Analisi Matematica. Durata della prova: 2 ore **28.1.25**

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea:** Informatica

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[**4 punti**]

(i) Dare la definizione di convergenza di una serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ alla somma $s \in \mathbb{R}$.

(ii) Dare l'esempio di una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ convergente alla somma $s = \sqrt{e}$.

Risposta

(i) Sia $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ per $n \in \mathbb{N}$. Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s$ se

$\lim_{n \to +\infty} s_n = s$.

(ii) Visto che $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ segue per $x = \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{2})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

Domanda 2

[**4 punti**]

(i) Enunciare il Teorema di Weierstraß.

(ii) Dare l'esempio di una funzione continua $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ che non ammette estremi locali.

Risposta

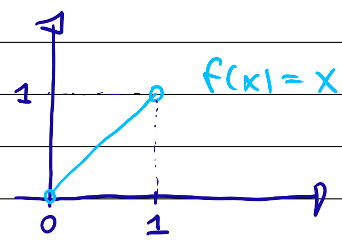
(i) Se $f \in C[a,b]$, allora f ammette minimo e massimo,

cioè $\exists\ x_0, x_1 \in [a,b]$ t.c.

$$f(x_0) \le f(x) \le f(x_1) \quad \forall\ x \in [a,b]$$

(ii) Per esempio $f(x) = x$ per $x \in (0,1)$ è continua ma

non ammette minimo e massimo



Esercizio 1 [5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x\cdot e^x + \sin(x)}{x\cdot(1-\cos(x))} =: \ell$$

Risoluzione

Denominatore: $1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2} \Rightarrow x\cdot(1-\cos(x)) \sim x\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{3}$ per $x\to 0$

Numeratore: Da sviluppare fino al 3° ordine:

$$x^2 - x\cdot e^x + \sin(x) = x^2 - x\cdot\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
$$= \cancel{x^2} \cancel{-x} \cancel{-x^2} - \frac{x^3}{2} \cancel{+x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
$$= -\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}+\frac{1}{6}\right)\cdot x^3 + o(x^3) = -\frac{4}{6}\cdot x^3 + o(x^3)$$
$$= -\frac{2}{3}\cdot x^3 + o(x^3) \sim -\frac{2}{3}\cdot x^3 \text{ per } x\to 0$$

Quindi dal principio di sostituzione segue

$$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{-2/3\cdot\cancel{x^3}}{1/2\cdot\cancel{x^3}} = -\frac{4}{3}$$

Esercizio 2 [5 punti]

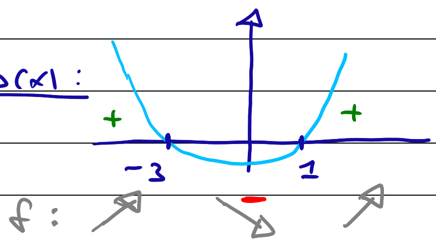
Trovare gli intervalli di monotonia e gli estremi locali della funzione $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ e classificarli.

Risoluzione

- f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$, quindi gli unici candidati per i punti di estremo locale sono i punti critici
- $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3\cdot\underbrace{(x^2+2x-3)}_{=:p(x)} = 0 \iff$

$$x = x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{2^2+4\cdot 3}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} = \begin{cases} -\frac{6}{2} = -3 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Grafico di $p(x)$:



Visto che segno di $f'(x)$ = segno $p(x)$ segue:

- f è crescente in $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$
- f è decrescente in $(-3,1)$
- $x_0 = -3$ è un punto di max locale, $x_1 = 1$ è un punto di min locale.

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ nel punto $x_0 = e$.

Risoluzione

- $t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
- $f(x_0) = e \cdot \ln\left(\frac{1}{e}\right) = e \cdot (-1) = -e$
- $f'(x) = \left(-x \cdot \ln(x)\right)' = -1 \cdot \ln(x) - x \cdot \frac{1}{x} = -\ln(x) - 1$

$\Rightarrow f'(x_0) = -\ln(e) - 1 = -1 - 1 = -2$

Quindi risulta

$$t(x) = -e - 2 \cdot (x - e)$$

$$= e - 2x$$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(2,1)$ per la funzione $f(x, y) = \dfrac{x + 2y}{x - y}$ e il versore $v = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Risoluzione

- f è C^1 quindi differenziabile
- per il teorema del gradiente segue

$$D_v f(2,1) = f_x(2,1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + f_y(2,1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- $f_x(x,y) = \dfrac{(x-y) \cdot 1 - 1 \cdot (x+2y)}{(x-y)^2} = \dfrac{-3y}{(x-y)^2} \Rightarrow f_x(2,1) = \dfrac{-3}{1} = -3$
- $f_y(x,y) = \dfrac{(x-y) \cdot 2 + 1 \cdot (x+2y)}{(x-y)^2} = \dfrac{3x}{(x-y)^2} \Rightarrow f_y(2,1) = \dfrac{3 \cdot 2}{1} = 6$

Quindi risulta:

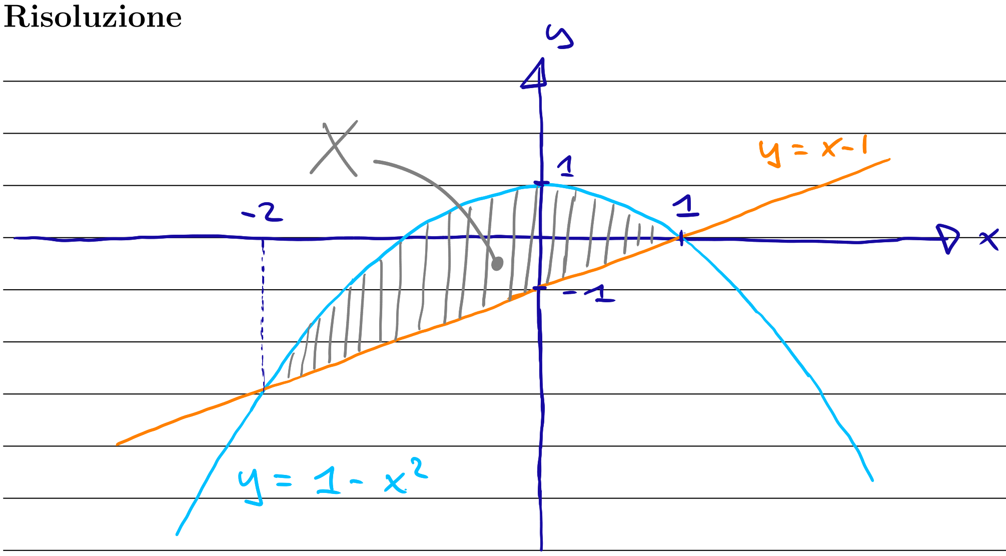
$$D_v f(2,1) = (-3) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + 3 \cdot \sqrt{3}$$

Esercizio 5

[6 punti]

Disegnare il dominio $X = \{(x, y) : x - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$ e calcolare la sua misura $|X|$.

Risoluzione



• Intersezione tra parabola $y = 1 - x^2$ e retta $y = x - 1$:

$$1 - x^2 = x - 1 \iff x^2 + x - 2 = 0$$

$$\iff \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -\frac{4}{2} = -2 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Quindi risulta $D = \{(x, y) \mid x \in [-2, 1],\ x - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$ cioè D è y-semplice.

Per Fubini-Tonelli segue:

$$|X| = \iint_X 1 \, dx \, dy = \int_{x=-2}^{1} \int_{y=x-1}^{1-x^2} 1 \, dy \, dx$$

$$= \int_{x=-2}^{1} [y]_{y=x-1}^{1-x^2} \, dx = \int_{-2}^{1} \overbrace{1 - x^2 - x + 1}^{-x^2 - x + 2} \, dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{1}$$

$$= -\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + 2 \cdot \frac{6}{6} - \left(-\frac{(-2)^3 \cdot 2}{3 \cdot 2} - \frac{(-2)^2 \cdot 3}{2 \cdot 3} + 2 \cdot (-2) \cdot \frac{6}{6} \right)$$

$$= \frac{\overbrace{-2 - 3 + 12}^{7}}{6} - \frac{\overbrace{16 - 12 - 24}^{-20}}{6}$$

$$= \frac{7 + 20}{6} = \frac{9}{2}$$