Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore **28.1.13**

Cognome.............................. **Nome**.................................. **A.A.**.........

Matricola.............................. **Corso di Laurea**........................

Canale A B C D

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Firma:..............................

Domanda 1

[3 punti]

(i) Dare la definizione di differenziabilità per $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in un punto (x_0, y_0).

(ii) Dire se $f(x,y) = e^{xy}\sqrt{y}$ è differenziabile in $(0,1)$, giustificando la risposta.

Risposta

(i) Vedi Disp.

(ii) f è continua in un intorno di (0,1)

$f_x = y e^{xy}\sqrt{y}$

$f_y = x e^{xy}\sqrt{y} + e^{xy}\frac{1}{2\sqrt{y}}$, f_x e f_y sono continue in un intorno di (0,1) $\Rightarrow$ f diff in (0,1)

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Weierstraß.

(ii) Sia $f : [2,6] \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x-1}}$. Allora risulta che

- $\boxed{a}$ f non ammette massimo in $[2,6]$
- $\boxed{b}$ il massimo di f è $\frac{6}{\sqrt{11}}$
- $\boxed{c}$ f non ammette minimo in $[2,6]$
- $\boxed{d}$ il massimo di f è $\frac{5}{9}$

Risposta

(i) Vedi Disp/libro

(ii) f è continua in [2,6] e dunque vale il T. di W.,

a e b sono errate. $f'(x) = \dfrac{\sqrt{2x-1} - \frac{x}{\sqrt{2x-1}}}{(2x-1)} =$

$= \dfrac{2x-1-x}{(2x-1)^{3/2}} = \dfrac{x-1}{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}$; $f' > 0$ per $x > 1$ dunque

$\max f(x) = f(6) = \dfrac{6}{\sqrt{11}}$

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$L = \lim_{x\to 2^-} \frac{\left(\sqrt{2-x}\right)^3 \cdot \ln\left((x-1)^2\right)}{(4-x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Risoluzione

Il limite si presenta $\frac{0}{0}$

$\ln(x-1)^2 = 2\ln(1-(2-x)) = -2(2-x) + o(2-x) \quad x\to 2^-$

$$L = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(2-x)^{\frac{3}{2}} 2(2-x) + o\left((2-x)^{\frac{5}{2}}\right)}{(2-x)^{\frac{5}{2}} \underbrace{(2+x)^{\frac{5}{2}}}_{\to 2^5}} =$$

$$= -\frac{1}{16} \lim_{x\to 2^-} \frac{(2-x)^{\frac{5}{2}}}{(2-x)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{1}{16}$$

Esercizio 2

[5 punti]

Studiare la convergenza della seguente serie

$$(\alpha) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos\left(n^{-\frac{3}{5}}\right)}{\sqrt[3]{n^2}}$$

Risoluzione

$$\left(1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt[5]{n^3}}\right)\right) \sim \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[5]{n^6}} \qquad n\to+\infty$$

$$\frac{\left(1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt[5]{n^3}}\right)\right)}{\sqrt[3]{n^2}} \sim \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[5]{n^6}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{n^{\frac{6}{5}+\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}\frac{1}{n^{\frac{28}{15}}}$$

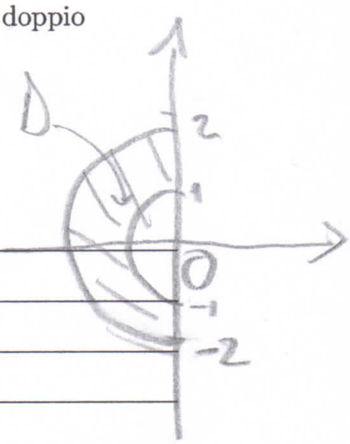
dunque $(\alpha) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{n^{\frac{28}{15}}}$, converge

Esercizio 3

[4 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq 0\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I = \iint_D \frac{xy^2}{x^2+y^2}\, dx\, dy$$



Risoluzione

Passiamo a coordinate polari

$$I = \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\rho^{\cancel{3}} \cos\varphi \,\text{sen}^2\varphi}{\rho^2}\, \rho \, d\rho \, d\varphi$$

$$= \left(\int_1^2 \rho^2 \, d\rho\right)\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \text{sen}^2\varphi \cos\varphi \, d\varphi\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left[\rho^3\right]_1^2 \left[\frac{1}{3}\text{sen}^3\varphi\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = \frac{1}{9}(8-1)(-1-1) = -\frac{14}{9}$$

Esercizio 4

[3 punti]

Data la funzione $f(x,y) = \left(\frac{y+\ln x}{x-2}\right)^5$, calcolare f_x e f_y.

Risoluzione

$$f_x = 5\left(\frac{y+\ln x}{x-2}\right)^4 \frac{\frac{1}{x}(x-2) - y - \ln x}{(x-2)^2}$$

$$= 5\left(\frac{y+\ln x}{x-2}\right)^4 \frac{x-2-xy-x\ln x}{x(x-2)^2}$$

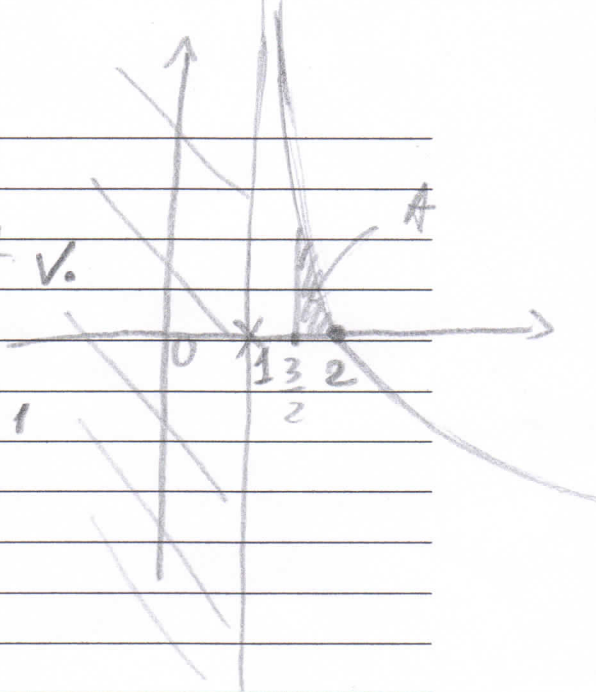
$$f_y = 5\left(\frac{y+\ln x}{x-2}\right)^4 \frac{1}{x-2}$$

Esercizio 5

[8 punti]

Trovare il dominio, eventuali simmetrie, zeri, punti di estremo locale ed asintoti della funzione $f(x) = \ln(\frac{1}{\sqrt{x-1}})$ e tracciarne un grafico approssimativo. Calcolare inoltre l'area della regione compresa tra il grafico di f, l'asse x e le rette $x = \frac{3}{2}$ e $x = 2$.

Risoluzione



$D_f = \{x > 1\} = (1, +\infty)$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ $\quad x = 1$ asint V.

$f(x) \geq 0 \quad \frac{1}{\sqrt{x-1}} \geq 1 \; ; \; \sqrt{x-1} \leq 1$

$x - 1 \leq 1 \; ; \; x \leq 2$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$f(x) = -\frac{1}{2} \ln(x-1) \qquad f'(x) = -\frac{1}{2(x-1)} < 0 \quad \forall x \in D_f$

asintoto o.?

$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2} \frac{\ln(x-1)}{x} = 0$

Area della superficie $A = \int_{\frac{3}{2}}^{2} -\frac{1}{2} \ln(x-1)\, dx =$

$= -\frac{1}{2} \left\{ \left[x \ln(x-1) \right]_{\frac{3}{2}}^{2} - \int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{x-1+1}{x-1} dx \right\} =$

$= +\frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{2} \ln \frac{1}{2} + \int_{\frac{3}{2}}^{2} dx + \int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{1}{x-1} dx \right\} =$

$= -\frac{3}{4} \ln 2 + \frac{1}{2}\left(2 - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \ln(x-1) \Big|_{\frac{3}{2}}^{2} =$

$= -\frac{3}{4} \ln 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) \ln 2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \ln 2$