Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea:** Ingegneria dell'Informazione

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza alla somma $s \in \mathbb{R}$ di una serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

(ii) Fare l'esempio di una serie convergente alla somma $s = e$

Risposta

(i) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge alla somma $s \in \mathbb{R}$

se $\lim_{n \to +\infty} s_n = s$ dove $s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

(ii) Per esempio la serie esponenziale $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$

converge alla somma e.

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare la regola della catena per la derivazione.

(ii) Calcolare la derivata prima della funzione $f(x) := \sqrt[3]{2 + \sin(x^3)}$

Risposta

(i) Se $f : (a,b) \to (c,d)$ e $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ sono derivabili,

allora $g \circ f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile con

$(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad \forall x \in (a,b)$.

(ii) • $f(x) = (2 + \sin(x^3))^{1/3} \Rightarrow$

$f'(x) = \frac{1}{\cancel{3}_1} (2 + \sin(x^3))^{-2/3} \cdot \cos(x^3) \cdot \cancel{3}^{1} x^2$

$$= \frac{x^2 \cdot \cos(x^3)}{\sqrt[3]{(2 + \sin(x^3))^2}}$$

Esercizio 1

[4 punti]

N.B.:

Calcolare, se esiste, il limite

$$\ell := \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2)\cdot e^t\,dt}{x^2\cdot \ln(1+2x)}$$

$\Rightarrow$: $F(x)$ è derivabile con $F'(x) = \sin(x^2)\cdot e^x$ per il teorema fondamentale del calcolo integrale

Risoluzione

- $\ln(1+2x) \sim 2x$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$

$$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2)\cdot e^t\,dt}{2x^3} \quad \left(= \frac{0}{0}\right)$$

l'Hospital e teorema fondam. del calcolo integrale

$$\stackrel{}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)\cdot e^x}{6\cdot x^2} = 1/6$$

$e^x \to 1$, $\frac{\sin(x^2)}{x^2} \to 1$

Esercizio 2

[5 punti]

Determinare tutti gli asintoti della funzione $f(x) := \dfrac{x}{e^x - 2} + 3$.

Risoluzione

Dominio X: $x \in X \Leftrightarrow e^x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 2 \Leftrightarrow x \neq \ln(2)$

Inoltre $\lim_{x\to \ln(2)^\pm} f(x) = \frac{\ln(2)}{2^\pm - 2} + 3 = \frac{\ln(2)}{0^\pm} = \pm\infty$ ($\ln(2) \to 0$)

$\Rightarrow$ $x = \ln(2)$ è un asintoto verticale di f.

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x - 2} \left(= \frac{+\infty}{+\infty}\right) \stackrel{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$

$\Rightarrow$ $y = 3$ è un asintoto orizzontale di f per $x \to +\infty$.

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{-\infty}{0-2} + 3 = +\infty$ $\Rightarrow$ possibilità di un asintoto obliquo per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot(e^x - 2)} + \frac{3}{x} = -\frac{1}{2} =: m$$

($e^x \to 0$, $\frac{3}{x} \to 0$)

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x-2} + 3 + \frac{x}{2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{2x} + x\cdot e^x - \cancel{2x}}{2\cdot(e^x-2)} + 3 = 3 =: q.$$

($x\cdot e^x \to 0$, $2\cdot(e^x-2) \to -4$)

$\Rightarrow$ $y = -\frac{x}{2} + 3$ è un asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

Esercizio 3 [5 punti]

Calcolare il polinomio di Maclaurin di ordine $n = 4$ della funzione $f(x) := e^{2x} + \sin(x) \cdot \cos(x)$.

Risoluzione

- $e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + \frac{(2x)^4}{24} + o(x^4)$

$$= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0$$

- $\sin(x) \cdot \cos(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + o(x^4)$$

$$= x - \frac{1+3}{6} \cdot x^3 + o(x^4) = x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^4)$$

per $x \to 0$

$$\Rightarrow e^{2x} + \sin(x) \cdot \cos(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^4)$$

$$= \underbrace{1 + 3x + 2x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4}_{= T_4(x)} + o(x^4)$$

Esercizio 4 [4 punti]

Calcolare il piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) := \frac{x + y}{x} \cdot \cos(x)$ nel punto $(x_0, y_0) := (\pi, 2)$.

Risoluzione

- $p(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$
- $f(x_0, y_0) = \frac{\pi + 2}{\pi} \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{= -1} = -\frac{\pi + 2}{\pi}$
- $f_x(x, y) = \frac{x \cdot (1) - 1(x + y)}{x^2} \cdot \cos(x) - \frac{x + y}{x} \cdot \sin(x)$

$$= \frac{-y \cdot \cos(x)}{x^2} - \frac{x + y}{x} \cdot \sin(x) \Rightarrow$$

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{-2 \cdot \overbrace{\cos(\pi)}^{= -1}}{\pi^2} - \frac{\pi + 2}{\pi} \cdot \overbrace{\sin(\pi)}^{= 0} = \frac{2}{\pi^2}$$

- $f_y(x, y) = \frac{\cos(x)}{x} \Rightarrow f_y(x, y) = \frac{\overbrace{\cos(\pi)}^{= -1}}{\pi} = -\frac{1}{\pi}$

$$\Rightarrow p(x, y) = -\frac{\pi + 2}{\pi} + \frac{2}{\pi^2} \cdot (x - \pi) - \frac{1}{\pi} \cdot (y - 2)$$

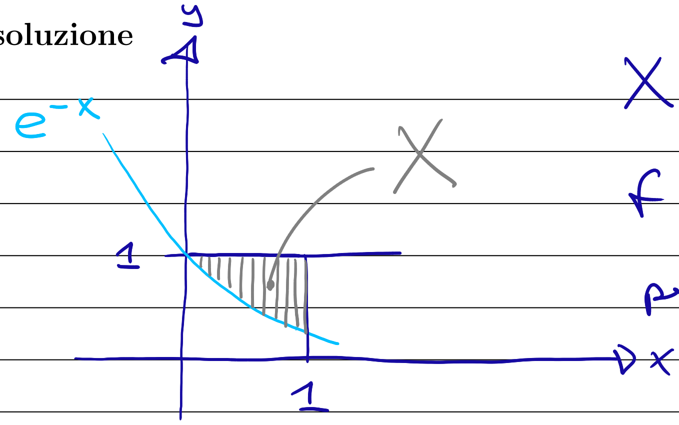
Esercizio 5

[6 punti]

Disegnare il dominio $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ e^{-x} \le y \le 1\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_X \underbrace{\left(-\frac{x}{y^2}\right)}_{=:f(x,y)} dx\, dy.$$

Risoluzione



X è y-semplice e f è continua, quindi per Fubini-Tonelli segue

$$I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=e^{-x}}^{1} -\frac{x}{y^2}\, dy\, dx = \int_{x=0}^{1} x \cdot \left[\frac{1}{y}\right]_{e^{-x}}^{1} dx$$

$$= \int_0^1 x \cdot \left(\frac{1}{1} - \underbrace{\frac{1}{e^{-x}}}_{=e^x}\right) dx = \int_0^1 \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{(1 - e^x)}_{g'}\, dx$$

i.p.p.

$$= \left[\underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{(x - e^x)}_{g}\right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{(x - e^x)}_{g}\, dx$$

$$= \Big(\underbrace{1 \cdot (1 - e^1)}_{1-e} - \underbrace{0 \cdot (0 - e^0)}_{=0}\Big) - \left[\frac{x^2}{2} - e^x\right]_0^1$$

$$= 1 - e - \left(\frac{1}{2} - e^1 - \left(\frac{0^2}{2} - e^0\right)\right)$$

$$= \cancel{1} \cancel{- e} - \frac{1}{2} \cancel{+e} \cancel{-1} = -1/2$$