Analisi Matematica 1, Scritto 2-A. Durata della prova: 2 ore **11.2.11**

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** A B C D

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che l'equazione $e^x = \sin(x)$ ammette almeno una soluzione $x \in \mathbb{R}$.

Risposta

(i)

(ii)

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di derivata parziale $f_x(x, y)$ per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) Trovare una funzione derivabile $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $f_x(x, y) = x$ e $f_y(x, y) = 2$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Risposta

(i)

(ii)

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie convergente. Allora

- [a] $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$
- [b] $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - a_n \sim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ per $n \to +\infty$
- [c] $\lim_{n\to+\infty} n \cdot a_n = 0$
- [d] nessuna delle precedenti

Risoluzione

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\int_0^2 f(x)\, dx = 1$. Allora

- [a] $\int_0^1 f(2x)\, dx = 1$
- [b] $f(x) \geq 0 \ \forall\, x \in [0,2]$
- [c] $\exists\, x \in [0,2]$ tale che $f(x) = \frac{1}{2}$
- [d] $\int_0^2 f^2(x) dx = 1$

Risoluzione

Esercizio 3

[3 punti]

La funzione $f(x,y) = \begin{cases} y & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ nel punto $(0,0)$ è

- [a] continua
- [b] differenziabile
- [c] derivabile rispetto a x
- [d] derivabile rispetto a y

Risoluzione

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \cos\big(\sinh(x)\big)}{x^4}$$

Risoluzione

Esercizio 5

[4 punti]

Sia $f(x,y) = 1 + xy$ e $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. In quali punti $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ vale $D_v f(x_0, y_0) = 1$?

Risoluzione

Esercizio 6

[5 punti]

Disegnare il dominio $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D xy \, dx \, dy$$

Risoluzione