Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea:** Informatica

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di derivata $f'(x_0)$ per una funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$.

(ii) Studiare la derivabilità in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = x \cdot \sqrt{|x|}$.

Risposta

(i) La derivata prima è data dal limite

$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ se tale limite converge.

(oppure $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$)

(ii) Da studiare è il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h} \cdot \sqrt{|h|}}{\cancel{h}} = 0$$

$\Rightarrow$ f è derivabile in $x_0 = 0$ con derivata $f'(0) = 0$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il Teorema degli Zeri.

(ii) Verificare che l'equazione $e^{\sin(x)} = 2 - x^2$ ammette una soluzione $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Risposta

(i) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua t.c. $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$.

(ii)
- $e^{\sin(x)} = 2 - x^2 \iff f(x) := e^{\sin(x)} - 2 + x^2 = 0$.
- $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ è continua
- $f(0) = e^{\sin(0)} - 2 + 0^2 = 1 - 2 = -1 < 0$
- $f(\frac{\pi}{2}) = e^{\sin(\pi/2)} - 2 + (\frac{\pi}{2})^2 = \underbrace{e^1 - 2}_{>0} + \underbrace{\frac{\pi^2}{4}}_{>0} > 0$

$\Rightarrow$ $\exists\, c \in (0, \frac{\pi}{2})$ t.c. $f(c) = 0 \Rightarrow e^{\sin(c)} = 2 - c^2$

Esercizio 1 **[5 punti]**

Calcolare, se esiste, il limite

$$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x) + x^3}{x\cdot(1-e^x)}$$

Risoluzione

Con Taylor:

- $1 - e^x \sim -x$ per $x \to 0$ (visto che $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$)

$\Rightarrow x\cdot(1-e^x) \sim x\cdot(-x) = -x^2$ per $x \to 0$

$\Rightarrow$ numeratore da sviluppare fino al 2° ordine

$$\ln(1+x) - \sin(x) + \underbrace{x^3}_{=o(x^2)} = \cancel{x} - \frac{x^2}{2} - \cancel{x} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{x\to 0} \frac{-\cancel{x^2}/2}{-\cancel{x^2}} = 1/2$$

(In alternativa si può anche usare de l'Hospital)

Esercizio 2 **[5 punti]**

Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+2)\cdot e^x \, dx$$

Risoluzione

Si usa integrazione per parti:

$$\int_0^{\pi/2} \underbrace{(x+2)}_{f}\cdot \underbrace{e^x}_{g'}\, dx = \underbrace{(x+2)}_{f}\cdot \underbrace{e^x}_{g}\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{1}_{f'}\cdot \underbrace{e^x}_{g}\, dx$$

$$= \left(\pi/2 + 2\right)\cdot e^{\pi/2} - (0+2)\cdot e^0 - e^x\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \left(\pi/2 + 2\right) e^{\pi/2} - 2 - \left(e^{\pi/2} - e^0\right) = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\cdot e^{\pi/2} - 1$$

Esercizio 3 [4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(0,2)$ per la funzione $f(x,y) = \dfrac{x\cdot\cos(x)}{y}$ e il versore $v = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

Risoluzione

Si usa il teorema del gradiente:

$$D_v f(0,2) = f_x(0,2)\cdot\frac{3}{5} + f_y(0,2)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$f_x(x,y) = \frac{1\cdot\cos(x) - x\cdot\sin(x)}{y} \Rightarrow f_x(0,2) = \frac{1}{2}$$

$$f_y(x,y) = -\frac{x\cdot\cos(x)}{y^2} \Rightarrow f_y(0,2) = 0$$

Quindi risulta $D_v f(0,2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + 0\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{10}$

Esercizio 4 [4 punti]

Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità nel punto $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2)}{x^2+y^2} - 2y & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

Continuità: • $f(x,y)$ è continua in $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$.

• Studiamo $\lim_{x\to 0} f(x, m\cdot x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\overbrace{\sin(x^2)}^{\sim x^2}}{x^2 + m^2\cdot x^2} - 2mx\right)$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cancel{x^2}\,1}{(1+m^2)\cdot\cancel{x^2}\,1} - \overbrace{2mx}^{\to 0}\right) = \frac{1}{1+m^2}$ dipende da $m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste $\Rightarrow$ f non è continua in $(0,0)$

$\Rightarrow$ f non è differenziabile in $(0,0)$

Derivabilità:

$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(h^2)}{h^2} - 2\cdot 0 - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\overbrace{\frac{\sin h^2}{h^2}}^{\to 1}\cdot\frac{1}{h}$ non esiste.

$\Rightarrow$ f non è derivabile rispetto ad x in $(0,0)$

$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$

$\Rightarrow$ f non è derivabile parzialmente in $(0,0)$.

Esercizio 5 **[6 punti]**

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = (x-2)\cdot e^{-x^2+3x}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

• **Dominio**: $X = \mathbb{R}$

• **Zeri**: $f(x) = 0 \iff x - 2 = 0 \iff x = 2$

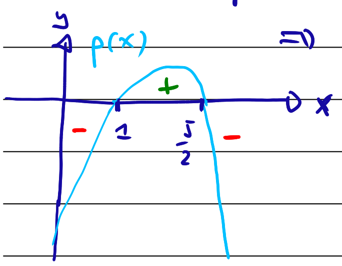
• **asintoti**: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\overbrace{x-2}^{\to\pm\infty}}{\underbrace{e^{x^2-3x}}_{\to+\infty}} \overset{(H)}{=} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{\underbrace{e^{x^2-3x}}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{(2x-3)}_{\to\pm\infty}} = 0$

$\Rightarrow y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$.

• **Estremi locali**: Gli unici candidati sono i punti critici.

$$f'(x) = 1\cdot e^{-x^2+3x} + (x-2)\cdot e^{-x^2+3x}\cdot(-2x+3)$$
$$= e^{-x^2+3x}\left(1 - 2x^2 + 4x + 3x - 6\right) = e^{-x^2+3x}\left(-2x^2+7x-5\right)$$
$$= 0 \iff p(x) := -2x^2 + 7x - 5 = 0$$
$$\iff x = x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-5)}}{2\cdot(-2)} = \frac{-7 \pm \overbrace{\sqrt{9}}^{=3}}{-4} = \begin{cases} 1 \\ 5/2 \end{cases}$$

studio del segno di $f'(x)$ = segno di $p(x)$ (visto che $e^{-x^2+3x} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$)



$\Rightarrow f'(x)$ cambia segno in

• $x = 1$ da "−" a "+" $\Rightarrow x = 1$ è un pto. di min. locale

• $x = \frac{5}{2}$ da "+" a "−" $\Rightarrow x = \frac{5}{2}$ è un pto. di max. locale

Grafico: $\left(f(0) = (0-2)\cdot e^0 = -2 \right)$