

Cognome..... Nome.....

Matricola..... Corso di Laurea: Ingegneria dell'Informazione

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

- (i) Dare la definizione di derivata $f'(x_0)$ per una funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$.
- (ii) Studiare la derivabilità in $x_0 := 0$ della funzione $f(x) := \sin(x) \cdot \sqrt{|x|}$.

Risposta

(i)
$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$
 (oppure $= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$) se questo limite converge

(ii) In questo caso si ottiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h) \cdot \sqrt{|h|}}{h} = 1 \cdot 0 = 0$$

(Note: In the original image, 'sin(h)' is circled in red with an arrow pointing to '1', and 'sqrt|h|' is circled in red with an arrow pointing to '0'.)

$\Rightarrow f$ è derivabile in $x_0 = 0$ con $f'(0) = 0$

Domanda 2

[4 punti]

- (i) Enunciare il teorema degli zeri..
- (ii) Verificare che l'equazione $e^x = x^3 + 2x$ ammette una soluzione nell'intervallo $[0, 1]$.

Risposta

(i) Se $f \in C[a, b]$ con $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora $\exists c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

(ii) • $e^x = x^3 + 2x \Leftrightarrow f(x) := e^x - x^3 - 2x = 0$
 • $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua
 • $f(0) = e^0 - 0^3 - 2 \cdot 0 = 1 > 0$, $f(1) = e^1 - 1^3 - 2 \cdot 1 = e - 3 < 0$ *(Note: '2, 1...' is written above the '2' in the second term of f(1))*

$\stackrel{(i)}{\Rightarrow} \exists c \in (0, 1) \text{ t.c. } f(c) = 0 \Leftrightarrow e^c = c^3 + 2 \cdot c$

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot e^x - \sin(x) - x^2}{\sinh(x^3)} =: l$$

Risoluzione

• $\sinh(x^3) \sim x^3$ per $x \rightarrow 0$, quindi il denominatore è da sviluppare fino al 3° ordine:

$$\begin{aligned} x \cdot e^x - \sin(x) - x^2 &= x \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - x^2 \\ &= \cancel{x} + \cancel{x^2} + \frac{x^3}{2} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} - \cancel{x^2} + o(x^3) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{3}{6} + \frac{1}{6}\right) x^3 + o(x^3) = \frac{2}{3} x^3 + o(x^3)$$

per $x \rightarrow 0$

$$\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3} x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{2}{3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{2}{3}$$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale

$$I := \int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x}) dx$$

Risoluzione

Prima si usa la sostituzione $\sqrt{x} = t \Leftrightarrow x = t^2$

$$\Rightarrow dx/dt = 2t \Rightarrow dx = 2t dt$$

$$\text{Quindi vale } \int \cos(\sqrt{x}) dx = \int 2t \cdot \cos(t) dt$$

Integrazione per parti

$$= 2t \cdot \sin(t) - \int 2 \cdot \sin(t) dt = 2t \cdot \sin(t) + 2 \cos(t) + c$$

$$= 2\sqrt{x} \cdot \sin(\sqrt{x}) + 2 \cos(\sqrt{x}) + c$$

$$\Rightarrow I = 2 \cdot \left[\sqrt{x} \cdot \sin(\sqrt{x}) + \cos(\sqrt{x}) \right]_0^{\pi^2}$$

$$= 2 \cdot \left[\pi \cdot \sin(\pi) + \cos(\pi) - \sqrt{0} \cdot \sin(\sqrt{0}) - \cos(\sqrt{0}) \right]$$

$$= 2 \cdot (-1 - 1) = -4$$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(1, 2)$ per la funzione $f(x, y) := \frac{x \cdot y^2 + 2}{x + 1}$ e il versore $v := (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$.

\parallel
(v_x, v_y)

Risoluzione

$$\bullet D_v f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot v_x + f_y(x_0, y_0) \cdot v_y$$

$$\bullet f_x(x, y) = \frac{(x+1) \cdot y^2 - 1 \cdot (x \cdot y^2 + 2)}{(x+1)^2} = \frac{y^2 - 2}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f_x(1, 2) = \frac{2^2 - 2}{(1+1)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet f_y(x, y) = \frac{2xy}{x+1} \Rightarrow f_y(1, 2) = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\Rightarrow D_v f(1, 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{2+6}{5} = \frac{8}{5}$$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità parziale e la differenziabilità in $(0, 0)$ della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cosh(y) - 1}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ \frac{1}{2} & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Risoluzione

• Ponendo $y = 0$ segue

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh(0) - 1}{2x^2 + 0^2} = 0 \neq f(0, 0)$$

$\Rightarrow f$ non è continua in $(0, 0) \Rightarrow f$ non è differenziabile in $(0, 0)$

Derivabilità: • $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh(0) - 1}{h^2 + 0^2} - \frac{1}{2}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1/2}{h} \text{ non converge}$$

$\Rightarrow f$ non è derivabile rispetto a x in $(0, 0)$

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh(h) - 1}{2h^2 + 0^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{h^2}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh(h) - 1 - \frac{h^2}{2}}{2 \cdot h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{h^2}{2} + o(h^3) - 1 - \frac{h^2}{2}}{h^3} = 0$$

$\Rightarrow f$ è derivabile rispetto a y in $(0, 0)$ con $f_y(0, 0) = 0$.

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = (2x^2 + 5x + 2) \cdot e^{-x}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

• Domínio X : tutto \mathbb{R}

• Zeri: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 3}{4}$
 $= -2$ opp. $-\frac{1}{2}$

• Asintoti: non ci sono asintoti verticali poiché f è continua su tutto \mathbb{R} .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5x + 2}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 + 5x + 2) \cdot e^{-x} = +\infty \Rightarrow$ possibilità di un asintoto obliquo.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 5x + 2}{x} \cdot e^{-x} = -\infty \Rightarrow$ non c'è un asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$.

• Estremi Locali: Gli unici candidati per i punti di estremo locale sono i punti critici.

$$f'(x) = (2x^2 + 5x + 2) \cdot e^{-x} \cdot (-1) + (4x + 5) \cdot e^{-x}$$

$$= (-2x^2 - x + 3) \cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 4 \cdot 2 \cdot 3}}{-4} = \frac{1 \pm 5}{-4} = \begin{cases} -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \\ \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

Inoltre vale: segno $f'(x) =$ segno di $p(x) := -2x^2 - x + 3$

Quindi $f'(x)$ cambia segno in

• $x = -\frac{3}{2}$ da "−" a "+" $\Rightarrow x = -\frac{3}{2}$ è un pto. di min locale

• $x = 1$ da "+" a "−" $\Rightarrow x = 1$ è un pto. di max locale

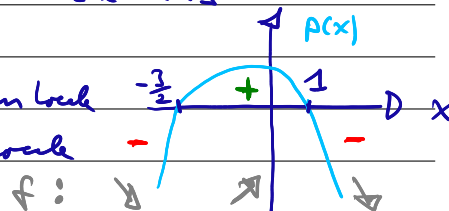


Grafico: $f(0) = 2 \cdot e^0 = 2$

