio 6

[4 punti]

Trovare i punti critici della funzione $f(x, y) = 2x^3 + 6xy + 3y^2$ e classificarli.

Risoluzione

Pti. crit.: $f_x(x,y) = 6x^2 + 6y \overset{!}{=} 0 = 6(x^2 - x) = 6x(x-1)$

$f_y(x,y) = 6x + 6y \overset{!}{=} 0 \Rightarrow y = -x$

$\Rightarrow x = 0$ opp. $x = 1$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$ 4-($y = -x$) Quindi ci

$y = 0 \qquad y = -1$

sono 2 pti. critici: $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (1,-1)$

H_f:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$H_f(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(H_f(P_0)) < 0$$

$\Rightarrow P_0 =$ pto. di sella

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow f_{xx}(P_0) > 0 \text{ e}$$

$\det H_f(P_0) > 0$

$\Rightarrow P_1 =$ pto. di min. locale