Analisi Matematica 1. Durata della prova: 2 ore **17.2.26**

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea:** Ingegneria dell'Informazione

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di continuità di $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ nel punto $x_0 \in (a, b)$.

(ii) Studiare la continuità della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{se } x > 0, \\ \cos(x^2) & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Risposta

(i) f è continua in $x_0 \in (a,b)$ se $\forall$ successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (a,b)$ con $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ segue che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

(Oppure: se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c. $|f(x_0) - f(x)| < \delta$ $\forall x \in (a,b)$ con $|x - x_0| < \delta$.
Oppure: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$)

(ii)
- f è continua in ogni $x \neq 0$. f è continua in $x_0 = 0$ se $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0) = \cos(0^2) = \lim_{x\to 0^-} \cos(x^2) = \cos(0)$ $\Rightarrow$ f è continua anche in $x_0 = 0$.

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il Teorema di Rolle.

(ii) Verificare che $f(x) := x^3 + x^2 - 2x + 1$ ammette almeno un punto critico nell'intervallo $[-2, 1]$.

Risposta

(i) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua e derivabile in (a,b) con $f(a) = f(b)$, allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = 0$.

(ii)
- $f : [-2,1] \to \mathbb{R}$ è continua e derivabile in $(-2,1)$.

Inoltre,
- $f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - 2(-2) + 1 = -8 + 4 + 4 + 1 = 1$
- $f(1) = 1^3 + 1^2 - 2\cdot 1 + 1 = 1 = f(-2)$

$\Rightarrow$ (per Rolle) $\exists\, c \in (-2,1)$ t.c. $f'(c) = 0$

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to\pi} \frac{x^3 - 3\pi^2 x + 2\pi^3}{1+\cos(x)} =: \ell$$

Risoluzione

Si usa la regola di de l'Hospital:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{x^3-3\pi^2\cdot x+2\pi^3}{1+\cos(x)} \qquad \left(= \frac{\pi^3 - 3\pi^2\cdot\pi + 2\pi^3}{1+\cos(\pi)} = \frac{0}{0} \right)$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{3x^2-3\cdot\pi^2}{-\sin(x)} \qquad \left(= \frac{3\pi^2-3\pi^2}{-\sin(\pi)} = \frac{0}{0} \right)$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{6x}{-\cos(x)} = \frac{6\cdot\pi}{\underbrace{-\cos(\pi)}_{=-(-1)=1}} = 6\pi$$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$\int_0^1 4x\cdot\ln(\sqrt{x})\,dx =: I$$

$4x\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln(x) = 2x\cdot\ln(x)$

Risoluzione

- $I = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 2x\cdot\ln(x)\,dx$
- $\int \underset{f'}{2x}\cdot\underset{g}{\ln(x)}\,dx \overset{\text{i.p.p.}}{=} \underset{f}{x^2}\cdot\underset{g}{\ln(x)} - \int \underset{f}{x^2}\cdot\underset{g'}{\frac{1}{x}}\,dx$ $\quad = x$

$$= x^2\cdot\ln(x) - \frac{x^2}{2} + c$$

$\to I = \lim_{a\to 0^+}\left[x^2\cdot\ln(x) - \frac{x^2}{2}\right]_a^1 =$ $\quad \to 0$ per $a\to 0^+$ (limite notevole: $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha\cdot\ln(x) = 0 \quad \forall\alpha>0$)

$$= \lim_{a\to 0^+}\left(1^2\cdot\underbrace{\ln(1)}_{=0} - \frac{1^2}{2} - a^2\cdot\ln(a) + \frac{a^2}{2}\right)$$

$\hookrightarrow \frac{0^2}{2}$ per $a\to 0^+$

$$= -\frac{1}{2}$$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare la retta tangente al grafico di $f(x) := \dfrac{6x}{x^2+2}$ nel punto $x_0 := 1$.

Risoluzione

- $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$
- $f(x_0) = \dfrac{6\cdot 1}{1^2+2} = \dfrac{6}{3} = 2$
- $f'(x) = \dfrac{(x^2+2)\cdot 6 - 2x\cdot 6x}{(x^2+2)^2} = \dfrac{6x^2+12-12x^2}{(x^2+2)^2} = \dfrac{-6x^2+12}{(x^2+2)^2}$

$\Rightarrow f'(x_0) = \dfrac{-6\cdot 1^2+12}{(1^2+2)^2} = \dfrac{-6+12}{9} = \dfrac{\cancel{6}^{2}}{\cancel{9}_{3}} = \dfrac{2}{3}$

Quindi $t(x) = 2 + \frac{2}{3}\cdot(x-1)$

$= \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la derivabilità parziale della funzione $f(x, y) := |3 - y| \cdot e^{|x|}$ nel punto $(x_0, y_0) = (0, 3)$.

Risoluzione

- $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(\underbrace{x_0+h}_{h}, \underbrace{y_0}_{3}) - f(x_0,y_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\overbrace{|3-3|}^{=0}\cdot e^{h} - \overbrace{|3-3|}^{=0}\cdot e^{0}}{h}$

$= 0 = f_x(0,3)$

- $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(\overbrace{x_0}^{0}, \overbrace{y_0+h}^{3+h}) - f(x_0,y_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\overbrace{|3-(3+h)|}^{=|h|}\cdot \overbrace{e^{0}}^{1} - \overbrace{|3-3|}^{0}\cdot e^{0}}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|h|}{h}$ non converge

$\Rightarrow$ f non è derivabile rispetto ad y in $(0,3)$

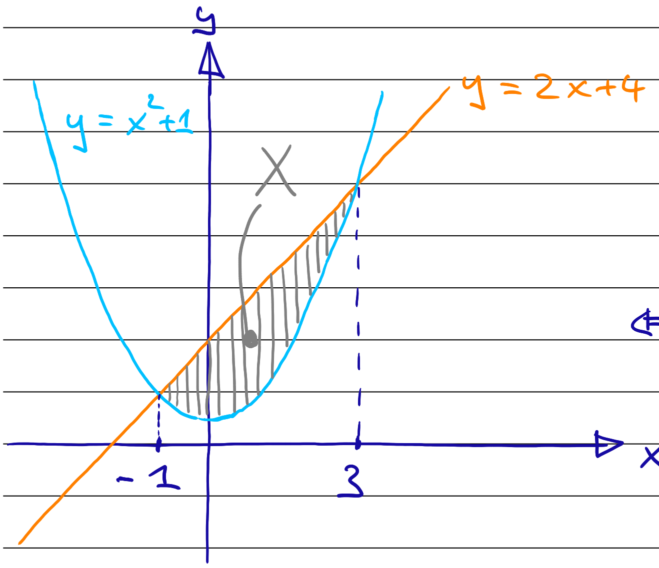
Quindi f è derivabile rispetto x con $f_x(0,3) = 0$ ma non rispetto ad y nel punto $(x_0,y_0) = (0,3)$.

Esercizio 5

[6 punti]

Disegnare il dominio $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+1 \le y \le 2x+4\}$ e calcolare la sua misura $|X|$.

Risoluzione



Calcolo intersezione tra la parabola $y = x^2+1$ e la retta $y = 2x+4$:

$x^2+1 = 2x+4 \iff$

$x^2+1-2x-4 = x^2-2x-3 = 0$

$\iff \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2+4\cdot 3}}{2} = \frac{2\pm 4}{2}$

$= \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$

Quindi, $X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[-1,3],\ x^2+1\le y\le 2x+4\}$

è y-semplice.

$$\Rightarrow \quad |X| = \iint_X 1\,dx\,dy = \int_{x=-1}^{3}\int_{y=x^2+1}^{2x+4} 1\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=-1}^{3} [y]_{y=x^2+1}^{2x+4}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{3} \overbrace{2x+4-x^2-1}^{=-x^2+2x+3}\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^{3}$$

$$= \overbrace{-\frac{3^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{3}}+3^2}^{=0} + 3\cdot 3 - \left(-\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2+3\cdot(-1)\right)$$

$$= 9-\left(\frac{1}{3}+1-3\right) = 11-\frac{1}{3} = \frac{33-1}{3}$$

$$= \frac{32}{3}$$