Analisi Matematica 1, Scritto 2-B. Durata della prova: 2 ore 24.2.10

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) Enunciare il Teorema del gradiente.

Risposta

(i) cfr. Compito 2-A

(ii)

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il teorema di derivabilità della funzione inversa.

(ii) Calcolare $(f^{-1})'(y)$ per $y = 1$ ove $f(x) = x^3 + 2x + 1$.

Risposta

(i) cfr. compito 2-A

(ii) $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{3x^2+2}$ dove $y = f(x)$.

Visto che $y = 1 = f(0)$ segue

$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$

Esercizio 1 **[3 punti]**

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua. Allora quale delle seguenti affermazioni é *vera*

- [a] se A é limitato, $f(A)$ é limitato
- [$\cancel{b}$] se A é un intervallo chiuso e limitato, $f(A)$ é un intervallo chiuso e limitato
- [c] se A é un intervallo aperto, $f(A) = (\inf_A f, \sup_A f)$
- [d] $f(A) \subseteq (\inf_A f, \sup_A f)$.

Risoluzione

b) è vera per il teorema di Weierstraß e il teorema dei valori intermedi.

Esercizio 2 **[3 punti]**

Sia $a_n \sim b_n$ per $n \to \infty$ e $\lim_{n\to+\infty} c_n = 1$. Allora per $n \to +\infty$

[a] $\lim_{n\to+\infty} (c_n)^{a_n} = 1$ [b] $a_n + b_n \sim 2a_n$ [c] $a_n^{b_n c_n} \sim a_n^{b_n}$ [$\cancel{d}$] $a_n^2 b_n \sim c_n^2 a_n b_n^2$

Risoluzione

Da $\lim_{n\to+\infty} c_n = 1$ segue $c_n \sim 1$ $(n\to+\infty)$. Quindi per il principio di sost. segue $a_n^2 \cdot b_n = \underbrace{1^2}_{\sim c_n^2} \cdot a_n \cdot \underbrace{a_n}_{\sim b_n} \cdot b_n \sim c_n^2 \cdot a_n \cdot b_n^2$ $(n\to+\infty)$

Esercizio 3 **[3 punti]**

Dato $E = \left\{ \frac{n+2}{n^2+1} : n = 0, 1, 2, 3, \ldots \right\}$, allora

[a] $\inf E = 0$, $\sup E = +\infty$ [b] $\inf E = 0$, $\max E = 2$

[c] $\inf E = -\infty$, $\sup E = 2$ [d] $\inf E = 0$, $\sup E = \frac{3}{2}$

Risoluzione

cfr. Capitolo 2-A.

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+e^{-x^2}-2\cos(x)}{x^2\cdot\sin^2(x)} =: h(x)$$

$x^2 \cdot \sin^2(x) \sim x^2 \cdot x^2 = x^4$

Risoluzione

Dobbiamo sviluppare il numeratore fino al 4° ordine:

$\bullet\ e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2) \Rightarrow e^{-x^2} = 1-x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)$

$\bullet\ 2\cdot\cos(x) = 2\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right) = 2-x^2+\frac{x^4}{12}+o(x^4)$

$\Rightarrow 1+e^{-x^2}-2\cos(x) = \cancel{1}+\cancel{1}-\cancel{x^2}+\frac{x^4}{2}-\cancel{2}+\cancel{x^2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)$
$= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right)x^4+o(x^4) = \frac{5}{12}x^4+o(x^4)$
$\sim 5/12\, x^4 \quad (x\to 0)$

$\Rightarrow h(x) \sim \frac{5/12\, x^4}{x^4} = 5/12 \quad (x\to 0)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} h(x) = \underline{\underline{5/12}}$

Esercizio 5

[4 punti]

Provare attraverso il principio di induzione che $2n+1 < n^2$ per ogni $n \geq 3$.

Risoluzione

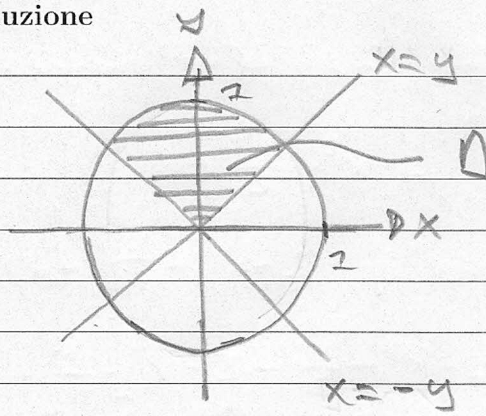
Cfr. Compito 2-A.

Esercizio 6

[5 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1,\ -y \le x \le y\}$ e calcolare $\iint_D y\,dx\,dy. =: \underline{I}$

Risoluzione



D espresso in coordinate polari diventa

$D' = \{(\rho,\vartheta) \mid 0 \le \rho \le 1,\ \pi/4 \le \vartheta \le 3/4\pi\}$

$= [0,1] \times [\pi/4, 3\pi/4]$. Quindi

$$I = \int_0^1 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \rho \cdot \sin(\vartheta) \cdot \rho \, d\vartheta \, d\rho$$

$$= \int_0^1 \rho^2 \, d\rho \cdot \int_{\pi/4}^{3/4\pi} \sin(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= \left(\frac{\rho^3}{3} \Big|_0^1 \right) \cdot \left(-\cos(\vartheta) \Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos(\pi/4) \right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{3}$$