Analisi Matematica 1, Scritto 1-C. Durata della prova: 2 ore **15.5.09**

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di funzione integrabile secondo Riemann

(ii) Enunciare il Teorema fondamentale del calcolo integrale

Risposta

(i) Per $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata e una partizione P di $[a,b]$ sia $S(P,f) =$ somma superiore e $s(P,f) :=$ somma inferiore. f si chiama integrabile se

$$\sup\{s(P,f) \mid P \text{ partizione di } [a,b]\} = \inf\{S(P,f) \mid \text{—''—}\} =: \int_a^b f(x)\,dx$$

(ii) Se $f\in C[a,b]$, allora $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$, $x\in[a,b]$ è derivabile con $F'(x) = f(x)$ $\forall x\in[a,b]$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il Teorema di Fermat per una funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

(ii) Mostrare con un esempio che il teorema precedente è solo una condizione necessaria

Risposta

(i) Se $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ è un pto. di estremo locale di f e f è differenziabile in (x_0,y_0), allora $\operatorname{grad} f(x_0,y_0) = 0$

(ii) Sia $f(x,y) = x^2 - y^2$. Allora $\operatorname{grad} f(x,y) = (2x,-2y)$ $\Rightarrow$ $(x_0,y_0) = (0,0)$ è un pto. critico ma non è un pto. di estr. locale.

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $E = \{\underbrace{\frac{(-1)^n n}{n+1}}_{=:a_n} : n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Allora

- [a] $\sup E = +\infty$, $\nexists \min E$
- [b] $\sup E = 1$, $\min E = -1$
- [~~c~~] $\sup E = 1$, $\inf E = -1$
- [d] $\sup E = 1$, $\min E = 0$

Risoluzione

$|a_n| = \frac{n}{n+1} < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Inoltre per

$$\left.\begin{array}{l} n \text{ pari: } a_n = \frac{n}{n+1} \to 1 \\ n \text{ dispari: } a_n = \frac{-n}{n+1} \to -1 \end{array}\right\} \text{per } n \to +\infty \Rightarrow \sup E = 1, \inf E = -1 \ \& \ \min E, \max E \text{ non esistono}$$

Esercizio 2

[3 punti]

L'integrale improprio $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =: I$

- [a] diverge
- [~~b~~] è uguale a $\pi/2$
- [c] è uguale a $\pi/4$
- [d] è uguale a π

Risoluzione

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + c \Rightarrow I = \lim_{b \to 1^-} \left[\arcsin(b) - \overset{=0}{\cancel{\arcsin(0)}}\right]$$

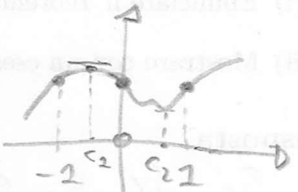
$$= \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 3

[4 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^2 tale che $f(-1) = f(0) = f(1)$, allora possiamo dedurne che

- [a] $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$
- [b] l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno una soluzione
- [c] f è pari
- [~~d~~] l'equazione $f''(x) = 0$ ha almeno una soluzione



Risoluzione

$f(-1) = f(0) \Rightarrow \exists\, c_1$ fra -1 e 0 t.c. $f'(c_1) = 0$

teorema di Rolle

$f(0) = f(1) \Rightarrow \exists\, c_2$ fra 0 e 1 t.c. $f'(c_2) = 0$

$\Rightarrow f'(c_1) = f'(c_2) \Rightarrow \exists\, c$ fra c_1 e c_2 t.c. $(f')'(c) = 0$

Rolle applic. a f' $\qquad (f')'(c) = f''(c)$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{1+\ln(x)-e^{x-1}}{(x-1)^2} =: L(x) = -1$$

Risoluzione

Poniamo $x-1=t$ allora $x\to 1 \Leftrightarrow t\to 0$. Quindi

$$L(x) = \frac{1+\ln(1+t)-e^t}{t^2} = \frac{\cancel{1}+\cancel{(t}-\frac{t^2}{2})-\cancel{1}-\cancel{t}-\frac{t^2}{2}+o(t^2)}{t^2}$$

$$= \frac{-t^2+o(t^2)}{t^2} \to -1 \text{ per } t\to 0$$

Esercizio 5

[4 punti]

Trovare i punti critici di di $f(x,y) = 5x^3 - 3y^5 + 15xy$ e classificarli

Risoluzione

Punti critici:

$$f_x(x,y) = 15x^2 + 15y = 0 = 15(y^8+y)$$

$$f_y(x,y) = -15y^4 + 15x = 0 \Rightarrow \boxed{x = y^4}$$

$$\Rightarrow y\cdot(y^7+1) = 0 \Rightarrow y = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ +1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists$ 2 punti critici: $P_0=(0,0)$, $P_1=(1,-1)$

Hessiana:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 30x & 15 \\ 15 & -60y^3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$H_f(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 15 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} =: H_0, \quad \det(H_0) < 0$$

$\Rightarrow P_0 =$ pto. di sella

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 30 & 15 \\ 15 & 60 \end{pmatrix} =: H_1.$$

$(H_1)_{11} = 30 > 0$ & $\det(H_1) > 0 \Rightarrow P_1 =$ pto. di minimo locale

Esercizio 6

[4 punti]

Calcolare

$$\int_1^e \frac{\tan(\ln(x))}{x}\,dx =: J$$

Risoluzione

Poniamo $\ln(x) = t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ cioè

$dt = \frac{dx}{x}$. Quindi

$$\int \frac{\tan(\ln(x))}{x}\,dx = \int \tan(t)\,dt = -\int \frac{\overbrace{-\sin(t)}^{=f'}}{\underbrace{\cos(t)}_{=f}}\,dt$$

$$= -\ln|\cos(t)| + c.$$

Inoltre vale: $x = 1 \Rightarrow t = \ln(1) = 0$

$x = e \Rightarrow t = \ln(e) = 1.$

$$\Rightarrow J = -\ln|\cos(t)|\Big|_0^1 = -\ln|\cos(1)| + \overbrace{\ln|\underbrace{\cos(0)}_{=1}|}^{=0}$$

$$= -\ln(\cos(1))$$