Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **15.5.09**

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di limite di una successione

(ii) Fare un esempio di successione oscillante non limitata

Risposta

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al limite $l \in \mathbb{R}$

$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|l - x_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

(ii) Sia $a_n = (-2)^n$. Allora $|a_n| = 2^n \to +\infty$, cioè $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è limitata. Inoltre

$$\left.\begin{array}{l} a_{2n} = (-2)^{2n} = 2^{2n} \to +\infty \\ a_{2n+1} = (-2)^{2n+1} = -2^{2n+1} \to -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ non diverge}$$

$\Rightarrow (a_n)$ è oscillante

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di derivate direzionali per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(ii) Enunciare il Teorema del gradiente

Risposta

(i) Sia $\underset{(v_1,v_2)}{\overset{\|}{v}} \in \mathbb{R}^2$ un versore (cioè $\|v\| = 1$), allora il limite, se esiste finito

$$(D_v f)(x_0, y_0) := \frac{f(x_0 + h\cdot v_1, y_0 + h\cdot v_2) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si chiama derivata direzionale di f in (x_0, y_0) nella direz. v.

(ii) Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è differenziabile nel punto interno $(x_0, y_0) \in D$, allora

$$(D_v f)(x_0, y_0) = \operatorname{grad} f(x_0, y_0) \underset{\text{prodotto scalare}}{\cdot} v$$

$$= f_x(x_0, y_0)\cdot v_1 + f_y(x_0, y_0)\cdot v_2$$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ continua e sia $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ per $x \in [0,1)$. Allora

- [a] se $\lim_{x\to 1^-} F(x) = +\infty$ allora $f(x) \sim \frac{1}{1-x}$ per $x \to 1^-$
- [b] se $\lim_{x\to 1^-} F(x)$ converge, allora anche $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ esiste
- ☒ [c] se $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ converge, allora anche $\lim_{x\to 1^-} F(x)$ esiste
- [d] nessuna delle precedenti

Risoluzione

Se $\lim_{x\to 1^-} f(x) =: \ell \in \mathbb{R}$ converge, allora si può estendere f sull'intervallo $[0,1]$ in maniera continua ponendo $f(1) = \ell$ $\Rightarrow F \in C^1[0,1] \Rightarrow$ c)

↑ teor. fondamentale

Esercizio 2

[3 punti]

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tre successioni tale che $a_n \le b_n \le c_n$ definitivamente. Dire quale delle seguenti affermazioni *non* è corretta

- ☒ [a] Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergono allora anche $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge
- [b] Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono infinitesime allora anche $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima
- [c] Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$ allora $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergono a $+\infty$
- [d] Se $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $-\infty$ anche $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergono a $-\infty$

Risoluzione

Non vale $\boxed{a}$ poiché manca l'ipotesi $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n$.

P.e. $\underbrace{-1-\frac{1}{n}}_{\to -1} \le \underbrace{(-1)^n}_{=:b_n} \le \underbrace{1+\frac{1}{n}}_{\to 1}$ $\forall n \ge 1$ ma $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non converge.

Esercizio 3

[4 punti]

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione non limitata tale che $0 < a_n < a_{n+2}$. Allora

- [a] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$ converge
- [b] Esiste $M > 0$ tale che per ogni $n > M$, $a_n > 1$
- ☒ [c] Per ogni $\varepsilon > 0$, per ogni $M > 0$ esiste $n > M$ tale che $a_n > \varepsilon$
- [d] Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che per ogni $n > M$ vale $a_n > \varepsilon$

Risoluzione

Basta l'ipotesi che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è limitata

$\Rightarrow \boxed{c}$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^3} \cdot \sin(x-2) =: L(x) = 0.$$

Risoluzione

Per $x \to 2^-$ segue $x-2 \to 0^-$ e quindi $\sin(x-2) \sim x-2$ $(x\to 2)$

$\Rightarrow L(x) \sim \dfrac{e^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^3} \cdot (x-2) = \dfrac{e^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^2}$ $(x \to 2)$. Poniamo

$t := \dfrac{1}{x-2}$, allora $x \to 2^- \Leftrightarrow t \to \dfrac{1}{0^-} = -\infty$. Inoltre

$\dfrac{e^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^2} = t^2 \cdot e^t \to 0$ per $t \to -\infty$.

Esercizio 5

[4 punti]

Trovare i punti critici di di $f(x,y) = -2 + x^3 - 4xy + 4y^2$ e classificarli.

Risoluzione

Punti critici:

$f_x(x,y) = 3x^2 - 4y \overset{!}{=} 0 = 3\cdot(2y)^2 - 4y = 4y(3y-1)$

$f_y(x,y) = -4x + 8y \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = 2y$

$\Rightarrow y = \begin{cases} 0 \\ 1/3 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \exists\, 2$ pti. critici

$P_0 = (0,0)$, $P_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Hessiana: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$H_f(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} =: H_0$. $\det(H_0) < 0 \Rightarrow P_0 =$ pto. di sella.

$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} =: H_1$. $(H_1)_{11} = 4 > 0$ & $\det H_1 > 0$

$\Rightarrow H_1$ è def. positiva

$\Rightarrow P_1$ è pto. di min. locale

Esercizio 6

[4 punti]

Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx \quad =: J$$

Risoluzione

Poniamo $t := \arctan(x) \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

cioè $\frac{dx}{1+x^2} = dt$. Quindi

$$\int \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\arctan^2(x)}{2} + c$$

$$\Rightarrow J = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{\arctan^2(x)}{2}\right|_0^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\arctan^2(b)}_{\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} - \underbrace{\arctan(0)}_{=0}\Big) = \frac{\pi^2}{8}$$