Analisi Matematica. **Durata della prova: 2 ore** **27.1.26**

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** Informatica

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesima.

(ii) Fare l'esempio di una successione infinitesima non monotona.

Risposta

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

(opp: se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n| < \varepsilon \;\; \forall n \geq n_0$)

(ii) P.e. $a_n := (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ definisce una successione

infinitesima non monotona

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Fermat relativo agli estremi locali.

(ii) Calcolare i punti critici della funzione $f(x) := \dfrac{x^2+2x+1}{x-1}$.

Risposta

(i) Se $x_0 \in (a,b)$ è un punto di estremo locale di

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$

(ii) • x_0 è un punto critico di f se $f'(x_0) = 0$.

• $f'(x) = \dfrac{\overbrace{(x-1)\cdot(2x+2)}^{2x^2-2} - (x^2+2x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow \; x^2 - 2x - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{2 \pm \sqrt{\underbrace{(-2)^2 + 4\cdot 1\cdot 3}_{=4}}}{2\cdot 1} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

Quindi i punti critici sono $\underline{\underline{x_0 = -1}}$ e $\underline{\underline{x_1 = 3}}$.

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare la convergenza della serie

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e - 2 \cdot \sqrt[n]{n}\right)^n =: a_n$$

Risoluzione

Si applica il criterio della radice usando il limite notevole $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$:

$$\sqrt[n]{a_n} = e - 2 \cdot \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} \to e - 2 \approx 0.718\ldots =: q < 1 \text{ per } n \to +\infty$$

$\Rightarrow$ la serie S converge.

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \cos(x) - \sin(x)}{x^2 \cdot \ln(1+x)} =: \ell$$

Risoluzione

Con Taylor:

Denominatore: $x^2 \cdot \ln(1+x) \sim x^2 \cdot x = x^3$ per $x \to +\infty$

$\Rightarrow$ Numeratore da sviluppare fino al 3°-ordine

$$x \cdot \cos(x) - \sin(x) = x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$$

$$= \cancel{x} - \frac{x^3}{2} \cancel{- x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$= \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{6}\right) x^3 + o(x^3) = -\frac{1}{3} \cdot x^3 + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{x\to 0} \frac{-1/3 \cdot x^3 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{3} + \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3}}_{=0} = -\frac{1}{3}$$

Esercizio 3 **[4 punti]**

Calcolare la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x \cdot e^{\sin(2x)}$ nel punto $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Risoluzione

- $t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
- $f(x_0) = \frac{\pi}{2} \cdot e^{\sin(2 \cdot \frac{\pi}{2})} = \frac{\pi}{2} \cdot e^{\overbrace{\sin(\pi)}^{=0}} = \frac{\pi}{2}$
- $f'(x) = 1 \cdot e^{\sin(2x)} + x \cdot e^{\sin(2x)} \cdot \cos(2x) \cdot 2 \Rightarrow$

$f'(x_0) = e^{\overbrace{\sin(\pi)}^{=0}} + \frac{\pi}{\cancel{2}} \cdot \overbrace{e^{\sin(\pi)}}^{=1} \cdot \overbrace{\cos(\pi)}^{=-1} \cdot \cancel{2} = 1 - \pi$

$\Rightarrow \underline{\underline{t(x) = \frac{\pi}{2} + (1-\pi) \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)}}$

Esercizio 4 **[4 punti]**

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^4 + y^4}}{x^2 + 2 \cdot y^2} & \text{se } (x,y) \neq 0 \\ 1 & \text{se } (x,y) = 0 \end{cases}$$

Risoluzione

- <u>Continuità:</u> Ponendo $x = 0$ segue

$\lim_{y \to 0} f(0,y) = \lim_{y \to 0} \frac{\overbrace{\sqrt{y^4}}^{=y^2}}{2 \cdot y^2} = \frac{1}{2} \neq 1 = f(0,0)$

$\Rightarrow f$ non è continua in $(0,0) \Rightarrow f$ non è differenziabile in $(0,0)$

<u>Derivabilità:</u> Usando che $f(h,0) = \frac{\sqrt{h^4}}{h^2} = 1$, $f(0,h) = \frac{\sqrt{h^4}}{2h^2} = \frac{1}{2}$, e $f(0,0) = 1$ segue

$\lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{1-1}^{=0}}{h} = 0 = f_x(0,0)$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1/2}{h}$ non converge!

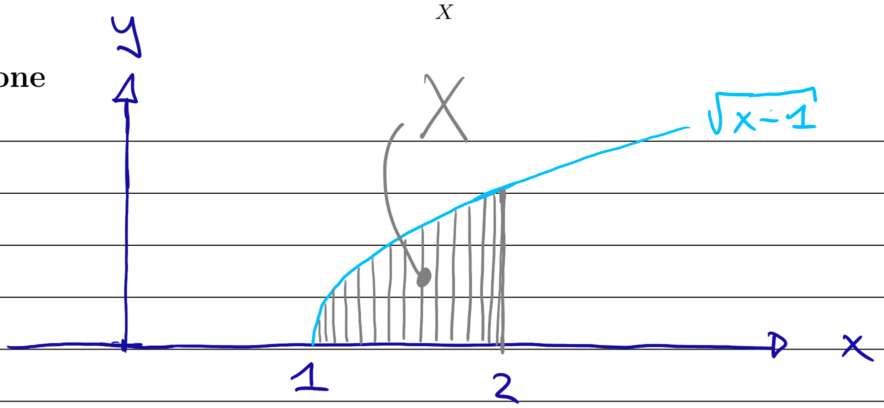
$\Rightarrow f$ è derivabile in $(0,0)$ rispetto x ma <u>non</u> rispetto y.

Esercizio 5 **[6 punti]**

Disegnare il dominio $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1,2],\ 0 \le y \le \sqrt{x-1}\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_X 3x \, dx\, dy$$

Risoluzione



• X è y-semplice e $f(x,y) = 3x$ è continua quindi con Fubini-Tonelli segue

$$I = \int_{x=1}^{2} \int_{y=0}^{\sqrt{x-1}} 3x \, dy\, dx = \int_{x=1}^{2} [3x \cdot y]_{y=0}^{y=\sqrt{x-1}} dx$$

$$= \int_1^2 3x \cdot \sqrt{x-1}\, dx$$

Sost: $x - 1 = t \Rightarrow$
- $x = t+1$
- $dx = dt$
- $x = 1 \Rightarrow t = 0$
- $x = 2 \Rightarrow t = 1$

$$= 3 \cdot \int_0^1 (t+1) \cdot \underbrace{\sqrt{t}}_{= t^{1/2}}\, dt$$

$$= 3 \cdot \int_0^1 (t^{3/2} + t^{1/2})\, dt = 3 \cdot \left[\frac{2}{5} \cdot t^{5/2} + \frac{2}{3} \cdot t^{3/2}\right]_0^1$$

$$= 3 \cdot \left[\frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right] = \frac{6}{5} + 2 = \frac{6+10}{5} = \frac{16}{5}$$

(N.B. funziona anche la sostituzione $t = \sqrt{x-1}$ $\Rightarrow x = t^2 + 1 \Rightarrow dx = 2t\, dt$ e $x = 1 \Rightarrow t = 0$, $x = 2 \Rightarrow t = 1$

e quindi $\int x \cdot \sqrt{x-1}\, dx = \int \overbrace{(t^2+1) \cdot t \cdot 2t}^{= 2t^4 + 2t^2}\, dt \ldots$

Oppure per parti: $\int \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\overbrace{\sqrt{x-1}}^{= (x-1)^{1/2}}}_{g'}\, dx = \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\frac{2}{3} \cdot (x-1)^{3/2}}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\frac{2}{3} (x-1)^{3/2}}_{g} dx$

$= \ldots$)