Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea:** Ingegneria dell'Informazione

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

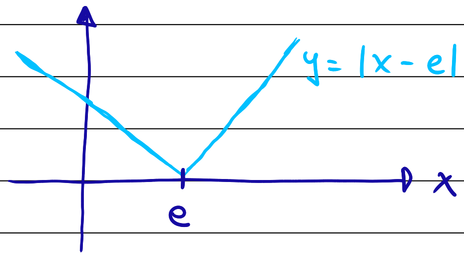
(i) Dare la definizione di continuità in $x_0 \in (a,b)$ di una funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$.

(ii) Fare l'esempio di una funzione continua ma non derivabile in $x_0 = e$.

Risposta

(i) f è continua in x_0 se $\forall$ successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (a,b)$ con $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ segue $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

(ii) P.e. $f(x) = |x-e|$ è continua ma non derivabile in $x_0 = e$



Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il Teorema di Lagange.

(ii) Trovare un punto di Lagrange della funzione $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3 - x$.

Risposta

(i) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in (a,b). Allora $\exists\ c \in (a,b)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(ii)
- f è derivabile in $[a,b]$
- $f(a) = f(0) = 0$, $f(b) = f(2) = 2^3 - 2^1 = 6$
- $f'(x) = 3x^2 - 1$

Quindi cerchiamo $x = c \in (0,2)$ t.c.

$$3\cdot c^2 - 1 \overset{!}{=} \frac{6-0}{2-0} = 3 \iff 3\cdot c^2 = 4 \iff c^2 = \frac{4}{3}$$

$$\iff c = +\sqrt{\frac{4}{3}} = \underline{\underline{+\frac{2\sqrt{3}}{3}}}$$ (N.B.: la soluzione $c = -\frac{4}{3} \notin (0,2)$)

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\left(e^x-\cos(x)-\sin(x)\right)}{\ln(1+x)\cdot\left(\cos(x)-1\right)} =: \ell$$

Risoluzione

Denominatore: $\ln(1+x)\sim x$, $\cos(x)-1\sim -\frac{x^2}{2}$ per $x\to 0$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}^{1}\cdot(e^x-\cos(x)-\sin(x))}{-\frac{x^{\cancel{3}\,2}}{2}}$$

$\Rightarrow$ Numeratore da sviluppare fino al 2° ordine.

Numeratore: $e^x-\cos(x)-\sin(x) = \cancel{1}+\cancel{x}+\frac{x^2}{2}\cancel{-1}+\frac{x^2}{2}\cancel{-x}+o(x^2)$
$= x^2+o(x^2)\sim x^2$ per $x\to 0$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}\,1}{-\frac{\cancel{x^2}\,1}{2}} = -2$$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx =: I$$

Risoluzione

Si usa il metodo di sostituzione:

Sia $t:=\sqrt{x+1} \Rightarrow$
- $t^2 = x+1 \Rightarrow x = t^2-1$
- $\frac{dx}{dt} = 2t \Rightarrow dx = 2t\,dt$
- $x=0 \Rightarrow t=\sqrt{0+1}=1$
  $x=3 \Rightarrow t=\sqrt{3+1}=2$

Quindi vale

$$I = \int_1^2 \frac{t^2-1}{\cancel{t}\,1}\cdot 2\cancel{t}^{\,1}\,dt = 2\cdot\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_1^2$$

$$= 2\cdot\left(\frac{2^3}{3}-2-\frac{1^3}{3}+1\right) = 2\cdot\left(\frac{\overbrace{8-1}^{=7}}{3}-\frac{3}{3}\right)$$

$$= 2\cdot\frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare il piano tangente $p(x, y)$ nel punto $(x_0, y_0) = (1, 2)$ della funzione $f(x, y) = \dfrac{3y}{x^2 + y}$.

Risoluzione

- $p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$

- $f(x_0,y_0) = \dfrac{3\cdot 2}{1^2+2} = \dfrac{6}{3} = 2$

- $f_x(x,y) = \dfrac{-3y\cdot 2x}{(x^2+y)^2} \Rightarrow f_x(x_0,y_0) = \dfrac{-6\cdot 1\cdot 2}{(1^2+2)^2} = \dfrac{-12}{9} = \dfrac{-4}{3}$

$f_y(x,y) = \dfrac{(x^2+y)\cdot 3 - 1\cdot 3y}{(x^2+y)^2} = \dfrac{3x^2}{(x^2+y)^2} \Rightarrow f_y(x_0,y_0) = \dfrac{3\cdot 1^2}{9} = \dfrac{1}{3}$

Quindi risulta $p(x,y) = 2 - \frac{4}{3}\cdot(x-1) + \frac{1}{3}\cdot(y-2)$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare derivabilità parziale rispetto ad x e y in $(x_0, y_0) = (0, 0)$ della funzione

$$f(x, y) := |x| \cdot \sqrt[3]{x \cdot (y + 1)}$$

Risoluzione

- $f(h,0) = |h|\cdot\sqrt[3]{h}$, $f(0,h) = 0 \quad \forall h \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$f_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \underbrace{\dfrac{|h|}{h}}_{\text{limitato}} \cdot \underbrace{\sqrt[3]{h}}_{\to 0 \text{ per } h \to 0} = 0$

$f_y(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\overbrace{f(0,h) - f(0,0)}^{=0}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0$

$\Rightarrow f$ è derivabile in $(0,0)$ con $\text{grad}\, f(0,0) = (0,0)$.

Esercizio 5 **[6 punti]**

Trovare il dominio, zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

• Dominio: $X = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

• Zeri: $f(x) = 0 \iff x^2 + x - 2 = 0 \iff x = x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \overbrace{\sqrt{1+4\cdot 2}}^{=3}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$

• Asintoti: $\lim\limits_{x \to 2^{\pm}} f(x) = \dfrac{2^2+2-2}{0^{\pm}} = \pm\infty$

$\Rightarrow x = 2$ è un asintoto verticale di f.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x-2}{x^2-2x} = 1 =: m,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - m\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+x-2}{x-2} - x\cdot\frac{x-2}{x-2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\overbrace{\cancel{x^2}+x-2-\cancel{x^2}+2x}^{=3x-2}}{x-2}\right) = 3$$

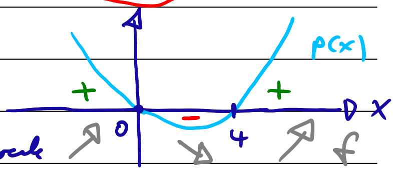
$\Rightarrow y = x+3$ è un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

Estremi Locali: Gli unici candidati per punti di estremo locale sono i punti critici.

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(x-2)\cdot(2x+1)}^{=2x^2-3x-2} - 1\cdot(x^2+x-2)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = \frac{x\cdot(x-4)}{(x-2)^2}, \quad (x-2)^2 > 0 \ \forall x \neq 2$$

$= 0 \iff x = 0$ oppure $x = 4$

Segno di $f'(x)$ = segno $p(x) := x\cdot(x-4)$



$\Rightarrow f'(x)$ cambia segno in

• $x = 0$ da "+" a "−" $\Rightarrow x = 0$ è un punto di max locale

• $x = 4$ da "−" a "+" $\Rightarrow x = 4$ —— " —— min locale

• $f(0) = \dfrac{-2}{-2} = 1$, $f(4) = 9$

Grafico: