Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea:** Ingegneria dell'Informazione

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di derivata $f'(x_0)$ per una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$.

(ii) Studiare la derivabilità in $x_0 := 0$ della funzione $f(x) := \sinh(x) \cdot \sqrt{|x|}$.

Risposta

(i) $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

$\left(\text{oppure} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$ se questo limite converge

(ii) In questo caso si ottiene

$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{\sinh(h)}{h}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sqrt{|h|}}_{\to 0} = 1 \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow f$ è derivabile in $x_0 = 0$ con $f'(0) = 0$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri..

(ii) Verificare che l'equazione $3 - x^2 = e^x$ ammette una soluzione nell'intervallo $[0, 1]$.

Risposta

(i) Se $f \in C[a,b]$ con $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora $\exists\, c \in (a,b)$ tale che $f(c) = 0$.

(ii)
- $3 - x^2 = e^x \iff f(x) := 3 - x^2 - e^x = 0$
- $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è continua
- $f(0) = 3 - 0^2 - e^0 = 3 - 1 = 2 > 0$, $f(1) = 3 - 1^2 - e^1 = 2 - \underset{\approx 2{,}7\ldots}{e} < 0$

$\overset{(i)}{\Rightarrow} \exists\, c \in (0,1)$ t.c. $f(c) = 0 \iff 3 - x^2 = e^x$

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+\sinh(x)-x\cdot e^x}{\sin(x^3)} =: \ell$$

Risoluzione

- $\sin(x^3) \sim x^3$ per $x \to 0$, quindi il numeratore è da sviluppare fino al 3° ordine:

- $$x^2+\sinh(x)-x\cdot e^x = x^2+\underbrace{\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}_{=\sinh(x)}-x\cdot\underbrace{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}_{=e^x}$$

$x\cdot o(x^2)=o(x^3)$

$$= \cancel{x^2}+\cancel{x}+\frac{x^3}{6}-\cancel{x}-\cancel{x^2}-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

$$=\left(\frac{1}{6}-\frac{3}{6}\right)\cdot x^3+o(x^3) = -\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

per $x\to 0$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{x\to 0}\frac{-1/3\cdot x^3+o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{3}+\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3}}_{=0} = -\frac{1}{3}$$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale

$$I := \int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})\,dx$$

Risoluzione

Prima si usa la sostituzione $\sqrt{x}=t \Leftrightarrow x=t^2$

$\Rightarrow$ • $dx/dt = 2t \Rightarrow dx = 2t\,dt$

Quindi risulta $\int \sin(\sqrt{x})\,dx = \int \underset{f}{2t}\cdot \underset{g'}{\sin(t)}\,dt$

integrazione per parti

$$= -\underset{f}{2t}\cdot\underset{g}{\cos(t)}+\int \underset{f'}{2}\cdot\underset{g}{\cos(t)}\,dt = -2t\cdot\cos(t)+2\sin(t)+c$$

$$= -2\sqrt{x}\cdot\cos(\sqrt{x})+2\sin(\sqrt{x})+c$$

$$\Rightarrow I = 2\cdot\left[-\sqrt{x}\cdot\cos(\sqrt{x})+\sin(\sqrt{x})\right]_0^{\pi^2}$$

$$= 2\cdot\left[-\pi\cdot\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}+\underbrace{\sin(\pi)}_{=0}-\left(\underbrace{-\sqrt{0}\cdot\cos(0)}_{=0}+\underbrace{\sin(0)}_{=0}\right)\right]$$

$$= 2\cdot\pi$$

Esercizio 3 [4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(2,1)$ per la funzione $f(x,y) := \dfrac{x^2\cdot y+1}{y+1}$ e il versore $v := (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

$= (v_x, v_y)$

Risoluzione

- $D_v f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\cdot v_x + f_y(x_0,y_0)\cdot v_y$

- $f_x(x,y) = \dfrac{2xy}{y+1} \Rightarrow f_x(1,2) = \dfrac{2\cdot 2\cdot 1}{1+1} = \dfrac{4}{2} = 2$

- $f_y(x,y) = \dfrac{(y+1)\cdot x^2 - 1\cdot(x^2\cdot y+1)}{(y+1)^2} = \dfrac{x^2-1}{(y+1)^2} \Rightarrow$

$f_y(2,1) = \dfrac{2^2-1}{(1+1)^2} = \dfrac{3}{4}$

$$\Rightarrow D_v f(1,2) = 2\cdot\frac{3}{5} + \frac{3}{\cancel{4}_{1}}\cdot\frac{\cancel{4}^{1}}{5} = \frac{6+3}{5} = \frac{9}{5}$$

Esercizio 4 [4 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità parziale e la differenziabilità in $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2+2y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0), \\ \dfrac{1}{2} & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

- Ponendo $x=0$ segue

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{1-\cos(0)}^{=0}}{0^2+2y^2} = 0 \neq f(0,0)$$

$\Rightarrow$ f non è continua in $(0,0)$ $\Rightarrow$ f non è differenziabile in $(0,0)$

Derivabilità: • $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1-\cos(h)}{2h^2+0^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{h^2}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos(h)-\frac{h^2}{2}}{2\cdot h^3} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+\cancel{\frac{h^2}{2}}+o(h^3)-\cancel{\frac{h^2}{2}}}{2\cdot h^3} = 0$$

$\Rightarrow$ f è derivabile rispetto x in $(0,0)$ con $f_x(0,0)=0$.

- $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\overbrace{\cos(0)-1}^{=0}}{h^2+0^2}-\frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1/2}{h}$ non converge

$\Rightarrow$ f non è derivabile rispetto a y in $(0,0)$

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = \left(2x^2 - 5x + 2\right) \cdot e^x$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- **Dominio** X: tutto $\mathbb{R}$
- **Zeri**: $f(x) = 0 \iff 2x^2 - 5x + 2 = 0 \iff x = \dfrac{5 \pm \overbrace{\sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 2\cdot 2}}^{=\sqrt{25-16}=3}}{2\cdot 2} = \dfrac{5\pm 3}{4}$

  $= 2$ opp. $\frac{1}{2}$
- **Asintoti**: non ci sono asintoti verticali poiché $X = \mathbb{R}$ e f è continua

  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-5x+2}{e^{-x}} = 0 \Rightarrow y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

  $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \overbrace{(2x^2-5x+2)}^{\to+\infty} \cdot \overbrace{e^x}^{\to+\infty} = +\infty \Rightarrow$ possibilità di un asintoto obliquo.

  $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \overbrace{\dfrac{2x^2-5x+2}{x}}^{\to+\infty} \cdot \overbrace{e^x}^{+\infty} = +\infty \Rightarrow$ non c'è un asintoto obliquo per $x\to+\infty$.
- **Estremi Locali**: Gli unici candidati per i punti di estremo locale sono i punti critici.

$f'(x) = (2x^2-5x+2)\cdot e^x + (4x-5)\cdot e^x$

$= (2x^2 - x - 3)\cdot \overbrace{e^x}^{>0\ \forall x\in\mathbb{R}} = 0 \iff x = \dfrac{1 \pm\sqrt{(-1)^2+4\cdot 2\cdot 3}}{4} = \dfrac{1\pm 5}{4} = \begin{cases} -\frac{4}{4} = -1 \\ \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$

Inoltre vale: segno $f'(x)$ = segno di $p(x) := 2x^2 - x - 3$

Quindi $f'(x)$ cambia segno in

- $x = \frac{3}{2}$ da "$-$" a "$+$" $\Rightarrow x = \frac{3}{2}$ è un pto. di min locale
- $x = -1$ da "$+$" a "$-$" $\Rightarrow x = -1$ è un pto. di max locale

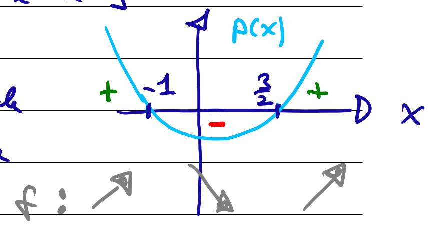

Grafico: $f(0) = 2\cdot e^0 = 2$