Analisi Matematica 1, Scritto 2-A. Durata della prova: 2 ore **28.1.13**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** .... **Canale** A B C D

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[3 punti]

(i) Dare la definizione di estremo superiore e massimo di un insieme $A \subset \mathbb{R}$.

(ii) Dato $A = \{x \in \mathbb{R} : e^{2-x} \geq 1\}$, determinarne $\sup A$ ed eventualmente $\max A$.

Risposta

(i) Vedi Dispense o libro di Testo

(ii) $e^{2-x} \geq 1$; $2-x \geq 0$; $x \leq 2$

$\sup A = 2 = \max A$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Lagrange o del valor medio.

(ii) Data $f : [1, 10] \to \mathbb{R}$ con $f(x) = e^{2x}$ il punto c di Lagrange di f è dato da

a $c = \ln\sqrt{\frac{e^{20}-e^2}{9}}$ b $c = \sqrt{\ln\left(\frac{e^{20}-e^2}{18}\right)}$

~~c~~ $c = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{20}-e^2}{18}\right)$ d non si può applicare il teorema di Lagrange

Risposta

(i) Vedi Disp o Libro

(ii) $\exists c \,/\, \frac{f(10)-f(1)}{10-1} = f'(c) = 2e^{2c}$;

$\frac{e^{20}-e^2}{18} = e^{2c}$ $2c = \ln\left(\frac{e^{20}-e^2}{18}\right)$;

$c = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{20}-e^2}{18}\right)$

Esercizio 1

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite seguente

$$I = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^3+2}{n^3+3}\right)^{2n^3}$$

Risoluzione

$$\left(\frac{n^3+2}{n^3+3}\right)^{2n^3} = \left\{\underbrace{\left[\left(1-\frac{1}{n^3+3}\right)^{n^3+3}\right]}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}}\right\}^{\frac{2n^3}{n^3+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2}$$

$$I = e^{-2}$$

Esercizio 2

[5 punti]

Studiare la continuità in $\mathbb{R}$ della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^3}-1}{\ln(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} & \text{se } x > 0, \\ \dfrac{2x^2-x^3}{(x-2)^2} & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Risoluzione

f è continua per $x>0$ e per $x<0$

Va controllata $x=0$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x^3}-1}{\ln(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to0^+}\frac{e^{x^3}-1}{x^3}\,\frac{x^3}{\frac{3}{2}(x^2+o(x^2))}$$

$\frac{e^{x^3}-1}{x^3}\to 1$

$=0$

$f(0)=0$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{2x^2-x^3}{(x-2)^2} = \lim_{x\to0^-}\frac{x^2(2-x)}{(x-2)^2} = \lim_{x\to0^-}\frac{-x^2}{x-2} = 0$$

Dunque f è continua in $\mathbb{R}$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare il seguente integrale

$$I = \int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}\cdot(1+\sqrt[3]{x})}\,dx$$

Risoluzione

$x = t^3 \quad dx = 3t^2\,dt \qquad t = \sqrt[3]{x} \qquad x=1 \to t=1$, $x=8 \to t=2$

$$I = \int_1^2 \frac{3\cancel{t^2}\,dt}{\cancel{t}(1+t)} = 3\int_1^2 \frac{t+1-1}{1+t}\,dt =$$

$$= 3\int_1^2 dt - 3\int_1^2 \frac{dt}{t+1} = 3t\Big]_1^2 - 3\ln(t+1)\Big]_1^2 =$$

$$= 3 - 3(\ln 3 - \ln 2) = 3 + 3\ln 2 - 3\ln 3$$

Esercizio 4

[5 punti]

Studiare la continuità e la derivabilità in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3\cos y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3\cos y}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho^3}\cos^3\varphi\cos(\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi)}{\cancel{\rho^2}} = 0 = f(0,0)$$

poiché $|\cos^3\varphi\cos(\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi)| \le 1$, dunque f è continua

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

Dunque $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

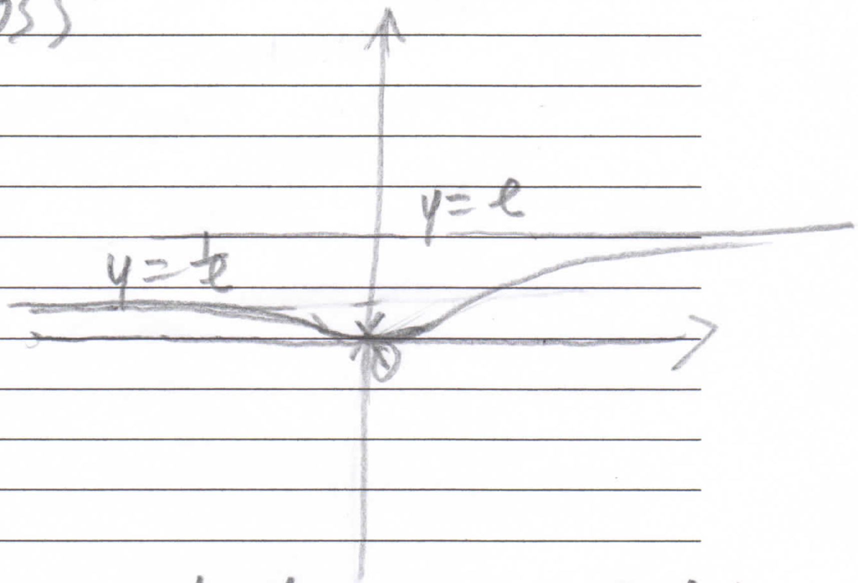
Esercizio 5

[7 punti]

Trovare il dominio, eventuali simmetrie, zeri, punti di estremo locale ed asintoti della funzione $f(x) = e^{\frac{x-1}{|x|}}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

$D_f = \{ \mathbb{R} \setminus \{0\} \}$



$f(x) > 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = e^{-1}$

$y = e$ e $y = e^{-1}$ asintoti orizzontali

per $x > 0$ $f'(x) = e^{\frac{x-1}{x}} \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + 1}{x^2} = e^{\frac{x-1}{x}} \frac{1}{x^2} > 0$

per $x < 0$ $f'(x) = e^{\frac{1-x}{x}} \frac{-\cancel{x} - 1 + \cancel{x}}{x^2} = e^{\frac{1-x}{x}} \left(\frac{-1}{x^2} \right) < 0$

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{\substack{y = \frac{1}{x} \\ y \to +\infty}} e^{1-y} y^2 = \lim_{y \to +\infty} e \frac{y^2}{e^y} = 0$

$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{\substack{y = \frac{1}{x} \\ y \to -\infty}} e^{y-1} (-y^2) = -\frac{1}{e} \lim_{y \to -\infty} \frac{y^2}{e^{-y}} = 0$

$\sup f(x) = e$ $\quad \inf f(x) = 0$